

Ряди динаміки.
Розв'язування типових задач
Задача 1

Дані про обсяги виробництва продукції наступні:

Роки	2000	2001	2002	2003
Обсяги виробництва продукції, тис.грн.	2800	3200	3800	3250

Визначити: ланцюгові, базові та середні характеристики ряду динаміки.

Результати оформити у вигляді таблиці.

Формули для обчислення характеристик наступні:

Абсолютний ланцюговий приріст розраховується за формулою: $\Delta_i^{\lambda} = y_i - y_{i-1}$;

абсолютний базовий приріст - $\Delta_i^{\beta} = y_i - y_0$;

темп зростання ланцюговий - $T_{zp}^{\lambda} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100\%$;

темп зростання базовий - $T_{zp}^{\beta} = \frac{y_i}{y_0} \cdot 100\%$;

темп приросту ланцюговий - $T_{np}^{\lambda} = \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} = T_{zp}^{\lambda} - 100\%$;

темп приросту базовий - $T_{np}^{\beta} = \frac{y_i - y_0}{y_0} = T_{zp}^{\beta} - 100\%$;

абсолютне значення 1% приросту - $\Delta_i^{1\%} = \frac{\Delta_i^{\lambda}}{T_{np}^{\lambda}} = \frac{y_{i-1}}{100}$;

середній абсолютний приріст - $\bar{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^{\lambda}}{n} = \frac{\Delta_i^{\beta}}{n}$, де n – кількість ланцюгових абсолютних приростів;

середній темп зростання - $\bar{T}_{zp} = \sqrt[n-1]{T_{zp1} \times T_{zp2} \times \dots \times T_{zpn}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$, n – кількість рівнів ряду;

середній темп приросту: $\bar{T}_{np} = \bar{T}_{zp} - 100\%$.

Результати розрахунків оформимо у вигляді таблиці:

Роки	y_i	Δ_i^{λ}	Δ_i^{β}	T_{zp}^{λ}	T_{zp}^{β}	T_{np}^{λ}	T_{np}^{β}	$\Delta_i^{1\%}$
2000	2800							
2001	3200	400	400	114,2857	114,2857	14,28571	14,28571	28
2002	3800	600	1000	118,75	135,7143	18,75	35,71429	32
2003	3250	-550	450	85,52632	116,0714	-14,4737	16,07143	38

$$\bar{\Delta} = \frac{400 + 600 - 550}{3} = \frac{450}{3} = 150 \text{ тис.грн.}$$

$$\bar{T}_{zp} = \sqrt[3]{1,14 \cdot 1,19 \cdot 0,86} = \sqrt[3]{1,16} = 1,05 = 105\% ;$$

$$\bar{T}_{np} = 105 - 100 = 5\%$$

Висновок: обсяг виробництва щороку зростає на 150 тис.грн., або на 5%.

Задача 2.

Дані про динаміку зернових культур наступні:

Рік	Урожайність ц/га.
1986	15,4
1987	17,3
1988	19,1
1989	18,5
1990	20,4
1991	23,6
1992	25,4
1993	27,1
1994	24,3
1995	25,9
1996	26,8
1997	27,5
1998	28,3
1999	29,3
2000	30,0
Разом	358,9

Визначте:

- 1) параметри лінійного рівняння, що описує динаміку урожайності зернових культур;
- 2) зробіть прогноз на 2009 рік.

Розв'язування:

Параметри рівняння тренду a_0 та a_1 можна визначити з системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n t_i + a_1 \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i t_i \end{cases}$$

Система рівнянь спроститься, якщо початок відліку часу $t=0$ перенести в середину динамічного ряду. В даній задачі кількість рівнів ряду непарна $n=15$, тоді змінній t можна надати наступні значення: -7,-6,-5,-4,-3,-2,-

1,0,1,2,3,4,5,6,7. У даному випадку $\sum_{i=1}^n t_i = 0$, тому система набуде наступного вигляду:

$$\begin{cases} a_0 n = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i t_i \end{cases}$$

Звідси:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n},$$

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2}.$$

Розрахункові дані для аналітичного вирівнювання динамічного ряду урожайності зернових культур за лінійним трендом:

