ФОРМУВАННЯ РИНКОВОЇ ЕКОНОМІКИ
В УКРАЇНІ. 2009. Вип. 19. С. 112–117

FORMATION OF MARKET ECONOMY
IN UKRAINE . 2009. Is. 19. P. 112–117

УДК 330.4:519.86

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ СТАВКИ ОПОДАТКУВАННЯ

В. Приймак

Львівський національний університет імені Івана Франка

Побудовано економіко-математичні моделі визначення оптимальної ставки оподаткування індивідуумів, для яких праця як самостійна цінність є необхідністю чи до визначеної межі задоволенням. Запропоновано шляхи знаходження розв'язку отриманих задач математичного програмування.

Ключові слова: оптимальна ставка оподаткування.

Незалежно від того, яку модель економічного розвитку вибирає держава, обов'язковим елементом її економічної системи є податки. Їм належить провідна роль у забезпеченні виконання державою функцій щодо регулювання економічних процесів. Це стосується і механізму державного регулювання ринкової економіки, одним із складників якого є бюджетно-податкове регулювання.

Перехід до ринкових відносин у нашій країні потребує застосування в процесі державного регулювання діяльності господарюючих суб'єктів найбільш ефективних методів їх оподаткування, визначення оптимальних ставок податкового навантаження цих суб'єктів. Адже надто низькі податкові ставки ведуть до малих податкових зборів, а надто великі – до перенесення підприємницької діяльності у тіньовий сектор економіки. У зв'язку з цим особливої актуальності набувають наукові дослідження, які стосуються визначення оптимальної податкової ставки в державі. Практика прийняття макроекономічних рішень потребує створення інструментарію, який дозволив би з достатнім ступенем достовірності оцінювати ефективність фіскальної політики держави з точки зору її впливу на рівень ділової активності в країні.

Аналіз розвитку економіки різних країн і логічні міркування приводять до висновку про це, що існує деякий оптимальний рівень податкового навантаження. Ідея існування такого рівня спочатку виникла в США у виді концепції кривої Лаффера. Хоча в пізніших дослідженнях ця концепція використовувалась в основному в якості одного з елементів більш загальних економіко-математичних моделей [10, 11].

На сучасному етапі розвитку економіки основним завданням науковців і практиків є забезпечення сталого економічного зростання господарства кожної окремо взятої країни і світового господарства загалом. Зокрема, їх цікавить роль податків у формуванні стратегії цього зростання. Вирішувати дану проблему найкраще з використанням економіко-математичних методів і моделей. При цьому доцільно розрізняти два аспекти цієї проблеми: короткострокове та довгострокове зростання.

При короткостроковому зростанні в основному розглядаються ефекти, які реалізуються в межах одного року. Цей аспект досліджуваної проблеми пов'язаний з впливом податків на бажання виробників працювати, на їхню психологію. В більшості випадків ця група питань відносно успішно вирішується шляхом визначення так званих точок Лаффера першого роду, які фіксують те граничне податкове навантаження на виробника, перевищення якого може призвести до згортання виробництва [1, 5, 8].

Другий аспект розглянутої проблеми стосується більш тривалого часового періоду. Він пов'язаний з відтворювально-технологічними особливостями виробництва і впливом податків на саму можливість виробників працювати. Ця група питань може бути вирішена за допомогою визначення критичного податкового навантаження, при якому здійснюється просте відтворення. Довгостроковий характер розглянутих процесів визначається тривалістю налагодження інвестиційних режимів відтворювального циклу і стійкістю технологічних характеристик виробництва [8].

© Приймак В., 2009

О. Ястремський [9] пропонує свою модель оптимізації нормативу відрахувань, яка ґрунтується на положенні, що добробут індивідууму залежить не тільки від рівня споживання благ, але й від величини затрат праці. Автор поділяє індивідуумів на тих, для яких праця як самостійна цінність є злом, для яких праця до визначеної межі є задоволення, і для яких праця є необхідністю. Причому будує і знаходить розв'язок задачі математичного програмування, яка моделює поведінку лише тих індивідуумів, для яких праця як самостійна цінність є злом. В даній роботі розглянуто моделі, що відображають поведінку індивідуумів, які відносяться до другого і третього з цих типів.

Метою даного дослідження є побудова економіко-математичних моделей визначення оптимальної ставки оподаткування індивідуумів, для яких праця як самостійна цінність є необхідністю чи до визначеної межі задоволенням.

