ФОРМУВАННЯ РИНКОВОЇ ЕКОНОМІКИ *FORMATION OF MARKET ECONOMY*
В УКРАЇНІ. 2008. Вип. 18. С.45-49 *IN UKRAINE 2008. Is.18 P.45-49*

УДК 330.115:336.76

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ НА ФІНАНСОВОМУ РИНКУ

В. Вовк, Л. Зомчак

Львівський національний університет імені Івана Франка
79008, м. Львів, проспект Свободи, 18
E-mail: kiber@franko.lviv.ua

У статті запропоновано динамічну модель фінансового ринку із трьома змінними (ціна, об'єм та спред), зміну яких описано диференціальними рівняннями. У ході аналізу системи із трьох диференціальних рівнянь виявлено наявність п'яти стаціонарних точок, причому для кожної із них хоча ю, одне власне значення додатне. Це свідчить про нестійкість положення рівноваги.

Ключові слова: *детермінований хаос, фінансовий ринок, власне значення, нестійкий фокус.*

Розглянемо фінансовий ринок як динамічну систему, яка описується величинами $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_N(t)$, причому значення цих величин у початковий момент часу задають початковий стан системи. Для фінансового ринку такими величинами можуть бути будь-які числові характеристики ринку. Тоді закон еволюції динамічної системи можна описати системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = f_j(x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t)), \; j = \overline{1, N} \tag{1}$$

Розв'язок системи (1) відповідає руху точки у N-мірному фазовому просторі $R^N(x_1, x_2, ..., x_N)$, де кожну із динамічних змінних $(x_1, x_2, ..., x_N)$ можна розглядати як незалежну координату.

Якщо розглядати фінансовий ринок як повністю стохастичну систему, то його можна описати шляхом побудови математичних моделей випадкових процесів. Це означає, що необхідно оцінити статистичні характеристики відповідних фінансових активів (математичне сподівання, дисперсію, кореляцію тощо) та побудувати диференціальні чи різницеві рівняння, які генерують випадкові процеси у відповідності до отриманих оцінок.

Математична модель лінійної динаміки фінансового ринку може бути представлена у вигляді векторно-матричного диференціального рівняння:

$$\dot{X} = AX + B * m_x(t) + V(t),$$

де X – вектор станів фінансового ринку,

A, B – матриці коефіцієнтів диференціального рівняння,

$m_x(t)$ - векторна функція, що відповідає математичному сподіванню станів ринку,

$V(t)$ - векторний випадковий процес білого шуму.

Оскільки у цьому випадку на фінансовий ринок повністю поширюються інструменти теорії стохастичних диференціальних систем, то остаточні результати отримують у вигляді диференціальних рівнянь для моментів векторного випадкового процесу. Приклади побудови стохастичних моделей окремих фінансових активів та ринку в цілому наведені у роботі російського інвестора В. Жижилєва [1, с. 179-186].

Однак емпіричні дані з фінансового ринків дають підстави стверджувати, що характер залежностей на них є нелінійним. Тому класичні лінійні моделі не можуть адекватно їх описати. Переважна більшість економічних систем та фінансовий ринок як приклад економічної системи належать до того класу систем, які погано піддаються формалізації.

Тому їх доцільно описувати нелінійними динамічними рівняннями. Прогноз для таких систем можна робити лише на невеликий проміжок часу.

У якості вхідних факторів для нелінійної моделі фінансового ринку обрано ціну, об'єм та спред. Такий вибір обумовлений тим, що вони дозволяють досить точно описати фінансовий актив. Ціна є головною числовою характеристикою фінансового активу, а її прогноз становить найбільший інтерес з точки зору інвестора. Спред вибрано як міру ліквідності активу, хоча на думку В. Вітлінського та А. Камінського „з практичної точки зору спред характеризує ліквідність не повністю" [2, с.38]. Тому разом із спредом необхідно розглядати показники обсягу угод за певний період. Саме ці три фактори вважаються визначальними характеристиками при оцінюванні привабливості фінансового активу прихильниками технічного аналізу.