Рік	Урожайність ц/га.	t_i	t_i^2	$y_i t_i$	$y = a_0 + a_1 t$
1990	15,4	-7	49	-107,8	16,95417
1991	17,3	-6	36	-103,8	17,95024
1992	19,1	-5	25	-95,5	18,94631
1993	18,5	-4	16	-74	19,94238
1994	20,4	-3	9	-61,2	20,93845
1995	23,6	-2	4	-47,2	21,93452
1996	25,4	-1	1	-25,4	22,9306
1997	27,1	0	0	0	23,92667
1998	24,3	1	1	24,3	24,92274
1999	25,9	2	4	51,8	25,91881
2000	26,8	3	9	80,4	26,91488
2001	27,5	4	16	110	27,91095
2002	28,3	5	25	141,5	28,90702
2003	29,3	6	36	175,8	29,9031
2004	30	7	49	210	30,89917
Разом	358,9	0	280	278,9	358,9

Отримаємо наступні параметри рівняння тренду:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{358,9}{15} = 23,92,$$

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2} = \frac{278,9}{280} = 0,996.$$

Рівняння тренду буде наступне:

$$y = 23,92 + 0,996t .$$

Згідно розрахункової таблиці бачимо, що сума рівнів ряду дорівнює сумі рівнів ряду розрахованих на основі аналітичного вирівнювання, отже згладжування ряду динаміки виконано вірно.

Здійснимо прогноз урожайності зернових культур на 2009 рік:

$$y_{2009}^I = 23,92 + 0,996 \cdot 12 = 35,87.$$

Завдання для самостійної роботи:

Завдання розв'язати відповідно до порядкового номеру у списку групи – к.

Задачі

Завдання 1. Маємо дані виробництва продукції промисловим підприємством за 1990- 1997 рр.:

Роки	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Валова продукція, тис. шт.	5565,1	5420,3+ к	4652,8	3250,7	3846,6	3923,3	4012,5	3785,8

Обчислити відносні величини динаміки - а) базовим методом (відносно 1999 р.); б) ланцюговим методом.

Завдання 2. Використовуючи взаємозв'язок характеристик динаміки, визначити обсяги виробництва продукції та показники його динаміки.

Роки	Виробництво продукції, тис. грн.	Базові характеристики		
		Абсолютний приріст, тис. шт.	Темп зростання, %	Темп приросту, %
2002	300	х	х	х
2003				6
2004		28		
2005			101+к	
2006				2

Завдання 3. Виробництво продукції хімічно-лісового комплексу характеризується такими даними, тис. т.

Рік	Хімічні волокна і нитки	Рік	Синтетичні смоли та пластмаси
2000	161	2000	710
2001	165	2001	772
2002	177	2002	781+к
2003	188	2003	797
2004	192	2004	829
2005	193	2005	838
2006	195	2006	846

Для кожного ряду динаміки: 1) описати тенденцію зростання лінійним трендом; 2) обчислити параметри трендових рівнянь, дати їм економічну інтерпретацію; 3) припускаючи, що виявлена тенденція збережеться в найближчому майбутньому, визначити очікуваний рівень виробництва в 2007 і 2008 рр.

в) середній темп приросту;
приросту.

г) абсолютне значення 1%

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) в; 4) г.

10. Середній темп зростання обчислюють за формулою (n – кількість рівнів ряду):

а) $\overline{T}_{zp} = \sqrt[n-1]{T_{zp1} \times T_{zp2} \times \dots \times T_{zpn}}$;

б) $\overline{T}_{zp} = \sqrt[n]{T_{zp1} \times T_{zp2} \times \dots \times T_{zpn}}$

в) $\overline{T}_{zp} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$;

г) $\overline{T}_{zp} = \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_1}}$.

Відповідь: 1) а, в; 2) а, г;

3) б, в;

4) б, г.

Індекси
Розв'язування типових задач
Задача 1

Дані про продаж соняшникової олії в 2004, 2005 роках наступні:

Марка	2004 рік		2005 рік	
	Обсяг, тис.л.	Ціна грн./л	Обсяг, тис.л	Ціна грн./л
Олейна	210	5,2	265	5,8
Чумак	350	5,1	337	5,75
Стожар	285	5,3	310	5,5

Визначити:

а) індивідуальні індекси цін і фізичного обсягу реалізації олії марки «Чумак»;

б) загальний індекс товарообороту;

в) загальний індекс фізичного обсягу товарообороту;

г) загальний індекс цін;

д) абсолютний приріст – всього і в тому числі за рахунок зміни цін і обсягів продаж

а) Індивідуальні індекси цін розраховують за формулою: $i_p = \frac{p_1}{p_0}$, де

p_1, p_0 - це ціна товару відповідно у поточному і базовому періоді.

Відповідно індивідуальний індекс цін олії марки «Чумак» становить:

$$i_p = \frac{5,75}{5,1} = 1,127, \text{ тобто ціни на олію марки «Чумак» зросли на } 12,7 \%$$

Індивідуальний індекс фізичного обсягу розраховується за формулою:

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}, \text{ де } q_1, q_0 - \text{ обсяг реалізації у поточному періоді та в періоді взятому за}$$

базу порівняння.