Припустимо, що добробут індивіда залежить не тільки від рівня спожитих ним благ, але й від величини затрат його праці. Звідси випливає потреба у вмінні порівнювати обсяги спожитих благ і величини затрат праці. Тобто поєднання "споживання – праця" потребує сумірності цих показників. Використаємо для цього таку цільову функцію корисності, яка приймає тим більше значення, чим більше переважаюче поєднання "споживання – праця":

$$u(y, x) = u(y_1, y_2, ..., y_n, x_1, x_2, ..., x_m), \tag{1}$$

де $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – вектор спожитих благ; $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ – вектор витрат праці різного виду.

Якщо зафіксувати набір спожитих благ y і рахувати, що індивідуум витрачає тільки один вид праці (вектор x рахувати скалярною величиною), то функція $U_y(x) = u(y, x)$ характеризуватиме відношення індивіда до праці як самостійній цінності, а не як джерело отримання матеріальних благ. Очевидно, що існує деякий гранично допустимий рівень T, при якому

$$U_y(x_0) < U_y(x) \;\; \forall x \le T \;\text{ і }\; x_0 > T, \;\; \forall y. \tag{2}$$

Автор [3] називає його *трудовим потенціалом індивідуума*, а ми його називаємо *номінальним трудовим потенціалом індивідуума* [7, с. 22].

Кожному індивідууму притаманна своя функція корисності $U_y(x)$. Автор [9] розглядає вигляд цієї функції для трьох характерних типів індивідуумів: тип I – індивідуум, для якого праця як самостійна цінність є злом, тип II – індивідуум, для якого праця до визначеної межі є задоволення, і тип III індивідуумів, для яких праця є необхідністю. Оскільки функції типу $u(y, x)$ мають порядковий характер і визначені з точністю до монотонного перетворення [10], то для зручності їх графічної побудови він вибирає їх таким чином, щоб $U_y(x) \ge 0$ для $0 \le x \le T$ (рис. 1).

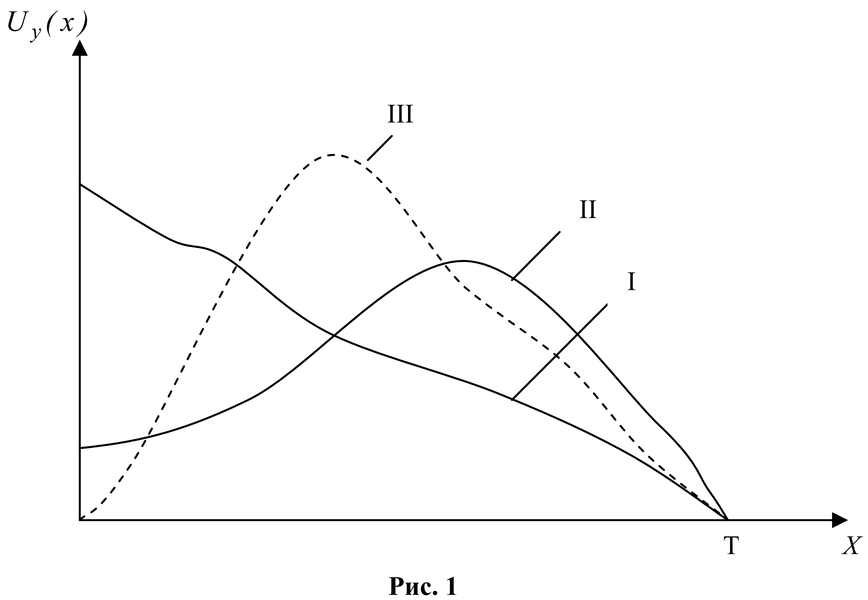

Рис. 1

Розглянемо функції $U_y(x)$ для індивідуумів II та III типів. Обидві вони зростають за змінною x до деякого максимального значення, а потім спадають до нуля (при $x \in [l, T]$ для функції типу II і при $x \in [r, T]$ для функції типу III) аналогічно функції типу I. Припустимо, що рівень добробуту індивідуума монотонно зростає при збільшенні рівня споживання, тобто, що

$$u(y_1, ..., y_e^1, ..., y_n, x) > u(y_1, ..., y_e^2, ..., y_n, x)$$

при $y_e^1 > y_e^2$. Тоді в просторі e-го матеріального блага і праці можна побудувати криві байдужості (див. рис. 2). На цьому рисунку на кривій байдужості 1 зображено дві точки, для кожної з яких вказано чотири області. Область А містить абсолютно гірші співвідношення (x, y_e) порівняно з точкою x, а область С – абсолютно гірші. Крива байдужості проходить через області В і D. Крива байдужості 2 відповідає співвідношенням "споживання – праця", які є більш переважаючі у порівнянні з кривою 1, а 3 – порівняно з кривими 1 і 2.

