УДК 330.115:336.76

ІМІТАЦІЙНА МОДЕЛЬ ЦІНОВОЇ ДИНАМІКИ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ

Л. Зомчак, Т. Лагоцький

Львівський національний університет імені Івана Франка
79008, м. Львів, проспект Свободи, 18
E-mail: kiber@franko.lviv.ua

У статті зроблено огляд традиційних підходів до моделювання курсової динаміки фінансових активів, зокрема на основі стохастичних диференціальних рівнянь. Запропоновано досліджувати поведінку класичних моделей зміни цін фінансових активів із застосуванням методу Монте- Карло.

Ключові слова: *вінерівський (броунівський) процес, модель випадкових блукань, логарифмічний броунівський процес, метод Монте Карло.*

В умовах швидкої зміни кон'юнктури фінансових ринків інвесторам необхідні стратегії управління, які б давали можливість дуже швидко приймати рішення щодо управління фінансовими активами. Для цього учасникам ринку необхідний ефективний інструментарій для проведення глибокого економічного аналізу фінансових ринків та прогнозу динаміки їх розвитку. Очевидно, що такі прогнози повинні бути основані на математичних моделях фінансових часових рядів. Однак на сьогодні ще рано говорити про завершену економіко-математичну теорію фінансового ринку, що дає адекватні результати при застосуванні до будь-якого фінансового часового ряду.

Сучасні методи збору та обробки даних дають багатий емпіричний матеріал для аналізу різних концепцій щодо функціонування фінансових ринків. У зв'язку з цим стають актуальними наукові дослідження щодо математичного моделювання нових властивостей фінансових часових рядів.

Виключно важливе місце у фінансовій теорії та практиці займає теорія ефективного фінансового ринку (Efficient Capital Market Theory), яка вже протягом довгого часу залишається домінуючою теорією, що застосовується для опису поведінки ціни на спекулятивних фінансових ринках. Проблемі моделювання фінансових ринків із застосуванням стохастичного підходу присвячені праці вітчизняних та зарубіжних учених М. Гончара [1], Л. Крушвіца [2], В. Малюгіна [3], А. Мельникова [4], Н. Шепарда [5], А. Ширяєва [6], С. Фокарді та А. Фабоззі [7], Р. Тсея [8] та інших.

Традиційні підходи до моделювання динаміки цін на фінансові активи, які виходять із припущення про їх стохастичну природу, попри широке застосування, мають ряд недоліків, які проявляються у так званих „аномаліях фінансового ринку". Однак на сьогодні не обґрунтовано науково їх неадекватність, так само як і не запропоновано більш дієві методи моделювання цін фінансових активів.

Ціна фінансового активу може залежати від багатьох змінних, які, у свою чергу, включають ціни інших активів. Більшість економіко-математичних моделей, особливо моделей похідних активів (опціонів), включають інтеграли та похідні високого порядку. Тому практична реалізація таких моделей вимагає проведення складних обчислень. Більше того, отримання аналітичного розв'язку не завжди можливе. Тому пропонується у таких випадках застосовувати методи імітаційного моделювання.

Протягом останніх років метод імітаційного моделювання набуває поширення як метод аналізу та оцінки фінансових активів, незалежно від того, чи це чисті фінансові деривативи, чи інвестиції у реальні активи. Серед причин поширення цього методу можна назвати його гнучкість та простоту застосування. Із використанням імітаційного експерименту можна моделювати будь-який тип невизначеності, до того ж може бути застосований будь-який спосіб прийняття рішень. Імітаційні моделі можна будувати та реалізовувати як із застосуванням спеціальних пакетів, так і за допомогою традиційних табличних редакторів. Завдяки цим перевагам інвестори використовують імітаційні методи для розв'язування різного роду фінансових задач, наприклад, при визначенні структури портфеля чи цін екзотичних опціонів.

