

## Є.Є.СЛУЦЬКИЙ - ФУНДАТОР УКРАЇНСЬКОЇ ШКОЛИ ЕКОНОМІКО – МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

О.Черняк

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка*

*В статті наведені основні наукові результати відомого економіста, математика Євгена Євгеновича Слуцького, одного із фундаторів школи економіко-математичного моделювання в Україні.*

*In the article the main scientific results of famous economist and mathematician Eugen Slutsky are shown. He was one of the founders of the school of economic-mathematical modeling in Ukraine.*

До ключових постатей нашої національної еліти належить Євген Євгенович Слуцький (1880-1948) – випускник Імператорського університету Св.Володимира (сьогодні Київський національний університет імені Тараса Шевченка), вчений зі світовим ім'ям, автор глибоких та оригінальних праць у галузі економічної теорії, економетрики, теорії ймовірностей та математичної статистики, геофізики, праксеології та інших галузей знань. Без сумніву, Є.Є.Слуцького можна назвати засновником економіко-математичного моделювання в Україні.

Є.Є.Слуцький пише у своїй автобіографії: „Зацікавленість до економіки з'явилась у мене ще у перші студентські роки в Києві. У Мюнхені вона поглибилась і укріпилась. Я серйозно вивчав Рікардо, потім Маркса, Ільїна (Леніна) „Розвиток капіталізму в Росії” і таке інше. Вступаючи на юридичний факультет, я уже мав плани робіт щодо застосування математики в економіці”.

Його самостійна наукова робота „Теорія граничної корисності” (1911 рік) була відзначена університетською золотою медаллю, але вона не була надрукована. Саме у цій роботі Слуцький вперше застосував методи математики до економічних питань, про які він розмірковував ще у Мюнхені. Треба зауважити, що оцінка роботи викликала деякі труднощі, оскільки математична її частина була важкою для розуміння економістів, а економічна – математиків.

Стаття „До теорії збалансованого бюджету споживача”[1] – основоположна економіко-математична праця Є.Є.Слуцького. Український вчений був прихильником ідей видатних економістів К.Менгера, В.Джевонса, Л.Вальраса – фундаторів маржиналізму. Центральне місце в теорії маржиналістів посідала не сфера виробництва і розподілу як у основоположників економічної теорії, а сфера споживання та обміну споживчих благ. Спираючись на дослідження маржиналістів, зокрема В.Парето, Є.Є.Слуцький визначив корисність як суто емпіричне поняття, пов'язане з рухом цін та грошових доходів. Вплив ціни на величину попиту і пропозиції доведений вченим математично. При цьому він відкинув гіпотезу щодо можливості виміру корисності (кардинальну корисність). Результати досліджень дозволили започаткувати альтернативну кількісній порядку теорію корисності, що не допускала не тільки можливості вимірювання корисності благ для пояснення поведінки споживачів, але й взагалі будь-якої згадки про кількісне значення корисності.

В теорії бюджету споживача Слуцького важливе місце займає аналіз граничної корисності кожного блага у зв'язку з функцією кількості лише даного блага. Всі попередні дослідники даної проблеми виходили із закону насиченості потреб (закону Г.Госсена), але так і не змогли надати своїм результатам загального тлумачення. Цілком природно, що багато авторів висловлювали сумніви щодо його загальності. Є.Є.Слуцький довів майже повну відсутність обґрунтованої теорії насиченості благами, зокрема щодо найбідніших верств населення. Є.Слуцький поставив за мету надати функції корисності об'єктивного

трактування навіть при тому, що він не відкинув цілком традиційне уявлення про суб'єктивну природу корисності благ. Завдяки цьому у світовій літературі затвердився погляд на корисність як на величину, що зростає в міру зростання переваги у споживачів даного набору благ. Український вчений виходив тільки з можливості кількісного аналізу надання переваг, їх порядкового зіставлення. Таким чином, Є.Слуцьким було подано поглиблене обґрунтування теорії поведінки споживачів, доведено можливість математичної формалізації функції корисності на основі перших і других похідних.

Досліджуючи вплив зміни ціни на обсяги споживання, він виділив два ефекти – доходу і заміщення, вивів основне рівняння теорії цінності. Саме такий відокремлений теоретичний аналіз цих ефектів дозволив розрізнити вплив на індивідуальний бюджет зміни відносних цін від впливу, що пов'язаний зі змінами реального доходу. Це дало змогу не тільки виділити зазначені процеси, а й обчислити їх характеристики за допомогою індексного методу статистичного аналізу.

Є.Є.Слуцький *першим* розглянув питання аналізу споживчого вибору, застосував для цього серйозний математичний апарат, але своєчасно не сконцентрував увагу вчених на важливості отриманих ним результатів. Проблеми розвитку теорії попиту залишалися поза увагою науковців до середини 30-х років ХХ століття, коли цю важливу теорію прийшлося відкривати заново англійським економістам Дж.Хіксу та Р.Аллену [2], які пізніше визнали Є.Слуцького фундатором основного рівняння теорії цінності.