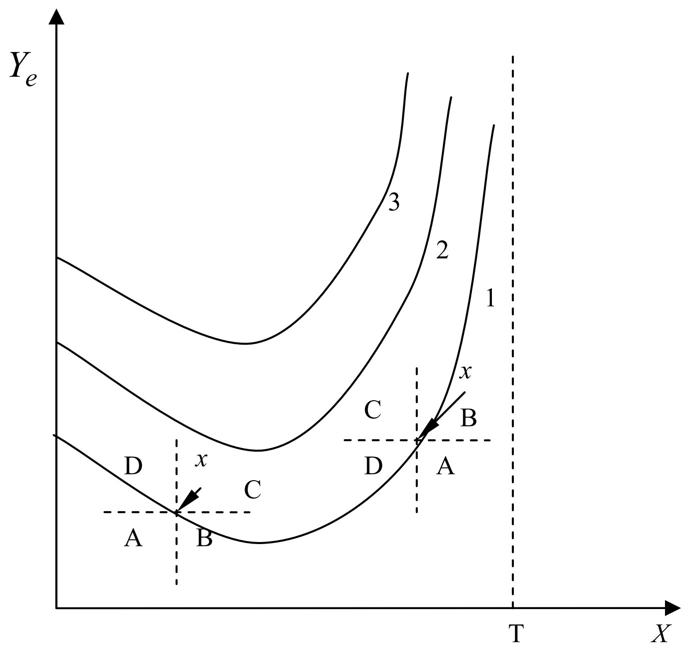

Рис. 2

У загальному випадку кожний індивідуум прагне максимізації добробуту. Тому він повинен вибрати як величину трудової активності, так і обсяги споживчих товарів таким чином, щоб максимізувати функцію корисності (1) при виконанні балансу розходів і доходу. Причому при розрахунку доходу необхідно врахувати податкові відрахування. Отже, отримаємо таку модель математичного програмування, яка є узагальненням відомої моделі індивідуального споживача [4, 6]

$$u(y, x) \xrightarrow[y,x]{} max, \ \ py \le (1-\gamma)qx; \ \ y \ge 0, x \ge 0, \tag{3}$$

де p – вектор цін на спожиті товари; q – оплата одиниці праці; γ – середня податкова ставка.

Однак метою податкової політики держави в цілому, області чи іншої територіальної одиниці на якій перебуває індивідуум є максимізація відрахувань до Центру. У випадку однорідності індивідуумів, задача вибору оптимального γ буде такою:

$$\varphi(\gamma) = q\gamma\, x(\gamma) \xrightarrow[\gamma]{} \max; \tag{4}$$

$$0 \le \gamma \le 1, \quad \gamma \in Q, \tag{5}$$

де $(y(\gamma), x(\gamma))$ – оптимальний розв’язок задачі (3); Q – множина тих γ, для яких модель (3) є сумісною.

Для спрощення викладу наступного матеріалу припустимо, що цільова функція описує переваги індивідуума на парі “доход – праця”, тобто визначена на двох змінних – прибуток y і витрати праці x. Отримані результати і їх інтерпретація при цьому принципово не зміняться.

Розв’язувати розглянуті задачі в загальному випадку досить складно. О. Ястремський [9] подає розв’язок цих задач в явному виді у випадку, коли ступінь переваги поєднання “доход – праця” описано аналогом функції споживання Р.Стоуна, а саме:

$$u(y,x) = (y-a)^{\alpha}(T-x)^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1, \tag{6}$$

де a – мінімальний доход; T – граничнодопустимі затрати праці.

Будемо шукати розв’язки цих задач також для конкретних видів функції $u(y, x)$, але таких, які характеризують поведінку індивідуумів типів II чи III. Графіки обох цих функцій мають максимум за змінною x на проміжку [0; T].