Основою для гіпотези ефективного ринку стала теорія випадкових блукань (random walk theory). Представлення моделі випадкового блукання для цін активів, якщо ціни фіксуються через постійний інтервал часу Δ, таке:

$$P_t^{\Delta} = P_0 + \sum_{k=1}^{K} \xi_k^{\Delta}, \quad (1)$$

де P_0 - відома ціна у початковий момент часу;

ξ_k^{Δ} - незалежні однаково розподілені випадкові величини, що приймають з ймовірністю 0,5 значення $\pm\sigma\sqrt{\Delta}$; $K = [t/\Delta]$.

При $\Delta \to 0$, модель (1) можна переписати:

$$P_t = P_0 + \sigma W_t, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

де W_t - випадковий процес із приростами, розподіленими за нормальним законом розподілу (стандартний броунівський рух або стандартний вінерівський процес);
σ - волатильність цін.

Очевидно, що коли ціни активів описують моделлю випадкового блукання, то інформація, що міститься у цінах за попередні періоди, не має прогностичних властивостей, тобто не є корисною для передбачення цін активів у наступних періодах.

Отже, необхідно змоделювати вінерівський або броунівський процес методом Монте-Карло. За визначенням його прирости розподілені за нормальним законом розподілу. Тому розглянемо неперервний стохастичний процес $B(t), t \geq 0$:

$$dB = B(dt) = B(t+dt) - B(t) \sim N(0, dt) = Z_{(t,t+dt)}\sqrt{dt}, \ \forall\, t, \quad (3)$$

де $Z_{(t,t+dt)}$ - процес, розподілений за нормальним законом розподілу із нульовим математичним сподіванням та дисперсією, рівною одиниці, тобто $Z_{(t,t+dt)} \sim N(0,1)$ (стандартизований нормальний розподіл).

Припустимо, що цей процес має незалежні прирости. Це означає, що нема накладань інтервалів, а $B(0) = 0$.

Розв'язок диференціального рівняння (3) буде:

$$B(t) \sim N(0,t) \text{ або } B(t) = \sqrt{t}W_t,$$

де W_t - вінервський процес.

Оскільки нема накладання часових відрізків, то для будь-якого $0 \leq s \leq t$ можемо записати наступну рівність:

$$B(t) = \sqrt{s}W_1 + \sqrt{t-s}W_2,$$

де $W_1 \sim N(0,1)$, $W_2 \sim N(0,1)$.

За аналогією інтервал [*0, T*] можна розбити на велику кількість (*n*) підінтервалів, кожен довжиною *h*, так щоб виконувалась умова *T=nh*. Тоді можна записати:

$$B(jh) = B([j-1]h) + Z_j\sqrt{h}, \; j = \overline{1,n},$$

де $Z_j \sim N(0,1)$.

Таким чином отримуємо дискретне наближення неперервного процесу. Якщо вибрати кількість інтервалів розбиття досить великою, то результуюча похибка буде незначною. Для моделювання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом розподілу можна скористатись, наприклад, методом сумування, який спирається на центральну граничну теорему теорії ймовірностей. Й.С. Дегпунар рекомендує метод Бокса-Мюллера [9].

Узагальненням моделі (2) є модель із „дрейфом” або „зносом”, яку для неперервного часу записують так:

$$P_t = P_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

де μ - параметр „зносу”;

σ - параметр волатильності цін активів.

Модель (4), подана через незалежні прирости, матиме такий вигляд:

$$P(t) - P(s) \sim N(\mu[t-s], \sigma^2[t-s]),$$

відповідно густина розподілу випадкової величини $P(t), t \geq 0$, за умови що $P(0) = p(0)$, має вигляд:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x - x(0) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right]^2\right\},$$

що є розв’язком диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Очевидно, що імітаційне моделювання ціни фінансового активу із використанням моделі із зносом аналогічне до того, що описане вище для моделі без зносу.