Економіко-математична модель нелінійної динаміки з урахуванням впливу трьох факторів (ціни, об'єму та спреду), де нелінійність визначається сумою попарних добутків кожного з факторів, можна представити у вигляді системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= a_{11} \cdot x(t) + b_{12} \cdot x(t) \cdot y(t) + b_{13} \cdot x(t) \cdot z(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= a_{22} \cdot y(t) + b_{12} \cdot x(t) \cdot y(t) + b_{23} \cdot y(t) \cdot z(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= a_{33} \cdot z(t) + b_{13} \cdot x(t) \cdot z(t) + b_{23} \cdot y(t) \cdot z(t), \end{aligned} \tag{2}$$

де a_{ii} - елементи діагональної матриці коефіцієнтів, $i = \overline{1,3}$,

b_{ij} - елементи матриці коефіцієнтів, причому $b_{ij} = b_{ji}$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$,

$x(t)$ - ціна фінансового активу в момент часу *t*,

$y(t)$ - об'єм фінансового активу в момент часу *t*,

$z(t)$ - спред фінансового активу в момент часу *t*,

$x(t) \cdot y(t)$ - оборот торгів фінансовим активом в момент часу *t*,

$x(t) \cdot z(t)$ - розрив у ціні фінансового активу в момент часу *t*,

$y(t) \cdot z(t)$ - ліквідність торгів фінансовим активом у момент часу *t*.

Для спрощення дослідження значення випадкових збурень вважаємо рівними нулю, а параметри моделі симетричними.

Структура модельних рівнянь відповідає теоретичним економічним підходам до трактування процесів на фінансовому ринку та узгоджується із результатами емпіричних спостережень, зокрема, з підходом до прийняття інвестиційних рішень на базі технічного аналізу.

Обчислимо дивергенцію фазового потоку системи (2):

$$div\, f = \frac{\partial(\frac{dx(t)}{dt})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{dy(t)}{dt})}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{dz(t)}{dt})}{\partial z} =$$

$$a_{11} + b_{12} y(t) + b_{13} z(t) + a_{22} + b_{12} x(t) + b_{23} z(t) + a_{33} + b_{13} x(t) + b_{23} y(t) =$$

$$= a_{11} + a_{22} + a_{33} + (b_{12} + b_{13}) x(t) + (b_{12} + b_{23}) y(t) + (b_{13} + b_{23}) z(t).$$

Таким чином, потік стискає деякий об'єм фазового простору $V(t)$ згідно співвідношення:

$$V(t) = V(0) \exp(a_{11} + a_{22} + a_{33} + (b_{12} + b_{13}) x(t) + (b_{12} + b_{23}) y(t) + (b_{13} + b_{23}) z(t)).$$

При дослідженні динамічних систем, які описуються диференціальними рівняннями серед розв'язків системи рівнянь (2) велике значення мають ті розв'язки, які описують стаціонарний стан системи, тобто такі, при яких динамічні змінні не залежать від часу [3, с.113]. Тобто для стаціонарного стану систему (2) слід записати у вигляді:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_{11} \cdot x(t) + b_{12} \cdot x(t) \cdot y(t) + b_{13} \cdot x(t) \cdot z(t) = 0$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = a_{22} \cdot y(t) + b_{12} \cdot x(t) \cdot y(t) + b_{23} \cdot y(t) \cdot z(t) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = a_{33} \cdot z(t) + b_{13} \cdot x(t) \cdot z(t) + b_{23} \cdot y(t) \cdot z(t) = 0,$$

Система (3) має п'ять особливих точок:

O_1: (0,0,0),

O_2: $(0, -\frac{a_{33}}{b_{23}}, -\frac{a_{22}}{b_{23}})$,

O_3: $(-\frac{a_{22}}{b_{12}}, -\frac{a_{11}}{b_{12}}, 0)$,

O_4: $(-\frac{a_{33}}{b_{13}}, 0, -\frac{a_{11}}{b_{13}})$,

O_5: $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-b_{12} \cdot a_{33} + b_{23} \cdot a_{11} - a_{22} \cdot b_{13}}{b_{12} \cdot b_{13}}, -\frac{1}{2} \cdot \frac{b_{23} \cdot a_{11} - b_{13} \cdot a_{22} + a_{33} \cdot b_{12}}{b_{12} \cdot b_{23}},\right.$

$\left.-\frac{1}{2} \cdot \frac{-b_{13} \cdot a_{22} + b_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot b_{23}}{b_{23} \cdot b_{13}}\right)$,

які відповідають стаціонарним режимам динаміки або станам рівноваги системи. Їх стійкість можна визначити, вивчаючи поведінку динамічної системи при малих відхиленнях (δx, δy, δz) в околі стаціонарної точки (x^0, y^0, z^0), тобто:

$$\frac{d(x^0 + \delta x)}{dt} = f(x^0 + \delta x, y^0 + \delta y, z^0 + \delta z)$$

$$\frac{d(y^0 + \delta y)}{dt} = g(x^0 + \delta x, y^0 + \delta y, z^0 + \delta z), \quad (4)$$

$$\frac{d(z^0 + \delta z)}{dt} = h(x^0 + \delta x, y^0 + \delta y, z^0 + \delta z),$$

причому залежність відхилень від часу експоненційна. Розклавши функції *f*, *g*, *h* у ряд із степенями δx, δy, δz та обмежившись членами першого порядку, отримаємо лінеаризовану нелінійну систему (7) в околі особливої точки (x^0, y^0, z^0)

Умовою існування нетривіального розв'язку лінеаризованої системи є рівність нулю визначника

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{12}x_2(t) + b_{13}x_3(t) & b_{12}x_1(t) & b_{13}x_1(t) \\ b_{12}x_2(t) & a_{22} + b_{12}x_1(t) + b_{23}x_3(t) & b_{23}x_2(t) \\ b_{13}x_3(t) & b_{23}x_3(t) & a_{33} + b_{13}x_1(t) + b_{23}x_2(t) \end{vmatrix} = 0,$$

тобто необхідно знайти корені характеристичного рівняння лінеаризованої системи (4).

Для нерухомої точки O_1: (0,0,0), розміщеної у початку координат, отримуємо характеристичне рівняння (5):

$$\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \cdot \lambda^2 + \\ + (a_{11} \cdot a_{22} + a_{22} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{33}) \cdot \lambda - a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = 0 \quad (5)$$

де λ - корені характеристичного рівняння або власні числа матриці.

З рівняння (5) знаходимо корені $\lambda_1 = a_{33}$, $\lambda_2 = a_{22}$, $\lambda_3 = a_{11}$. Оскільки на всі параметри a_{ii}, $i = \overline{1,3}$ накладена умова невід'ємності, то всі корені характеристичного рівняння (5) є невід'ємними числами, що відповідає точці нестійкий вузол, коли фазовий потік експоненційно зростає в обидвох напрямках від особливої точки O_1: (0,0,0).

Для наступних точок отримано такі розв'язки відповідних характеристичних рівнянь:

O_2: $(0,\ -\frac{a_{33}}{b_{23}},\ -\frac{a_{22}}{b_{23}})$ $\lambda_1=(a_{11}\cdot a_{22})^{\frac{1}{2}}$, $\lambda_2=-(a_{11}\cdot a_{22})^{\frac{1}{2}}$, $\lambda_3=\frac{-b_{23}\cdot a_{11}-b_{13}\cdot a_{22}+b_{12}\cdot a_{33}}{b_{12}}$.

O_3: $(-\frac{a_{22}}{b_{12}},\ -\frac{a_{11}}{b_{12}},\ 0)$ $\lambda_1=(a_{11}\cdot a_{33})^{\frac{1}{2}}$, $\lambda_2=-(a_{11}\cdot a_{33})^{\frac{1}{2}}$, $\lambda_3=\frac{b_{13}\cdot a_{22}-b_{12}\cdot a_{33}-b_{23}\cdot a_{11}}{b_{13}}$.