Індивідуальний індекс фізичного обсягу становить:

$$i_q = \frac{337}{350} = 0,96, \text{ тобто обсяги продажі олії марки «Чумак» скоротилися на } 4\%.$$

б) загальний індекс товарообороту розраховується за формулою:

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}, \text{ для нашого прикладу він становитиме:}$$

$$I_{pq} = \frac{5,8 \cdot 265 + 5,75 \cdot 337 + 5,5 \cdot 310}{5,2 \cdot 210 + 5,1 \cdot 350 + 5,3 \cdot 285} = 1,18;$$

в) загальний індекс фізичного обсягу дорівнює:

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{265 \cdot 5,2 + 337 \cdot 5,1 + 310 \cdot 5,3}{210 \cdot 5,2 + 350 \cdot 5,1 + 285 \cdot 5,3} = 1,08;$$

в) загальний індекс цін становить:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{5,8 \cdot 265 + 5,75 \cdot 337 + 5,5 \cdot 310}{5,2 \cdot 265 + 5,1 \cdot 337 + 5,3 \cdot 310} = 1,10.$$

Абсолютний приріст товарообороту становить:

$$\Delta_{pq} = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = 5179 - 4387 = 792;$$

у тому числі товарооборот зріс за рахунок цін:

$$\Delta_p = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 5179 - 4739 = 440;$$

за рахунок зміни фізичного обсягу товарооборот зріс на наступну величину:

$$\Delta_q = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 4739 - 4387 = 352.$$

$$I_{pq} = I_p \cdot I_q; 1,18 = 1,1 \cdot 1,08; \Delta_{pq} = \Delta_p + \Delta_q; 792 = 440 + 352.$$

Висновок: Загальний товарооборот зріс на 792 тис.грн., або на 18% у 2005 році порівняно з 2004 роком, в тому числі за рахунок цін на 10%, або на 440 тис.грн, а за рахунок зміни обсягу продаж зріс на 8%, або на 352 тис.грн.

Задача 2

Дані про український експорт м'яса та субпродуктів в 2005 році:

Код товару	Загальна вартість експорту, млн. USD		Темп приросту, %	
	I півріччя	II півріччя	Цін	Обсягу продажу
A	26	22	8	-5
B	16	35	17	0
B	17	31	0	12

Обчислити середньозважені індекси цін та середньозважений індекс обсягу продаж.

Середньозважений індекс цін обраховується за формулою середнього гармонійного індексу:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \frac{p_1 q_1}{i_p}}, \text{ де } i_p = \frac{p_1}{p_0} - \text{індивідуальний індекс цін.}$$

$$\text{Отже, } I_p = \frac{22 + 35 + 31}{\frac{22}{1,08} + \frac{35}{1,17} + \frac{31}{1}} = 1,08; \text{ тобто ціни на експорт у другому}$$

півріччі порівняно з першим зросли на 8%.

Середньозважений індекс обсягу продажу розраховується за формулою:

$$I_q = \frac{\sum i_q q_0 p_0}{\sum q_0 p_0}, \text{ де } i_q = \frac{q_1}{q_0} - \text{індивідуальний індекс фізичного обсягу.}$$

$$\text{Відповідно, } I_q = \frac{0,95 \cdot 26 + 1 \cdot 16 + 1,12 \cdot 17}{26 + 16 + 17} = 1,01, \text{ тобто обсяг продаж у}$$

другому півріччі порівняно з першим зріс на 1%.

Завдання для самостійної роботи
Задачі

Завдання розв'язати відповідно до порядкового номеру у списку групи – к.

Завдання 1. Дано наступні дані про реалізацію картоплі на ринках міста:

Ринок	Січень		Лютий	
	ціна за 1 кг., грн.	продано, ц.	ціна за 1 кг., грн.	продано, ц.
1	2,2	24,5	2,4	21,9
2	2,0	10+к	2,1	18,8
3	1,9	32,0	1,9	37,4

Обчисліть: а) індекс цін змінного складу; б) індекс цін фіксованого складу; в) індекс структурних зрушень.

Завдання 2. Динаміка цін і тарифів на окремі види послуг за два роки характеризується даними:

Група товарів	Обсяг сплачених послуг у поточних цінах періоду, млн. грн.		Індивідуальний індекс цін і тарифів
	базисного	поточного	
Пасажирський транспорт	20+к	60	1,5
Зв'язок	16	18	1,2

Визначте:

- а) зведений індекс цін і тарифів;
- б) зведений індекс фізичного обсягу за умови, що загальний обсяг сплачених послуг збільшився на 30%.