Зупинимось спочатку на випадку, коли праця до визначеної межі є задоволенням, тобто на індивідуумах, поведінку яких ми віднесли до типу II з розглянутих. Функцію корисності в цьому випадку можна подати у такому виді

$$u(y,x) = (y-a)^{\alpha}(T-x)^{1-\alpha}(x+c)^{\beta}, \quad 0<\alpha<1, \ \beta>0, \tag{7}$$

де параметри a і T мають цей же зміст, що й у формулі (6). Величини параметрів α, β і c залежать від виду функції корисності для даного індивідуума. Аналогічно з (6) область визначення функції (7) задається нерівностями

$$y \ge a, \quad 0 \le x \le T, \quad c \le 0. \tag{8}$$

Щоб визначити властивості функції (7), знайдемо її частинні похідні за змінними y та x при $y>a$ і $0<x<T$

$$u'_y = \alpha(y-a)^{\alpha-1}(T-x)^{1-\alpha}(x+c)^{\beta} > 0;$$

$$u'_x = ((\alpha-1)(x+c)+\beta(T-x))(y-a)^{\alpha}(T-x)^{-\alpha}(x+c)^{\beta-1}.$$

Перша з цих похідних завжди додатна. Її можна інтерпретувати як граничний ефект від отримання додаткового доходу. Частинна похідна за змінною x змінює свій знак у точці

$$x^* = \frac{\beta T-(1-\alpha)c}{1-\alpha+\beta}. \tag{9}$$

При $x<x^*$ ця похідна додатна і при $x>x^*$ – від’ємна. Величину $|u'_x|$ при $x>x^*$ можна інтерпретувати як граничні втрати від підвищення трудової активності.

Розглянемо частковий випадок формулу, яка задає функцію корисності $u(y, x)$. Нехай $\beta = 1-\alpha$, тоді формула (7) набуде вигляду

$$u(y,x) = (y-a)^{\alpha}\left(Tc+(T-c)x-x^2\right)^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1, \tag{10}$$

а $x^* = (T-c)/2$.

Надалі потрібно буде вміти знаходити оптимальний план задачі математичного програмування, в якості функції мети якої є функція корисності (10). Тому розглянемо модель максимізації ступеня переваги поєднання “доход – праця”, яка описується цією функцією корисності,

$$u(y,x) = (y-a)^{\alpha}\left(Tc+(T-c)x-x^2\right)^{1-\alpha} \to max; \tag{11}$$

$$y \le qx; \tag{12}$$

$$y \ge a, \quad 0 \le x \le T. \tag{13}$$

Очевидним є необхідність перевищення заробітку при максимальній трудовій активності над мінімальним доходом. Тому достатньою умовою сумісності обмежень (12), (13) є виконання нерівності

$$Tq < a. \tag{14}$$

Враховуючи властивості цільової функції, складові її оптимального плану можна визначити в явному вигляді. Для пошуку значення показника витрат праці x отримаємо таке квадратне рівняння:

$$(1+\delta)qx^2 - (2a\delta + (T-c)q)x + (a(T-c)\delta - Tcq(1-\delta)) = 0, \tag{15}$$

де $\delta = 1-\alpha$.

Дискримінант квадратного рівняння (15) дорівнюватиме

$$D = 4a^2\delta^2 + (T-c)^2 q^2 + 4(1-\delta^2)Tcq^2 - 4a(T-c)q\delta^2, \tag{16}$$

Якщо цей дискримінант більший чи рівний нулю, то корені цього рівняння можна визначити за формулою

$$x_{1,2}^* = \frac{2a\delta + (T-c)q \pm \sqrt{D}}{2q(1+\delta)}. \tag{17}$$

Для існування розв'язку рівняння (15) крім невід'ємності дискримінанта (16) має виконуватись умова, що хоча б одне з чисел x_1^* чи x_2^* має задовольняти умову (13).

На підставі знайденої складової x^* оптимального плану (x^*, y^*) задачі (11)–(13) знайдемо значення складової y^* за формулою

$$y^* = qx^*. \tag{18}$$

Запишемо тепер модель визначення оптимальної ставки оподаткування з урахуванням функції корисності індивіда, яка має вигляд (10).

$$\varphi(\gamma) = q\gamma\, x(\gamma) \xrightarrow[\gamma]{} max, \quad 0 \le \gamma \le 1; \tag{19}$$

$$y(\gamma) \ge a, \quad x(\gamma) \le T; \tag{20}$$

$$(y(\gamma), x(\gamma)) = arg\max_{y,x}\Big\{u(y,x) = (y-a)^\alpha \left(Tc + (T-c)x - x^2\right)^{1-\alpha}:$$

$$y \le (1-\gamma)qx,\ y \ge a,\ 0 \le x \le T\Big\}. \tag{21}$$

Розв'язок задачі (21) шукаємо аналогічно до розв'язку задачі (11)–(13). Після цього знаходимо розв'язок загальної задачі (19)–(21).