Найбільшим недоліком моделей типу (2) було те, що вони допускали від’ємні значення цін акцій. Цей недолік усунув П. Самуельсон у 1965 році, запропонувавши модель логарифмічного або геометричного (в термінології автора – економічного) броунівського руху, яка у випадку неперервного часу записуютьсполвідношенням:

$$P_t = P_0 e^{\sigma W_t - t\sigma^2}, \quad t \geq 0. \tag{5}$$

Відповідно ця ж модель (5), але зі зносом, має вигляд:

$$P_t = P_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}, \quad t \geq 0.$$

Ці моделі застосовують на практиці найчастіше. Фактично, вони є розв'язками диференціального рівняння, яке у загальному вигляді можна записати так:

$$\frac{dP}{P} = \mu\ dt + \sigma\ dB. \tag{6}$$

Диференціальне рівняння (6) є прикладом так званого стохастичного диференціального рівняння Іто, яке можна розв'язати, розклавши у ряд Тейлора. Рівняння (6) має аналітичний розв'язок, але у більшості практичних задач цей розв'язок досить складно шукати, тому доцільно застосувати метод Монте Карло. Особливо гостро постає ця проблема при моделюванні цін похідних фінансових активів. Дискретне наближення отримаємо, використавши метод Ейлера.

Результатом застосування стохастичних методів до аналізу та прогнозування цін фінансових активів стало формулювання теорії ефективного фінансового ринку.

Найвідоміше визначення ефективного ринку дав Є. Фама, який сказав, що „ринок, на якому ціни завжди „повністю відбивають" наявну інформацію називають „ефективним" [10, с.384]. Більш практичне визначення дав М. Дженсен, який писав: „Ринок ефективний щодо інформаційної множини θ_t, якщо неможливо отримати економічний прибуток, торгуючи на основі інформаційної множини θ_t" [11, с.49].

Формальний математичний підхід до опису інформаційної ефективності фінансового ринку базується на понятті „маргінал". Тоді гіпотези та властивості ефективного ринку записують наступним чином [3]:

1) Гіпотеза ефективності ринку
2)

$$E_t(|P_{t+1}|\ \theta_t) < \infty,$$
$$E_{t+1}(P_{t+1}) \equiv E_t(P_{t+1}|\theta_t) = P_t, \quad t \geq 0,$$

де $E(P|\theta_t)$ – умовне математичне сподівання ціни фінансового активу за умови, що в момент часу t наявна інформація θ_t.

Виходячи із останньої рівності, кращим прогнозом ціни фінансового активу на завтра є його сьогоднішня ціна.

3) Гіпотеза раціональних очікувань
4)

$$P_{t+1} = E_t(P_{t+1}|\theta_t) + \xi_{t+1}, \quad t \geq 0, \tag{7}$$

де ξ_{t+1} – випадкова величина із нульовим математичним сподіванням (помилка прогнозу).

Згідно з рівнянням (7), зміна ціни порівняно із сьогоднішньою ціною можлива лише за рахунок надходження нової інформації. Знак випадкової змінної (помилки прогнозу) інтерпретується як позитивний чи негативний характер нової інформації. Властивість ортогональності помилок прогнозу

$$Cor(\xi_{t+1}, \xi_t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Тобто помилки прогнозу незалежні між собою, а це означає, що помилка прогнозу на завтра не залежить від доступної на сьогодні інформації.

З урахуванням описаних властивостей, маргінальну модель ефективного ринку записують так:

$$P_{t+1} = P_t + \xi_{t+1}, \quad t \geq 0 \text{ або}$$
$$P_{t+1} = P_0 + \sum_{k=1}^{t+1} \xi_k, \quad t \geq 0.$$

Така модель є узагальненим випадком моделі випадкових блукань. Отже, ефективним ринком можна вважати такий ринок, на якому ціни активів є маргіналами. Частковим випадком такого ринку є той, на якому ціни рухаються згідно теорії випадкових блукань, адже випадкові блукання завжди маргінальні, але не навпаки.