Стаття Є.Слуцького є найвидатнішим прикладом залишених без належної уваги робіт, оригінальність та важливість котрих визнається лише після отримання іншими аналогічних результатів [3].

Перша висока оцінка роботи Слуцького в економічному журналі була висловлена у великій статті італійського економіста В.Домінедо із університету Бокконі, останні сторінки якої він присвятив математичному та теоретичному викладенню матеріала в статті Слуцького Він оцінив її як „роботу, що представляє значну цінність, але складну для читання” [4, с.790].

Р.Аллен опублікував низку статей, в яких показав наукове новаторство українського вченого [5,6]. Американський економіст Г.Шульц в своїй статті, присвяченій питанням визначення реакції споживачів на зміни їх доходу та ціни на будь-який товар, детально аналізує статтю Слуцького, порівнює її із статтею Хікса та Аллена, зазначає: „Розв'язання даної проблеми спочатку було дане Парето в 1892 р., потім було спрощене, розширене і виражене в більш витонченій формі професором Слуцьким, російським статистиком і економістом, в чудовій статті 1915 р.” [7].

У своїй книзі „Вартість і капітал” лауреат премії імені Нобеля Дж.Р.Хікс підкреслював: „Теорія, що буде викладена в цьому та двох наступних розділах, належить, власне кажучи, Слуцькому, з тим лише застереженням, що я абсолютно не був ознайомлений з його роботою не під час завершення свого власного дослідження, ні навіть деякий час після опублікування змісту цих розділів в журналі *Economica* Р.Д.Д.Алленом та мною. Робота Слуцького сильно математизована, в ній мало міркувань щодо важливості його теорії. Все це (а також час, коли була опублікована робота), можливо, і пояснює, що такий тривалий час вона не впливала на розвиток економічної думки та довелося відкривати її заново. Даний труд є першим систематичним дослідженням „території”, вперше відкритої Слуцьким.” [8, с.112].

Г.Шульц і М.Фрідмен вважали, що Є.Є.Слуцький пішов далі Хікса і Аллена. Про це свідчать слова з листа М.Фрідмена Г.Хотеллінгу: ”[Слуцький] ясно визнає складність, яку дає незмірність корисності, і наводить доведення неможливості одержання других похідних функції корисності з емпіричних даних. В даній статті міститься практично все, що є в недавно опублікованій статті Хікса-Аллена, та ще багато іншого” [9, с.322]. Двома місяцями поспіль Г.Шульц також писав Г.Хотеллінгу: „Стаття відрізняється тим, що доповнює і подає результати Хікса-Аллена в простішій і зрозумілішій формі” [9, с.397].

Рівняння Слуцького відображає один із головних результатів, отриманих Євгеном Євгеновичем при дослідженні проблеми бюджету споживача, і в сучасній економічній теорії називається *основним рівнянням теорії цінності або рівнянням Слуцького*.

Про роль рівняння Слуцького в мікроекономічній теорії влучно зауважив Дж.Хікс: „Це рівняння, одержане спочатку Слуцьким, можна вважати Основним Рівнянням Теорії Цінності. ...В іншій теорії попиту полягає в більшості у виявленні властивостей цього фундаментального рівняння.” [8, с.450-451].

Потрібно зауважити, що в статті Є.Є.Слуцького „До теорії збалансованого бюджету споживача” не лише здійснене формулювання і доведення видатного рівняння, але уведена низка важливих понять та тверджень, що склали основу теорії споживання. Більше того, висловлені в ній ідеї покладені в основу теорії пропозиції факторів, так що можна стверджувати про створення Є.Є.Слуцьким теорії ринкової поведінки домашніх господарств. Той самий підхід виявився плідним і в теорії виробництва, де вплив зміни ціни ресурсу може бути розкладений на складові, подібні до ефектів заміщення і доходу у споживанні [10].

Той факт, що українському вченому віддано пріоритет у дослідженні проблем споживання, пересвідчують зарубіжні підручники з економічної теорії. Наприклад, у підручнику професора Каліфорнійського університету в Берклі Г.Р.Веріана „Мікроекономіка. Проміжний рівень”, що є базовим для викладання даного курсу у багатьох провідних університетах світу, теорія Є.Слуцького представлена окремим розділом, що містить формули, графіки, аналітичні матеріали [11].

Про актуальність і повну відповідність сучасності законів ціни, попиту, бюджету, виведених Є.Є.Слуцьким, свідчать численні посилання на його роботи в наукових дослідженнях різних відгалужень теорії споживання. Дослідження властивостей фундаментального рівняння, сформульованого українським вченим, продовжується до сьогодні [12-14].