Пошук оптимальної ставки оподаткування для індивідуумів III типу, тобто для яких праця є необхідністю, можна знайти аналогічно використовуючи розглянуті моделі, поклавши в них $c = 0$. Функція корисності (7) в цьому випадку матиме вигляд

$$u(y,x) = (y-a)^\alpha (T-x)^{1-\alpha} x^\beta, \quad 0 < \alpha < 1,\ \beta > 0, \tag{22}$$

а задача (21) буде такою:

$$(y(\gamma), x(\gamma)) = arg\max_{y,x}\Big\{u(y,x) = (y-a)^\alpha \left(Tx - x^2\right)^{1-\alpha}:$$

$$y \le (1-\gamma)qx,\ y \ge a,\ 0 \le x \le T\Big\}. \tag{23}$$

Розв'язок останньої задачі шукаємо аналогічно до розв'язку задачі (11)–(13), після чого знаходимо розв'язок загальної задачі (19), (20), (23).

Таким чином, запропоновані в роботі оптимізаційні моделі математичного програмування доцільно застосовувати для визначення оптимальної ставки оподаткування працівників, підприємців та інших суб'єктів господарської діяльності. Ці моделі будуть корисними керівним державним органам при виробленні податкової політики, яка б з одного боку сприяла збільшенню податкових надходжень держави, а з іншого, не була б непосильним тягарем для господарських суб'єктів і не спонукала переходу їх в тіньовий сектор економіки.

В подальших дослідженнях варто було б розробити моделі визначення оптимальної ставки оподаткування з урахуванням диференціації індивідуумів за оплатою праці, аналогічної моделі з дотаціями, подібної моделі в стохастичній постановці та в постановці за умов невизначеності.

1. *Балацкий Е.В.* Анализ влияния налоговой нагрузки на экономический рост с помощью производственно-институциальных функций // Проблемы прогнозирования. – 2003. – № 2. – С. 88–105.
2. *Балацкий Е.В., Гусев А.* // Общество и экономика. – 2003. – № 3. – С. 80–101.
3. *Гаврилец Ю.Н.* Об использовании функции полезности в экономическом анализе // Экономика и математические методы. – 1988. – Т. 24. – № 5. – С. 781–791.
4. *Гранберг А.Г.* Моделирование социалистической экономики. – М.: Экономика, 1988. – 839 с.
5. *Мовшович С.М., Соколовский Л.Е.* Выпуск, налоги и кривая Лаффера // Экономика и математические методы. – 1994. – Т. 30. – № 3. – С. 129–141.
6. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972. – 519 с.
7. *Приймак В.І.* Трудовий потенціал і механізми його реалізації в регіоні: Монографія. – Львів: ВЦ ЛНУ імені Івана Франка, 2002. – 383 с.
8. *Юринець В.Є., Лондар С.Л.* Розрахунок параметрів кривої бюджетних надходжень для української економіки в 1999 році // Соціально-економічні дослідження у перехідний період (Щорічник наукових праць). Випуск XXIV / НАН України. Інститут регіональних досліджень. – Львів, 2001 . – С. 409–416.
9. *Ястремский А.И.* Модель оптимизации норматива отчислений // Исследование операций и АСУ (Республиканский межведомственный сборник). – К.: Лыбидь, 1990. – Вып. 36. – С. 38–51.
10. *Buchanan J.M., Dwight L.R.* Politics, Time and the Laffer Curve // J. of Political Economy. – 1982. – Vol. 90. – № 4.
11. *Monissen H.G.* Explorations of the Laffer Curve // (http: //www.investopedia.com/offsite.asp? URL=http://www.gmu.edu/jbc/fest/files/Monissen.htm).

MATHEMATICAL MODELS OF DEFINITION OF THE OPTIMUM RATE OF THE TAXATION

V. Pryimak

Ivan Franko National University of Lviv

It is constructed economic-mathematical models of definition of the optimum rate of the taxation of individuals for which work as independent value is necessity or to a certain limit pleasure. Ways of a finding the decision of the received problems of mathematical programming is offered.

Key words: optimum rate of the taxation.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАВКИ НАЛОГООБЛОЖЕНИЯ

В. Прыймак

Львовский национальный университет имени Ивана Франко

Построены экономико-математические модели определения оптимальной ставки налогообложения индивидуумов, для которых труд как самостоятельная ценность является необходимостью или к определенной границе удовольствием. Предложены пути нахождения решения полученных задач математического программирования.

Ключевые слова: оптимальная ставка налогообложения, индивидуальный потенциал.