O_4: $(-\frac{a_{33}}{b_{13}},\ 0,\ -\frac{a_{11}}{b_{13}})$, $\lambda_1=(a_{22}\cdot a_{33})^{\frac{1}{2}}$, $\lambda_2=-(a_{22}\cdot a_{33})^{\frac{1}{2}}$, $\lambda_3=\frac{b_{23}\cdot a_{11}-b_{12}\cdot a_{33}-b_{13}\cdot a_{22}}{b_{23}}$.

Розв'язки характеристичного рівняння системи (5) у точці O_5: $(\frac{1}{2}\cdot\frac{-b_{12}\cdot a_{33}+b_{23}\cdot a_{11}-a_{22}\cdot b_{13}}{b_{12}\cdot b_{13}},\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{b_{23}\cdot a_{11}-b_{13}\cdot a_{22}+a_{33}\cdot b_{12}}{b_{12}\cdot b_{23}},\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{-b_{13}\cdot a_{22}+b_{12}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot b_{23}}{b_{23}\cdot b_{13}})$ занадто громіздкі для наведення у статті, однак варто зауважити, що один із них є дійсним числом, а два інші – комплексно-спряжені.

Зауважимо, що для точок O_2, O_3, O_4 перші два корені відповідних характеристичних рівнянь є рівними, але з протилежним знаком, отже, хоча б один із них буде додатним числом. Оскільки у розв'язках присутній корінь квадратний, то всі елементи матриці a_{ii}, $i=\overline{1,3}$ мають бути одного знаку, у нашому випадку додатні.

Оскільки для кожної точки хоча б одне із власних значень є додатним, то згідно теореми Ляпунова положення рівноваги у цих точках нестійке [4, с.16]. Для точки O_5 при заданих параметрах моделі можна підібрати таке значення керованого параметра, при якому або комплексно-спряжені розв'язки, або дійсний розв'язок прийматимуть додатне значення. Отже, у даному випадку всі особливі точки є нестійкими.

Наприклад, при параметрах моделі $a_{11}=0.98$, $a_{22}=0.8$, $a_{33}=0.3$, $b_{12}=-0.1$, $b_{13}=-0.32$, $b_{23}=-0.14$ відповідні графіки динаміки кожної змінної моделі, їх попарної динаміки та вигляд у тримірному просторі зображено на рис. 1 та рис.2. Очевидно, щ всі параметри моделі одночасно не можуть набувати додатних значень, тому частина із них має бути від'ємними.

Запропонована модель дозволяє враховувати принципово нестійкий характер фінансових ринків та підтверджує неможливість отримання надійних довгострокових прогнозів й значну перевагу прогнозів короткострокових.