Результати поясніть.

Тести

1. Порівняння показника будь-якого періоду із показником базового періоду – це:

- а) базовий індекс;
- б) ланцюговий індекс;
- в) індивідуальний індекс;
- г) агрегатний індекс.

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) а, г; 4) ваш варіант.

2. При побудові індексу, ваги якого є якісним показником, їх фіксують на рівні періоду:

- а) базового;
- б) поточного;

При побудові індексу, ваги якого є кількісним показником, їх фіксують на рівні періоду:

- в) базового;
- г) поточного;

Відповідь: 1) а, в; 2) а, г; 3) б, г; 4) ваш варіант.

$$3. \frac{q_1}{q_0}, \frac{q_2}{q_0}, \frac{q_3}{q_0}, \dots, \frac{q_n}{q_0} - \text{це система індексів:}$$

- а) індивідуальних, ланцюгових;
- б) індивідуальних, базових;
- в) агрегатних, ланцюгових;
- г) агрегатних, базових.

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) а, г; 4) ваш варіант.

4. Що показує базовий агрегатний індекс фізичного обсягу?

- а) зміну обсягу одного виду продукції у звітному періоді порівняно з попереднім;
- б) зміну обсягу декількох видів продукції у звітному періоді порівняно з базовим;
- в) зміну одного виду продукції у звітному періоді порівняно з базовим;
- г) зміну декількох видів продукції у звітному періоді порівняно з попереднім.

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) в; 4) г.

5. Що показує ланцюговий агрегатний індекс ціни?

- а) зміну обсягу одного виду продукції у звітному періоді порівняно з попереднім;
- б) зміну обсягу декількох видів продукції у звітному періоді порівняно з базовим;
- в) зміну одного виду продукції у звітному періоді порівняно з базовим;
- г) зміну декількох видів продукції у звітному періоді порівняно з попереднім.

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) в; 4) г.

$$6. \frac{\sum p_1 \cdot q_1}{\sum p_0 \cdot q_1}, \frac{\sum p_2 \cdot q_2}{\sum p_0 \cdot q_2}, \frac{\sum p_3 \cdot q_3}{\sum p_0 \cdot q_3}, \dots, \frac{\sum p_n \cdot q_n}{\sum p_0 \cdot q_n} - \text{це система:}$$

- а) ланцюгових агрегатних індексів ціни;
- б) ланцюгових агрегатних індексів фізичного обсягу;
- в) базових агрегатних індексів фізичного обсягу;
- г) базових агрегатних індексів ціни.

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) в; 4) г.

7. Абсолютну зміну вартості продукції за рахунок зміни ціни обчислюємо за формулою:

- а) $\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1$;
- б) $\sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0$;
- в) $\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0$;
- г) $\sum p_1 q_0 - \sum p_0 q_0$.

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) а,г; 4)ваш варіант.

8. Системою ланцюгових агрегатних індексів фізичного обсягу є:

- а) $\frac{\sum p_0 \cdot q_1}{\sum p_0 \cdot q_0}$; $\frac{\sum p_0 \cdot q_2}{\sum p_0 \cdot q_0}$; $\frac{\sum p_0 \cdot q_3}{\sum p_0 \cdot q_0}$; ... $\frac{\sum p_0 \cdot q_n}{\sum p_0 \cdot q_0}$;
- б) $\frac{\sum p_0 \cdot q_1}{\sum p_0 \cdot q_0}$; $\frac{\sum p_1 \cdot q_2}{\sum p_1 \cdot q_1}$; $\frac{\sum p_2 \cdot q_3}{\sum p_2 \cdot q_2}$; ... $\frac{\sum p_{n-1} \cdot q_n}{\sum p_{n-1} \cdot q_{n-1}}$;
- в) $\frac{\sum t_0 \cdot q_1}{\sum t_0 \cdot q_0}$; $\frac{\sum t_1 \cdot q_2}{\sum t_1 \cdot q_1}$; $\frac{\sum t_2 \cdot q_3}{\sum t_2 \cdot q_2}$; ... $\frac{\sum t_{n-1} \cdot q_n}{\sum t_{n-1} \cdot q_{n-1}}$.
- г) $\frac{\sum z_0 \cdot q_1}{\sum z_0 \cdot q_0}$; $\frac{\sum z_1 \cdot q_2}{\sum z_1 \cdot q_1}$; $\frac{\sum z_2 \cdot q_3}{\sum z_2 \cdot q_2}$; ... $\frac{\sum z_{n-1} \cdot q_n}{\sum z_{n-1} \cdot q_{n-1}}$;

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) в; 4)г.