Незважаючи на численні новітні теорії, ординалістський підхід, який пропагував Є.Є.Слуцький, і сьогодні залишається основою мікроекономічного аналізу поведінки споживачів.

Лауреати премії імені Альфреда Нобеля з економіки, в теоріях яких знайшли відображення і розвиток ідеї Є.Є.Слуцького (Семюелсон П.А., Фріш Р., Дебре Ж., Ерроу К.Д., Хікс Дж.Р., Фрідмен М.).

Перейдемо тепер до наукових результатів Є.Є.Слуцького, які пов'язані з теорією ймовірностей та математичною статистикою. Готуючись до магістерських іспитів, Євген Євгенович перш за все приступив до вивчення теорії ймовірностей, як теоретичної основи статистики. В цей період відбулася одна подія, яка, за визнанням Слуцького, визначила його наукову долю. У 1912 р. він зустрівся з проф. А.В.Леонтовичем, згодом відомим фізіологом та нейрогістологом. А.В.Леонтович подарував Євгену Євгеновичу свою книгу [15], у якій викладались методи і результати статистичних досліджень К.Пірсона. Зацікавившись цими питаннями, Євген Євгенович звернувся до вивчення оригінальних робіт. В результаті ним була написана книга „Теорія кореляції”, що була у той час вагомим внеском у статистичну літературу і не втратила значення і у наші дні.

Майже одночасно з окремим виданням робота була надрукована в „Известиях Киевского коммерческого института” і отримала позитивні відгуки критиків. Це привело до того, що Слуцький отримав запрошення на посаду викладача Київського комерційного інституту, яку і зайняв з січня 1913 р. У цьому інституті ( пізніше перейменованого в Інститут народного господарства) він пропрацював викладачем, доцентом, а з 1920 р. професором до початку 1926 р., коли переїхав до Москви. Спочатку йому було доручено викладати курси математичної статистики, але потім читання їх він поступово залишив, оскільки вважав своєю основною спеціальністю економіку. У цій галузі ним опубліковано декілька оригінальних, але порівняно невеликих статей. Новий коефіцієнт середньої густоти населення [16-17], обчислення доходу держави від емісії [18, 19]– такі теми ряду статей, у яких Євген Євгенович застосовує методи математичної статистики до різних спеціальних

задач. Але, як він написав у згаданій автобіографії, саме в економіці він „старанно працював багато років над твором, який залишився незакінченим. Оскільки, коли руйнувалося капіталістичне господарство і стали вимальовуватися обриси планового соціалістичного господарського ладу, зникла база для тих проблем, які турбували мене як економіста-математика. Вивчення економічних процесів при соціалізмі, особливо у перехідну епоху, вимагало інших знань, інших навичок мислення, інших методів, ніж ті, якими я озброїв себе”.

Вказана обставина, звичайно, здійснила вирішальний вплив на те, що вже на початку двадцятих років Слуцький став вважати себе в першу чергу спеціалістом в галузі статистики, а не в галузі економіки. Для цього основа була достатньо добре підготовлена рядом його робіт. Природно, що перехід до цього нового періоду діяльності був пов'язаний у Слуцького з деяким критичним переглядом змісту статистики, основних її ідей і обґрунтувань.

Перш за все він помітив, що рівень логічних уявлень про основні поняття теорії ймовірностей, які лежать в основі статистики, був досить невисоким. На цю сторону справи Євген Євгенович звернув увагу як у спеціальних статтях, так і у ряду рецензій на надруковані у той час книги. Треба сказати, що робота з аксіоматизації теорії ймовірностей, з розробки чітко сформульованої системи аксіом, доведенню їх незалежності і несуперечності, залишилася осторонь від інтересів Євгена Євгеновича. Але дослідження змісту тих основних понять, які повинні лежати в основі теорії ймовірностей, було проведено Слуцьким достатньо глибоко. Ним було дано, якщо можна так виразитися, якісний опис логічної структури основ теорії ймовірностей, виходячи з інтересів прикладних питань.

Доповідь “До питання про логічні основи обчислення ймовірностей” Євген Євгенович Слуцький зробив на третьому Всеросійському з'їзді статистиків у 1922 році [20]. Із невеликими доповненнями вона була опублікована вдруге у збірнику статей, присвячених пам'яті Миколи Олексійовича Каблукова у 1925 році [21].

На початку ХХ століття гостро постала проблема аксіоматизації теорії ймовірностей. У цій роботі Євген Євгенович першим вказав, що при уведенні основних понять теорії ймовірностей необхідно формулювати їх “ в дусі суворого формалізму, дотримуючись класичного зразку “Основ геометрії” Гілберта. У такому стилі, тобто з усуненням усіх понять, що відносяться до природознавства (час, причина і таке інше), повинні бути установлені поняття: “подія”, „випробування”, “події єдино можливі”, „події сумісні” і „несумісні” і таке інше”.