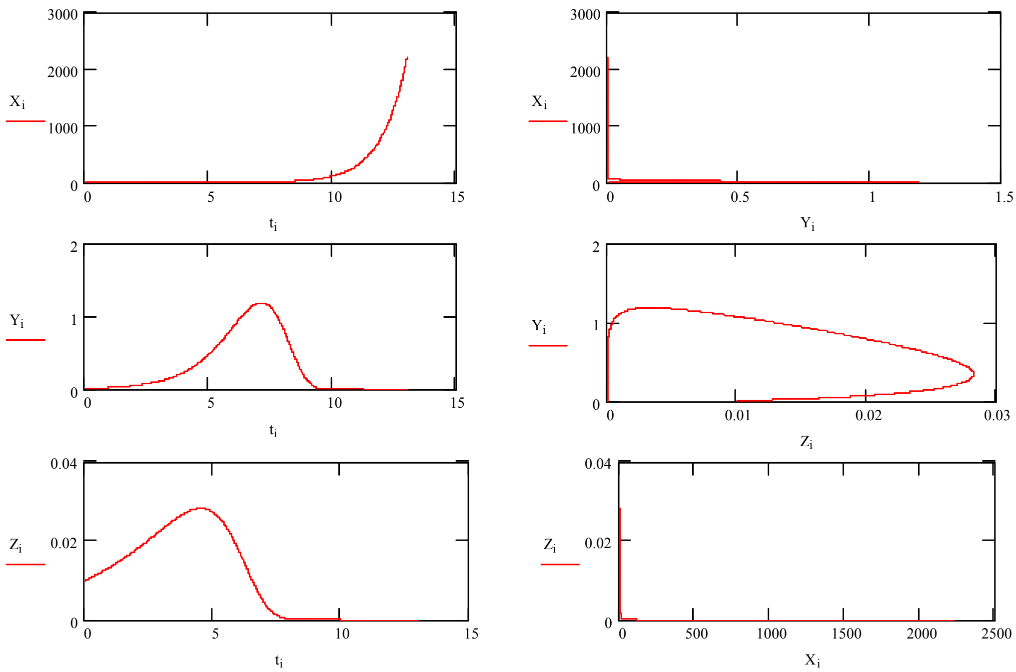

Рис. 1. Динаміка ціни, об'єму та ліквідності попарно

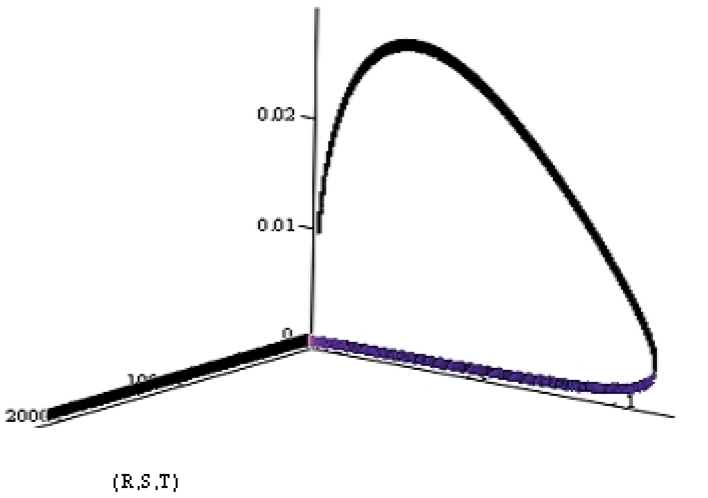

Рис. 2. Динаміка змінних неперервної моделі фінансового ринку

1. Жижиев В.И. Оптимальные стратегии извлечения прибыли на рынке Forex и рынке ценных бумаг. – М.: Финансовый консультант, 2002. – 280 с.
2. Вітлінський В.В. Модель рейтингової оцінки акцій / В.В. Вітлінський, А.Б. Камінський // Міжнародний науковий журнал „Економічна кібернетика”. – 2003. – № 3-4 (21-22). – С. 36-43.
3. Гринченко В.Т. Введение в нелинейную динамику. Хаос и фрактал / В.Т. Гринченко, В.Т. Маципура, А.А. Снарский. – К.: Наукова думка, 2005. – 264 с.
4. Сугаков В.И. Основы синергетики. – К.: Обереги, 2001. – 287 с.
5. Сергеева Л.Н. Моделирование поведения экономических систем методами нелинейной динамики (теории хаоса).– Запорожье: ЗГУ, 2002. – 227 с.

DYNAMIC MODEL OF DECISION-MAKING IN THE FINANCIAL MARKET

V. Vovk, L. Zomchak

Ivan Franko National University of L’viv
Svoboda Av., 18 UA – 79008 L’viv, Ukraine
E-mail: kiber@franko.lviv.ua

In the article the dynamic model of financial market with three variables (price, volume, put and call) is proposed, it’s change is described with differential equations. During the analysis of the system with three differential equation five stationary points were revealed, each of them has at least one positive eigenvalue. It means unstable equilibrium position.

Key words: determinative chaos, financial market, eigenvalue, unstable focus.