9. Системою базових агрегатних індексів витрат робочого часу на виготовлення одиниці продукції (вагою індексу є кількість виробленої продукції) є:

- а) $\frac{t_1}{t_0}$; $\frac{t_2}{t_0}$; $\frac{t_3}{t_0}$; ... $\frac{t_n}{t_0}$;
- б) $\frac{\sum t_1 \cdot q_1}{\sum t_0 \cdot q_1}$; $\frac{\sum t_2 \cdot q_2}{\sum t_0 \cdot q_2}$; $\frac{\sum t_3 \cdot q_3}{\sum t_0 \cdot q_3}$; ... $\frac{\sum t_n \cdot q_n}{\sum t_0 \cdot q_n}$.
- в) $\frac{\sum t_0 \cdot q_1}{\sum t_0 \cdot q_0}$; $\frac{\sum t_0 \cdot q_2}{\sum t_0 \cdot q_0}$; $\frac{\sum t_0 \cdot q_3}{\sum t_0 \cdot q_0}$; ... $\frac{\sum t_0 \cdot q_n}{\sum t_0 \cdot q_0}$;
- г) $\frac{\sum t_1 \cdot q_1}{\sum t_0 \cdot q_1}$; $\frac{\sum t_2 \cdot q_2}{\sum t_1 \cdot q_2}$; $\frac{\sum t_3 \cdot q_3}{\sum t_2 \cdot q_3}$; ... $\frac{\sum t_n \cdot q_n}{\sum t_{n-1} \cdot q_n}$;

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) в; 4)г.

10.Індекс споживчих цін в 2004 році в Україні (у % до попереднього місяця): січень – 101,4; лютий – 100,4; березень – 100,5. У березні 2004 р. порівняно із груднем 2003 р. споживчі ціни змінились на:

Відповідь: 1) +0,9%; 2) +2,3%; 3) +0,1%; 4) даних недостатньо.

Ряди розподілу.

Розв'язування типових задач.

Задача 1.

Відомі такі дані про розподіл підприємств регіону за чисельністю зайнятих (осіб):

Чисельність зайнятих осіб	Кількість підприємств, %
До 500	37
500-1000	33
1000-1500	17
1500-2000	8
2000-2500	4
2500і більше	1
Разом	100

Необхідно визначити середню чисельність зайнятих на підприємстві; середнє квадратичне відхилення; квадратичний коефіцієнт варіації; коефіцієнт асиметрії.

Розв'язування:

Заповнимо розрахункову таблицю .:

Чисельність зайнятих осіб	Кількість підприємств, %	Середини інтервалів - x_i	$x_i f_i$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
До 500	37	250	9250	11603200
500-1000	33	750	24750	118800
1000-1500	17	1250	21250	3291200
1500-2000	8	1750	14000	7068800
2000-2500	4	2250	9000	8294400
2500і більше	1	2750	2750	3763600
Разом	100		81000	34140000

Отже середня чисельність зайнятих на одному підприємстві становить:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{81000}{100} = 810 \text{ (ос)};$$

Середньоквадратичне відхилення дорівнює:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}} = \sqrt{\frac{34140000}{100}} = 584;$$

Квадратичний коефіцієнт варіації дорівнює:

$$V_{\sigma} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{584}{810} = 0,72;$$

Моду обчислимо за формулою:

$$Mo = x_{Mo} + h \cdot \frac{f_{Mo} - f_{Mo-1}}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (f_{Mo} - f_{Mo+1})},$$

де x_{Mo} - нижня межа модального інтервалу; h - крок модального інтервалу; f_{Mo} , f_{Mo-1} , f_{Mo+1} - частоти (частки) модального, передмодального та після модального інтервалів.

Мода дорівнює:

$$Mo = 0 + 500 \cdot \frac{(37 - 0)}{(37 - 0) + (37 - 33)} = 451 (\text{ос});$$

Коефіцієнт асиметрії дорівнює:

$$As = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma} = \frac{810 - 451}{584} = 0,61 (\text{правостороння асиметрія}).$$

Задача 2.

Розподіл студентів групи за оцінками з іспиту зі статистики:

Оцінка	Кількість студентів	
	Дівчата	Хлопці
2	1	2
3	6	4
4	5	2
5	4	1

Визначити: групові дисперсії, середню з групових дисперсію, міжгрупову дисперсію, загальну дисперсію оцінок студентів групи зі статистики.