Треба сказати, що багато вчених намагалися формалізувати теорію ймовірностей. Так ще у 1909 році Еміль Борель, видатний французький математик, намагався наблизити поняття теорії ймовірностей до теорії множин та метричної теорії функцій. До речі, Євген Євгенович особисто був знайомим з Емілем Борелем. Видатний французький академік представляв статті Слуцького у “Доповідах Паризької Академії наук” ( Comptes rendus Acad. Sci.) у 1927-1929 р.р. [22-27].

У 1917 році професор Харківського університету Сергій Натанович Бернштейн у своїй праці “Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей” [28] наводить першу аксіоматичну побудову теорії ймовірностей. Причому він якісно порівнює випадкові події за більшою чи меншою їх імовірністю.

На початку 1919 року з'являються у друці роботи Ріхарда Мізеса, у яких він пропонує своє визначення ймовірностей, яке базується на границі частот подій. Наразі в усіх підручниках з курсу “Теорія ймовірностей та математична статистика” воно називається частотне означення ймовірності.

Євген Євгенович був не згоден з концепціями Бернштейна та Мізеса. Особливо це стосувалося побудови Мізеса. Слуцький виступає проти самої суті побудови теорії Мізеса, а саме можливості побудови теорії ймовірностей на основі уявлення про ймовірність як границю частоти. При цьому підході не можна говорити про ймовірність без попереднього проведення випробувань. Євген Євгенович наголошує ще у 1922 році на “необхідності

суворо переглянути всі основні положення обчислення ймовірностей, створити сувору аксіоматику і привести всю її структуру до більш чи менш легко оглядової математичної форми. А це єдино можливо лише на основі її повної формалізації з виключенням з неї всіх не суто математичних проблем. Ні ймовірність, ні потенційна гранична частотність такою формальною природою не володіють”.

Для абстрактної побудови теорії ймовірностей Слуцький пропонує термін “диз’юнктивне обчислення” [20]. Раніше Євген Євгенович використовував термін “обчислення альтернатив”. Термін “диз’юнктивне обчислення” запропонував йому використовувати В.Борткевич. Заради повної зрозумілості Слуцький запропонував відмовитися від звичного терміну ймовірність, застосовуючи новий - „валентність”, яка приписується подіям. Він це зробив через те, що в той час було дуже багато філософських тлумачень поняття „ймовірність”. Приписування Євген Євгенович розглядає як встановлення деякого відношення  $R$  між подією і її валентністю, яке визначається єдино тим правилом, що якщо подія  $A$  розпадається на ряд альтернатив, то сума валентностей усіх цих альтернатив повинна дорівнювати валентності події  $A$ . Співвідношення між валентностями входять в “диз’юнктивне обчислення”. Євген Євгенович не вводить систему аксіом. Але поняття валентності узагальнило поняття ймовірності та поняття частотності, а також, граничної частотності. На той час, це було суттєвим кроком вперед до строгої і суто математичної аксіоматизації теорії ймовірностей.

І тільки у 1933 році Андрій Миколайович Колмогоров запропонував теоретико-множинну аксіоматику теорії ймовірностей. Це було зроблено у монографії Андрія Миколайовича „Основні поняття теорії ймовірностей”, яка вийшла у 1933 році на німецькій мові та у 1936 році на російській. Андрій Миколайович Колмогоров високо оцінив вклад Євгена Євгеновича у становлення теорії ймовірностей [29]: „Зроблені наразі зближення між теорією ймовірностей та математичною теорією функцій сягають до більш ранніх робіт Е.Бореля, але програма систематичної побудови математичної теорії ймовірностей на вказаних вище основах була обґрунтована і в значній мірі здійснена в роботі Євгена Євгеновича [30]”.

На основі “диз’юнктивного обчислення” Є.Є.Слуцький будує своє розуміння закону великих чисел [31]. При цьому він спирається на поняттях стохастичної асимптоти і стохастичної границі. Досить повно концепція стохастичної асимптоти та стохастичної границі викладена ним у фундаментальній праці [30].