Описані властивості моделі проявляються у раціональній реакції ринку на оновлення інформації, що означає наступне:

1) Миттєву корекцію цін, і, як наслідок, неможливість отримання надприбутків жодним з учасників ринку. Навіть якщо інвестор володіє особливою інформацією, її оприлюднення відразу ж відображається у цінах, тому нема змоги використати її для отримання особливих прибутків.

2) Миттєво коректуючи свої рішення при обновленні інформації, учасники ринку реагують однорідно.

3) Учасники ринку „однорідні в своїх цільових установках” [6, с.48], тобто їхні дії мають „колективно-раціональний” характер.

На практиці ця теорія призводить до того, що інвестор не має ніяких можливостей спрогнозувати ціну фінансового активу. Навіть застосування найскладніших математичних підходів не дає йому жодних переваг перед іншими інвесторами.

Від початку становлення теорії ефективного ринку її піддають критиці. Існують підтвердження її невідповідності реальним процесам, у першу чергу, невідповідність емпіричного закону розподілу віддач фінансових активів нормальному закону: наявність так званих „важких хвостів” та гостровершинність. Попри очевидні недоліки цей підхід залишається панівним, оскільки жоден із альтернативних підходів не має такого логічного математичного обґрунтування.

Очевидно, що за умов ефективного ринку прогнозування ціни фінансового активу неможливе, бо найкращою ціною на завтра є сьогоднішня ціна. Отже, моделювання динаміки цін фінансового активу із застосуванням апарату імітаційного моделювання, не дає змоги отримати прогноз, але дозволяє дослідити поведінку класичних моделей. Вибравши параметри законів розподілу на основі емпіричних даних, отримує модель реального процесу ціноутворення. Якщо результати імітації відповідають даним, отриманим на практиці, то модель можна вважати адекватною.

---

1. Гончар М. С. Фондовий ринок і економічний ріст. – К.: Обереги, 2001. – 826 с.

2. Крушвиц Л. Финансирование и инвестиции. Неоклассические теории финансов. – Петербург: Питер, 2000. – 400 с.

3. Малюгин В.И. Рынок ценных бумаг: Количественные методы анализа. – М.: Дело, 2003. – 320 с.

4. Мельников А. В. Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. – М.: ТВП, 1999. – 126 с.

5. Шепард Н. Статистические аспекты моделей типа ARCH и стохастическая волатильность // Обозрение прикладной и промышленной математики. - 1996. - Т.3. - Вып. 6. – С. 764-826.

6. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1: Факты. Модели; Том 2: Теория; - М.: Фазис, 1998. – 1016 с.

7. Focardi S. The mathematics of financial modelling and investment management / S. Focardi, F. Fabozzi. – Hoboken: John Wiley&Sons, 2004. – 778 p.
8. Tsay R. Analysis of financial time series. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. – 448 p.
9. Dagpunar J. S. Simulation and Monte Carlo. With applications in finance and MCMC. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2007. – 349 p.
10. Fama E. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work // The Journal of Finance. – 1970. - Volume 25. - № 2. – P. 383-417.
11. Park C-H. The profitability of technical analysis: a review / C-H. Park, S H. Irwin // AgMAS Project Research Report. - University of Illinois at Urbana-Champaign. – 2004. – №4. – 102 p.

SIMULATION MODEL OF THE FINANCIAL ASSET PRICE DYNAMIC

L. Zomchak, T. Lagotskiy

Ivan Franko National University of L'viv
Svoboda Av., 18 UA – 79008 L'viv, Ukraine
E-mail: kiber@franko.lviv.ua

In the article the review of the traditional approaches to the modeling of the financial asset price dynamic is made, in particular on the stochastic differential equations. It is proposed to research the behavior of classic price dynamic model with Monte Carlo method.

Key words: *Winer (brownian) motion, random walk model, logarithmic Brownian motion, Monte Carlo method.*