Дисперсія для оцінок дівчат становить:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_1)^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_{i1}} = \frac{(2 - 3,75)^2 1 + (3 - 3,75)^2 6 + (4 - 3,75)^2 5 + (5 - 3,75)^2 4}{16} = 0,812;$$

Дисперсія для оцінок хлопців становить:

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_2)^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_{i2}} = \frac{(2 - 3,22)^2 2 + (3 - 3,22)^2 4 + (4 - 3,22)^2 2 + (5 - 3,22)^2 1}{9} = 0,472;$$

Середню з внутрішньогрупових дисперсій можна обчислити наступним чином:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^m \sigma_j^2 f_j}{\sum_{j=1}^m f_j} = \frac{0,812 \cdot 16 + 0,472 \cdot 9}{25} = 0,689;$$

Міжгрупова дисперсія обчислюється за формулою:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - \bar{y})^2 f_j}{\sum_{j=1}^m f_j}, \text{ де } \bar{y}_j \text{ та } \bar{y} - \text{відповідно середня } j\text{-ї групи та загальна}$$

середня для ознаки. Знайдемо $\bar{y} : \bar{y} = \frac{3,75 \cdot 16 + 3,22 \cdot 9}{25} = 3,56$

Отже міжгрупова дисперсія буде становити:

$$\delta^2 = \frac{(3,75 - 3,56)^2 16 + (3,22 - 3,56)^2 9}{25} = 0,137;$$

Загальна дисперсія дорівнює:

$$\sigma^2 = \delta^2 + \sigma^2 = 0,137 + 0,689 = 0,826$$

Завдання для самостійної роботи:

Завдання розв'язати відповідно до порядкового номеру у списку групи – к.

Задачі

Задача 1 На кінець року поточні коефіцієнти ліквідності підприємств-позичальників становили:

Коефіцієнт ліквідності	До 1,5	1,5-1,7	1,7-1,9	1,9-2,1	2,1 і більше	Разом
Частка підприємств, %	5	10+к	20	45	20	100

Визначити характеристики розподілу: середню, моду, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнти варіації та асиметрії.

Задача 2. Відомі дані про розподіл працівників фінансової корпорації за кількістю дітей:

Кількість дітей	Кількість працівників за підрозділами		
	А	Б	В
0	4	7	5
1	4	5	10
2	4	3	3
3	2	1+к	1

Обчисліть: а) внутрішньогрупові дисперсії; б) середню із внутрішньогрупових дисперсій; в) міжгрупову дисперсію; г) загальну дисперсію. Перевірте правило додавання дисперсій. Зробіть висновки.

Тестові завдання :

Завдання 1. Реалізація консервів з терміном вживання характеризується даними:

Термін вживання, міс.	До 3	3-6	6-9	9-12	Разом
Кількість проданих банок, % до підсумку	22	31	34	13	100

Модальним є інтервал: а) від 3 до 6; б) від 6 до 9.

Якщо частку першої групи зменшити на 2%, а частку останньої групи відповідно збільшити, модальний інтервал: в) зміниться; г) не зміниться.

Відповідь: 1) а, в; 2) а, г; 3) б, в; 4) б, г.

Завдання 2. Розподіл проданих на аукціоні держоблігацій за рівнем їх номінальної доходності характеризується даними:

Номінальна доходність облігацій, %	24-28	28-32	32-36	36-40	Разом
Питома вага проданих облігацій, %	15	34	24	27	100

Медіанним є інтервал: а) від 28 до 32; б) від 32 до 36.

Якщо частку першої групи збільшити на 5%, а частку останньої групи відповідно зменшити, медіанний інтервал: в) зміниться; г) не зміниться.

Відповідь: 1) а, в; 2) а, г; 3) б, в; 4) б, г.

Завдання 3. Середньодобовий обсяг виробництва на двох хлібозаводах міста за квітень однаковий – по 30 т. За декадами місяця він розподілився так:

Хлібозавод	Декада		
	1	2	3
№1	31	27	32
№2	25	29	36

Ритмічніше працював: 1) завод №1; 2) завод №2; 3) ритмічність роботи на обох заводах однакова; 4) порівняти ритмічність роботи не можливо.

Завдання 4. Якість орної землі області характеризується даними:

Оцінка землі, балів	До 30	30-40	40-50	50-60	60 і більше	Разом
% до загальної площі	5	25	45	15	10	100

Визначте середнє лінійне відхилення оцінок якості орної землі.

Відповідь: 1) 45; 2) 7; 3) 12; 4) 3.

Завдання 5. Комерційні банки міста видавали кредити терміном до 30 діб під %:

Місяць	Банк				
	А	Б	В	Г	Д
Вересень	40	35	40	30	35
Грудень	30	20	25	20	25

У грудні порівняно з вереснем середня кредитна ставка: а) зменшилась; б) не змінилась.