Граничні теореми займають центральне місце в теорії ймовірностей. Дослідженням збіжності випадкових величин до границі займалися багато вчених. Вперше введено поняття збіжності Я.Бернуллі у знаменитому трактаті „Мистецтво припущень” ( „Ars conjectandi” – Basileae, 1713.). Бернуллі довів закон великих чисел для послідовності незалежних випробовувань. Але протягом двох століть поняття збіжності випадкових величин, за словами Слуцького, було „безіменним”, а операція переходу до границі залишалась без відповідного позначення. В роботі [30] створена концепція стохастичної границі і вказані її основні властивості. Аналогічні дослідження проводив і італійський математик Ф.П.Кантеллі. Про ці дослідження Євген Євгенович дізнався лише тоді, коли завершив власні. В той час йшли війни (Перша світова та громадянська в Росії) і він не мав доступу до світової наукової літератури. Але теорія, розроблена Євгеном Євгеновичем, була значно глибшою. Так поняття стохастичної асимптоти, що узагальнює поняття стохастичної границі, він розглядає вперше. Хоча поняття стохастичної границі з’являлося у формулюваннях закону великих чисел С.Д.Пуассоном, П.Л.Чебишевим, А.А.Марковим. Євген Євгенович пише [30]: „Між стохастичним і звичайним поняттям границі лежить ціла логічна прірва, через яку без поняття ймовірності немає мосту”. І далі критикує означення ймовірності за Мізесом „Нещасна ідея створити ймовірності з частот за допомогою звичайного поняття границі є тому в своїй основі невірною і нездійсненою”.

Євген Євгенович вніс суттєвий вклад у розвиток граничних теорем теорії ймовірностей. На основі понять стохастичної асимптоти та стохастичної границі Є.Є. Слуцький побудував і

теорію випадкових функцій. Це відбулося завдяки його практичній роботі з часовими рядами.

Б.В.Гнеденко пише про це так: „Поняття стохастичної границі стало тим фундаментом, який дозволив визначити і розвинути поняття стохастичної неперервності, диференційованості та інтегрованості випадкових функцій і інших їх властивостей ( див. [32-39]. Так, наприклад, ним було показано, що будь-яка випадкова стохастична неперервна функція на сегменті стохастично еквівалентна вимірній функції не вище, ніж 2-го класу Бера. З імовірністю одиниця стаціонарна випадкова функція з дискретним спектром майже періодична за Безиковичем [38]. Дослідження Слуцького, безперечно, зіграли видатну роль у становленні й розвитку актуальних розділів теорії ймовірностей, що мали велике значення для застосувань... Значний цикл робіт Є.Є.Слуцького пов'язаний з вивченням стаціонарних випадкових послідовностей; ці роботи стали початковим пунктом для багатьох чисельних та плідних досліджень ряду авторів. Цікавість Євгена Євгеновича до цього кола проблем була зумовлена явищами, у яких спостерігалась періодичність, або дослідники намагалися знайти цю періодичність. Відштовхуючись від ряду незалежних, однаково розподілених випадкових величин і застосовуючи до них багатократний процес рухомого сумування, можна прийти, як показав Слуцький, до класу стаціонарних послідовностей, що мають псевдоперіодичні властивості, імітуючи ми процес на достатньо великих відрізках його аргументу. Таким чином, було доведено, що при деяких умовах гіпотеза процесу, який отримується підсумуванням скінченного числа періодичних коливань, статистично не відрізняється від гіпотези випадкової функції з великою зоною зв'язності. Цей результат був свого роду сенсацією; він змусив критично переглянути багато чисельні спроби статистичного доведення періодичності багатьох явищ метеорології, геофізики, економіки і таке інше. У ряді робіт Є.Є.Слуцький широко розробив вказану концепцію і застосував її до вивчення конкретних явищ. Ці дослідження отримали заслужене визнання і увійшли невід'ємним вкладом у сучасну статистику.

Теорія, розвинена Євгеном Євгеновичем, знайшла природне місце у загальній теорії стаціонарних випадкових процесів Хінчина. Таким чином, доволі заслужено вважати Є.Є.Слуцького і О.Я.Хінчина основоположниками важливої гілки сучасної теорії ймовірностей – теорії стаціонарних випадкових процесів, у межах якої отримали найбільш повне пояснення коливальні процеси з неперервними спектрами” [40].

На основі теорії зв'язних рядів Є.Є.Слуцький побудував методику прогнозу випадкових процесів. Причому ця методика розрахована на довгострокові прогнози із заданими межами похибки [41]. Цю роботу вважають *однією з перших з прогнозування випадкових процесів*.

Особливо треба сказати про запропонований Є.Є.Слуцьким метод моделей (метод статистичного моделювання) для знаходження зв'язку між явищами. Його ідея у наступному. При дослідженні багатьох питань, які ще не отримали повного теоретичного обґрунтування, можна поставити статистичний експеримент і таким шляхом оцінити випадковий чи не випадковий характер досліджуваного статистичної відповідності. Так, відібравши ряд високих та низьких врожаїв у Росії за 115 років, він співставив з ними ряд максимумів та мінімумів числа сонячних плям за 300 років. Очевидно, що усі співставлення з хронологічними зсувами будуть говорити про випадкові співпадіння, а так як ні при одному з можливих положень відібраного ряду врожаїв відносно відібраного ряду сонячних плям не отримується досить мала сума квадратів відхилень, то можна вважати не випадковий характер співпадіння коливань реальних рядів доведеним досить переконливо [42].