Варіація кредитної ставки: в) зменшилась; г) не змінилась.

Відповідь: 1) а, в; 2) а, г; 3) б, в; 4) б, г.

Завдання 6. Якщо всі значення ознаки збільшити на певну величину, то дисперсія: 1) збільшиться на таку саму величину; 2) зменшиться на таку саму величину; 3) не зміниться; 4) передбачити зміну дисперсії неможливо.

Завдання 7. За результатами контрольної перевірки жирності молока, визначте дисперсію.

Жирність молока, %	3,6-3,8	3,8-4,0	4,0-4,2	Разом
Кількість проб	12	6	2	20

Відповідь: 1) 0,028; 2) 0,004; 3) 0,018; 4) 0,13.

Завдання 8. За даними американської статистики близько 50% новоутворених підприємств малого та середнього бізнесу банкрутують протягом перших двох років, а 10% існують до 7 років після утворення.

Визначте дисперсію частки підприємств, які існують до семи років.

Відповідь: 1) 0,10; 2) 0,90; 3) 0,09; 4) 0,040.

Завдання 9. За вибіркоvim обстеженням малих підприємств з різною формою власності рівні рентабельності реалізації продукції диференціюються таким чином:

Форма власності	Кількість підприємств	Рентабельність реалізації продукції, %
Державна	4	16; 22; 20; 18
Приватна	6	25; 31; 33; 28; 27; 24

Визначте середню з групових дисперсій рентабельності реалізації продукції.

Відповідь: 1) 7,5; 2) 23,5; 3) 8; 4) 24,4.

Завдання 10. Максимальне значення дисперсії альтернативної ознаки рівне:

а) 0,5;

б) 0,25; в) 1; г) $+\infty$.

*Вибіркові спостереження
Розв'язування типових задач
Задача 1*

З метою визначення швидкості розрахунків із кредиторами однієї фірми була здійснена вибірка 100 платіжних документів, за якими середній термін перерахунку і отримання грошей виявився 27,2 дня з дисперсією 30,25. Кожен десятий платіжний документ був з порушенням терміну розрахунків із кредиторами.

Визначимо середній термін проходження всіх платежів протягом року і частку платежів з порушенням термінів розрахунку з імовірністю 0,954 ($t = 2$).

Гранична похибка для середнього терміну проходження платежів становить:

$$\Delta_{\bar{x}} = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 2 \sqrt{\frac{30.25}{100}} = 1.1 \text{ дня}$$

Це дає підставу стверджувати з імовірністю 0,954, що середній термін проходження платежів протягом року щонайменше 26,3 дня.

$$\bar{x} - \Delta \leq \bar{X} \leq \bar{x} + \Delta;$$

$$27.2 - 1.1 \leq \bar{X} \leq 27.2 + 1.1$$

Для визначення граничної похибки частки потрібно обчислити дисперсію частки:

$$s^2 = p(1 - p) = 0.1(1 - 0.1) = 0.09,$$

де p – частка платежів з порушенням термінів розрахунку
 $p = \frac{10}{100} = 0.1.$

Гранична похибка частки платежів з порушенням терміну оплати

$$\Delta_p = t \sqrt{\frac{s^2}{n}} = 2 \sqrt{\frac{0.09}{100}} = 0.06, \text{ або } 6.0\%.$$

Щодо інтервалу можливих значень частки платежів з порушенням терміну оплати у генеральній сукупності, то межі його досить широкі: від 4,0 до 16,0%:

$$p - \Delta \leq P \leq p + \Delta; 10 - 6.0 \leq P \leq 10 + 6.0$$

Задача 2

На лісовому масиві в 400 га визначається загальний запас деревини. Пробні ділянки — по 0,1 га. За даними попередніх обстежень середнє квадратичне відхилення виходу деревини з 0,1 га становить 3 м³. Скільки пробних ділянок необхідно обстежити, щоб похибка вибірки з імовірністю 0,954 (для якої $t = 2$) не перевищила 1 м³?

Достатній обсяг вибірки пробних ділянок становить: $n = \frac{t^2 \sigma^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 9}{1^2} = 36$.

Завдання для самостійної роботи:

Завдання розв'язати відповідно до порядкового номеру у списку групи – к.