Теми природничо-наукових і економічних робіт, що межують із загальнотеоретичними концепціями Слуцького і що виявилися поштовхом для цих загальних ідей і досліджень, досить різноманітні. Сюди відноситься вивчення відомого ряду Беверіджа (індекс цін на пшеницю в Європі за 300 років з початку XVI до середини XIX ст.); з'ясування зв'язку між сонячною постійною і температурою [43, 44]; дослідження періодичності сонячної активності [45]; вивчення річних приростів секвої за період від 272 р.

до н.е. до 1914 р., тобто більш ніж за 2000 років та інші. Нажаль, багаторічні дослідження Є.Є.Слуцького приросту секвой не були ним опубліковані, а у період Великої Вітчизняної війни всі матеріали, попередні результати та чернетки статей були втрачені. Із розповіді Слуцького, а також з вже згаданого огляду [46] неможливо відновити навіть у малій ступені результати цього незавершеного дослідження. Він відкрив, що крива річних приростів – гіпербола; протягом усього майже двохтисячолітнього періоду існує лише один період з 50 по 350 р., коли спостерігалось катастрофічне зниження росту. Оскільки дерева росли не в одному місті, а були розкидані на величезних відстанях, то припущення про локальні причини (наприклад про захворювання дерев) не можуть пояснити цього провалу. Є.Є.Слуцький висунув гіпотезу про катастрофічну посушливу трьохсотлітню смугу. Природно, що ця гіпотеза потребує додаткову перевірку на іншому матеріалі. Вивчення коефіцієнтів кореляції між членами ряду привело Євгена Євгеновича до іншого кліматичного висновку про зміни кліматичних умов у Арізоні в період між 850 - 1000 р. У якості гіпотези, яка пояснює це явище, він висловив припущення про зледеніння узбережжя Гренландії. Але і це припущення не було перевірено.

Другий довгий ряд спостережень, утворений Слуцьким [45], доставили йому історичні відомості про полярні сніга у середніх та південних широтах, які дійшли до нас за період від 400 до 1600 р., Є.Є.Слуцький перевіряв на основі цього ряду спостережень гіпотезу про наявність строгого періоду сонячної активності, близького до 11 років. З'ясувалося, що ці історичні дані добре групуються навколо арифметичної прогресії з різницею в 11,10266 років. При екстраполяції цієї послідовності на період після 1600 р. виявляється, що максимумами сонячних плям близько підходять до цієї прогресії. Оскільки чітка кореляція між числом сонячних плям і полярних снігів за цей період добре відома, то гіпотезу строгої періодичності сонячної активності можна вважати підтвердженою. Отже, Євген Євгенович став засновником і методу статистичного моделювання, який широко використовується при економіко-математичному моделюванні.

Велика заслуга Є.Є.Слуцького також у побудові таблиць неповної Г- і В-функцій, які використовуються у математиці та статистиці до цього часу.

На завершення, вкажемо на неоціненний вклад Євгена Євгеновича Слуцького у становленні теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів. До цього часу кількість посилань на його роботи в наукових журналах, монографіях, підручниках є однією з найвищих серед посилань на роботи з теорії ймовірностей та математичної статистики в світі. Детально ознайомитись з біографією та основними науковими здобутками Є.Є.Слуцького можна у фундаментальній монографії [47].

Об'єктивний внесок Євгена Євгеновича у людську культуру виявився переважно внеском математика: його природничо-наукові і отримавши завершення економічні роботи цікаві перш за все з методологічної сторони як вказівки шляхів розширення сили та гнучкості математичних методів дослідження.

1. Slutsky E. Sulla teoria del bilancio del consumatore // *Giornale degli economisti e rivista di statistica*. - 1915. - Vol.51, July. - P. 1-26. – Engl. transl. Slutsky E. On the Theory of the Budget of the Consumer // *Readings in Price Theory / Eds. by G.J.Stigler, K.E. Boulding, London: Allen& Unwin, 1953. - P. 27-56. – Рос. пер. Слуцкий Е.Е. К теории сбалансированного бюджета потребителя // Экономико-математические методы. -1963.- Вып.1. – С. 241-271.*
2. Hicks J.R., Allen R.G.D. A Reconsideration of the Theory of Value. Pt. I, II // *Economica*. N. S. I. - 1934. -Vol. 52-76.- P. 196-219.
3. Чипман Дж.С., Ланфан Ж.-С. История одной находки: как была заново открыта и интерпретирована статья Слуцкого 1915 г. // *Журнал-учебник „ Экономическая школа”*. -1999.- Выпуск 5.
4. Dominedo V. Considerazioni interno all teoria della domanda // *Giornale degli Economisti*.- 1933. - Vol.73 (Janvier).- P. 765-807.
5. Allen R.G.D. Professor Slutsky's Theory of Consumer Choice // *Review of Economic Studies*.- 1935-1936. - Vol.III.