Задача 1. Для визначення оснащення заводів основними виробничими фондами було проведене 10 %-е вибіркє спостереження, у результаті якого отримані наступні дані про розподіл заводів за вартістю основних виробничих фондів:

Середньорічна вартість осн. вир. фондів, млн. грн.	До 2	2-4	4-6	Понад 6	Разом
Число заводів	5	12+к	23	10	50+к

Обчислити:

- з імовірністю 0,997 граничну помилку вибірки і межі, в яких буде знаходитись середньорічна вартість основних виробничих фондів усіх заводів генеральної сукупності;
- з імовірністю 0,954 граничну помилку вибірки при визначенні частки і межі, у яких буде знаходитись питома вага заводів з вартістю основних виробничих фондів понад 4 млн. грн.
- яким повинен бути обсяг вибіркової сукупності за умови, що:
 - гранична помилка вибірки при визначенні середньорічної вартості основних виробничих фондів (з імовірністю 0,957) була б не більшою 0,5 млн. грн.;
 - гранична помилка частки (з імовірністю 0,954) була б не більшою 15%.

Задача 2 Для визначення середньої тривалості телефонної розмови і частки розмов, тривалість яких перевищує 5 хв, вирішено провести вибіркє обстеження методом випадкової вибірки. За даними аналогічних обстежень, середнє квадратичне відхилення становило 3,5 хв, а частка телефонних розмов, тривалість яких перевищувала 5% хв, становила (0,4+0,к).

Скільки телефонних розмов необхідно обстежити для того, щоб з імовірністю 0,954 знайти середню тривалість телефонної розмови з похибкою, що не перевищувала б 30 с, а також частку телефонних розмов, тривалість яких не перевищує 5 хв, з похибкою не більше 5% ?

Тести

1. Сукупність, з якої відбираються елементи для обстеження, - це:
- а) вибіркова сукупність;
 - б) генеральна сукупність;
2. Який зі способів формування вибіркової сукупності передбачає попередню структурування неоднорідної генеральної сукупності та незалежний відбір елементів у кожній складовій частині?
- а) простий випадковий відбір;
 - б) механічний відбір;
 - в) розшарований відбір;
 - г) серійний відбір.

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) в; 4) г.

3. Гранична похибка вибірки – це:
- а) добуток стандартної похибки вибірки і квантилю розподілу ймовірностей;
 - б) сума стандартної похибки вибірки і квантилю розподілу ймовірностей;
 - в) різниця між стандартною похибкою вибірки і квантилем розподілу ймовірностей;
 - г) правильна відповідь не наведена.

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) в; 4) г.

4. Систематична похибка репрезентативності виникає внаслідок:
- а) порушення принципів вибіркового спостереження;
 - б) порушення інструкцій щодо заповнення формулярів;
- Чи можна усунути систематичну похибку вибірки та регулювати її:
- в) так;
 - г) ні;

Відповідь: 1) а, в; 2) а, г; 3) б, в; 4) б, г.

5. Граничну похибку вибірки для безповторного відбору можна визначити за формулою:

а)
$$\Delta_{\bar{x}} = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)};$$

б)
$$\Delta_{\bar{x}} = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} \cdot N$$

в)
$$\Delta_{\bar{x}} = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\text{г) } \Delta_{\bar{x}} = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}$$

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) в; 4) г.

6. Стандартну похибку вибірки для повторного відбору можна визначити за формулою:

$$\text{а) } \mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)};$$

$$\text{б) } \mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\text{в) } \mu = \sqrt{\frac{\sigma}{n}}$$

$$\text{г) } \mu = \sqrt{\frac{\sigma}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) в; 4) г.

7. Нижче наведена формула для визначення чисельності вибірки

$$\text{належить наступному методу відбору } n = \frac{t^2 \sigma^2}{\Delta^2}:$$

- а) повторному;
- б) безповторному;

8. З метою визначення потенціалу ринку планується анкетування населення. Який буде мінімально необхідний обсяг вибірки, щоб гранична похибка вибірки (з ймовірністю 0,997) для середньомісячного розміру покупки не перевищувала 5 гр. од., якщо даними пробних обстежень дисперсія середньомісячного розміру покупок становить 1600?

- а) 576;
- б) 325;
- в) 142;
- г) 4000;

Відповідь: 1) а; 2) б; 3) в; 4) г.

9 Вкажіть вид вибірки в такому обстеженні: при обстеженні бюджету часу студентів було відібрано кожного десятого бакалавра і кожного двадцятого магістра.

- а) простий випадковий відбір;
- б) механічний відбір;
- в) розшарований відбір;
- г) серійний відбір.

10 Вкажіть вид вибірки в такому обстеженні: при обстеженні тривалості служби комп'ютерів у навчальному закладі відбирався кожний третій

комп'ютерний клас.

- а) простий випадковий відбір;
- б) механічний відбір;
- в) розшарований відбір;
- г) серійний відбір