6. Allen R.G.D. The Work of Eugen Slutsky // *Econometrica*.- 1950. -Vol.18, July №3.
7. Schultz H. Interrelations of Demand, Price and Income // *Journal of Political Economy*.- 1935. -Vol. 43. - P. 433-481.
8. Хикс Дж.Р. Стоимость и капитал. -М., 1988.
9. Hands D. W., Mirowski P. Harold Hotelling and the neoclassical dream // *Economics and methodology : crossing boundaries* / Eds. by R. E. Backhouse, D. M. Hausman, U. Maki, A. Salanti. Proc. IEA Conf. held in Bergamo (Italy). – London: Basingstoke, 1998.
10. Ватник П.А. Равенство Слуцкого и смежные вопросы // *Журнал-учебник „Экономическая школа”*.- 1999.- Том.5, выпуск 5.
11. Varian Hal R. *Intermediate Microeconomics. A Modern Approach*. 5<sup>th</sup> ed. - New York. London : W.W.Norton & Company,1999. - P.136-157.
12. Weber C.E. More on Slutsky’s Equation as Pareto’s Solution // *History of Political Economy*. -1999. -Vol.31, Number 3, Fall. - P. 575-586.
13. Chipman J.S., Lenfant J.-S. Slutsky's 1915 Article: How It Came to be Found and Interpreted // *History of Political Economy*. – 2002. -Vol.34, No.3, Fall. - P.553-598.
14. Mongin Ph. On the Confirmation of the Law of Demand // *Laboratoire d’Econometrie*. - 2005.- Cahier n° 2005-015. June.
15. Леонтович А. Элементарное пособие к применению методов Гаусса и Пирсона при оценке ошибок в статистике и биологии. – Киев,1911.
16. Слуцкий Е.Е. О новом коэффициенте средней плотности населения // *Вестник статистики* . – 1923. –Кн. XIV. – С.5-19.
17. Слуцкий Є.Є. До питання про пересічну густоту населення // *Записки соціально-економічного відділу*. –Київ, Українська Академія наук, 1923. –Т.1. – С.138-150.
18. Слуцкий Е.Е. К вопросу о вычислении дохода государства от эмиссии // *Местное хозяйство*. Ежемесячный журнал Киевского Губэконосо. –1923. - № 2. – С.39-62. ( Приложение 1 к статье Л.Н.Яснопольского “Наше денежное обращение в эпоху революции” ).
19. Слуцкий Е.Е. Математические заметки к теории эмиссии // *Экономический бюллетень Конъюнктурного института*. –1923. -№11-12.- С.53-60.
20. Слуцкий Е.Е. К вопросу о логических основах исчисления вероятностей. Доклад, читанный в заседании Секции теоретической статистики III Всероссийского статистического съезда в ноябре 1922 г. // *Вестник статистики* . – 1922. –Кн. XII. – С.13-21.
21. Слуцкий Е.Е. К вопросу о логических основах исчисления вероятностей / В кн.: Памяти Николая Алексеевича Каблукова // *Сборник статей по статистике*. –Москва, 1925. –Т.1. – С.254-262.
22. Slutsky E. Sur un théorème limite relatif aux séries des quantités éventuelles (Про одну граничну теорему, що стосується рядів випадкових величин) // *Comptes rendus Acad. Sci*. – 1927. – Т.185. – P. 169-171.
23. Slutsky E. Sur un critérium de la convergence stochastique des ensembles des valeurs éventuelles (Про один критерій стохастичної збіжності множин, що складаються із випадкових величин) // *Comptes rendus Acad. Sci*. –1928. – Т.187. – P.370.
24. Slutsky E. Sur les fonctions éventuelles continues, intégrables et dérivables dans le sens stochastiques (Про випадкові функції – неперервних, інтегрованих і диференційованих у стохастичному сенсі) // *Comptes rendus Acad. Sci*. –1928. – Т.187. –P.878-880.
25. Slutsky E. Quelques propositions sur les limites stochastiques éventuelles ( Декілька пропозицій про випадкові стохастичні границі) // *Comptes rendus Acad. Sci*. –1929. – Т.189. –P.384-386.
26. Slutsky E. Sur l’erreur quadratique moyenne du coefficient de correlation dans le cas des suites des épreuves non indépendantes (Середньоквадратична похибка коефіцієнта кореляції у випадку послідовності залежних один від одного випробовувань) // *Comptes rendus Acad. Sci*. –1929. – Т.189. –P.612-614.
27. Slutsky E. Sur l’extension de la théorie de périodogrammes aux suites de quantités dépendants (Про розповсюдження теорії періодограм на послідовності залежних величин) // *Comptes rendus Acad. Sci*. –1929. – Т.189. –P.722-723.
28. Бернштейн С.Н. Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей // *Сообщения Харьковского математического общества*. –1917. –Т.15. –С.209-274.

29. Колмогоров А.Н. Евгений Евгеньевич Слуцкий // Успехи математических наук. –1948. –Т.3, вып.4. –С.144.
30. Slutsky E.Ueber stochastische Asymptoten und Grenzwerte (Про стохастичні асимптоти і граничні значення) // Metron. –1925. – Vol. V, № 3, 1/XII. –Р.3-89.
31. Слуцкий Е.Е. К вопросу о “законе больших чисел” // Вестник статистики . – 1925. –Кн. XXI. – С.1-55.
32. Slutsky E. Sur les fonctions éventuelles continues, intégrables et dérivables dans le sens stochastiques (Про випадкові функції – неперервних, інтегрованих і диференційованих у стохастичному сенсі) // Comptes rendus Acad. Sci. –1928. – Т.187. –Р.878-880.
33. Slutsky E. Quelques propositions sur les limites stochastiques éventuelles ( Декілька пропозицій про випадкові стохастичні границі) // Comptes rendus Acad. Sci. –1929. – Т.189. –Р.384-386.
34. Slutsky E. Sur les fonctions éventuelles compactes ( Про випадкові компактні функції) // Atti del Congresso Interen. Dei Mathematici, Bologna, 3-10 settembre 1928. – Bologna, 1932. – Т. VI. –Р.101-115.
35. Slutsky E. Alcune applicazioni dei coefficienti di Fourier all’analisi delle funzioni aleatorie stazionarie (Деякі застосування коефіцієнтів Фур’є до аналізу випадкових стаціонарних функцій) // Giorn. Istituto Ital. degli Attuari. –1934. – Anno V, № 4. – Р.3-50.
36. Слуцкий Е.Е. О связанных случайных функциях одной независимой переменной // Труды первого Всесоюзного съезда математиков. –1935. – С.347-357.
37. Slutsky E. Qualche proposizione relativa alla teoria delle funzionai aleatorie (Декілька пропозицій до теорії випадкових функцій) // Giorn. Istituto Ital. degli Attuari. –1937. – Anno VIII, № 2. – Р.3-19.
38. Slutsky E.Sur les fonctions aléatoires Presque périodiques et sur la décomposition des fonctions aléatoires stationnaires en composantes (Випадкові майже періодичні функції та розклад випадкових стаціонарних функцій на компоненти) // Actual. scient. industr., Paris, 1938. – Р.33-55.
39. Слуцкий Е.Е. Несколько предложений к теории случайных функций // Труды Среднеазиатского гос.университета, Ташкент. – 1939. –Серия V-а, вып.31. – С. 3-15. ( 3 книги “Сборник, посвященный 30-летию деятельности В.И.Романовского”).
40. Гнеденко Б.В. Евгений Евгениевич Слуцкий (Биографический очерк) // В кн.: Слуцкий Е.Е. Избранные труды. Теория вероятностей. Математическая статистика. –Москва: Изд. АН СССР, 1960. –С.8-9.
41. Слуцкий Е.Е. К вопросу об экстраполяции случайных функций в связи с проблемой прогноза // Журнал геофизики. – 1935. –Т.V, вып. 3. – С.263-279.
42. Слуцкий Е.Е. Статистический эксперимент как метод исследования конкретных проблем. Критические заметки к проблеме “Земля - Солнце” // Журнал геофизики. – 1935. –Т.V, вып. 1. – С.18-38.
43. Слуцкий Е.Е. К вопросу о существовании связи между солнечной постоянной и температурой // Журнал геофизики. – 1933. –Т.III, вып. 3. –С.263-281.
44. Слуцкий Е.Е. К вопросу о солнечной постоянной // Журнал геофизики. – 1934. –Т.IV, вып. 3. – С.392-399.
45. Слуцкий Е.Е. О 11-летней периодичности солнечных пятен // Доклады АН СССР. –1935.- Т.IV (IX), № 1-2. – С.35-38.
46. Слуцкий Е.Е. Десять лет работы для статистической геофизики (на правах рукописи). – Москва: Изд. Центр. ин-та экспериментальной геофизики м метеорологии, 1934. – 18 с.
47. Є.Слуцький. Визнання. Творча спадщина з погляду сучасності. Монографія / За ред. В.Д.Базилевича - К.: Знання, 2007. - 919 с.

**E.E.SLUTSKY - FOUNDER OF UKRAINIAN SCHOOL OF ECONOMIC-MATHEMATICAL MODELING.**

**O.Chernyak.**