Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

КІНДИБАЛЮК Аркадій Анатолійович

УДК 519.6

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ І ЛІ-АЛГЕБРИЧНИХ ДИСКРЕТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ

01.01.07 – обчислювальна математика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2015

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі дискретного аналізу та інтелектуальних систем у Львівському національному університеті імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Притула Микола Миколайович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
завідувач кафедри дискретного аналізу
та інтелектуальних систем.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Грищенко Олександр Юхимович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри обчислювальної математики;

доктор фізико-математичних наук, старший
науковий співробітник
Подлевський Богдан Михайлович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики імені
Я.С. Підстригача НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу числових методів математичної фізики.

Захист відбудеться «____» _____ 2015 р. о ____ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К. 35.051.07 Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий «____» _____ 2015 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Б.А. Остудін

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. При дослідженні різноманітних математичних моделей сучасного природознавства використовуються як найновіші здобутки з математики, зокрема, таких її розділів як функціональний аналіз, нелінійна математична фізика, диференціальні рівняння, теорія груп та алгебр Лі, диференціальна та алгебрична геометрія, так і сучасні засоби обчислювальної математики і комп’ютерної техніки.

Незважаючи на потужний математичний апарат, для багатьох диференціальних рівнянь, які частіше всього використовуються в якості математичних моделей, не завжди вдається знайти їх точний розв'язок, а отже, виникає потреба у побудові їх наближених розв’язків, і як наслідок, створення нових високоточних обчислювальних схем їх відшукання.

Одним з ефективних таких високоточних методів є Лі-алгебричний метод, який було запропоновано Калоджеро Ф. у 1983 році для розв'язування задачі на власні значення для лінійних диференціальних операторів. У подальшому, у працях Митропольського Ю.О., Прикарпатського А.К., Самойленка В.Г, Притули М.М. та інших цей метод було поширено на лінійні та нелінійні динамічні системи. При цьому дискретизація відповідних задач здійснювалася лише за просторовими змінними.

Тому актуальною задачею є проблема узагальнення згаданого методу з використанням дискретизації також за часовою змінною. При цьому важливе значення має вивчення питання, що стосуються умов його збіжності.

Іншим важливим аспектом побудови обчислювальних схем для чисельного розв'язування задач з великими значеннями коефіцієнтів (задачі з сингулярностями) є стабілізація розв'язку та верифікація побудованих схем. Для стабілізації сингулярно збурених крайових задач в останні десятиліття розвинуто різноманітні підходи, зокрема, такі, як: протипотокові схеми (Hughes T.J.R, Leonard B.P., Mackenzie J.A.), експоненціальні апроксимації методу скінченних елементів (МСЕ) (Савула Я.Г, Шинкаренко Г.А., Hemker P.W.).

Для задач зі змінними коефіцієнтами та наявністю внутрішнього шару використання класичних апроксимацій породжує нестійкість, отже актуальною є задача розробки альтернативних підходів. Крім того, для певних класів динамічних систем не завжди вдається знайти їх точні розв'язки, а тому виникає потреба у розробці засобів верифікації обчислювальних схем, один з яких полягає у використанні законів збереження, що, в свою чергу є нетривіальною задачею.

Закони збереження використовуються для верифікації обчислювальних схем та для знаходження періодичних розв'язків нелінійної динамічної системи на основі редукції Новікова-Богоявленського на інваріантні підмноговиди.

Деякі динамічні системи не володіють достатньою кількістю законів збереження для проведення редукції. Для побудови часткових розв'язків таких

систем доцільно використовувати метод гіперболічних тангенс функцій (Fan E.G., Hereman W., Yusufoğulu E., Bekir E, Goktaş Ü.). Крім того, потребує вивчення низка питань, що стосуються, наприклад, вибору базисних гіперболічних функцій, степеня поліноміального розв'язку, тощо.

Саме розгляду згаданих питань і присвячено дану дисертаційну роботу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертаційної роботи пов’язана з науковими дослідженнями кафедри дискретного аналізу та інтелектуальних систем Львівського національного університету імені Івана Франка. Дисертація виконана в рамках держбюджетних тем: По-66П «Математичні методи дослідження нелінійних динамічних систем, індуктивних методів моделювання даних і задач оптимізації» (номер державної реєстрації теми: 0110U001373, термін виконання: 2010–2011 рр.), По-119П «Методи дослідження нелінійних динамічних систем, задач оптимізації, аналізу даних на основі карт Кохонена» (номер державної реєстрації теми: 0112U001284, термін виконання: 2012–2013 рр.).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка нових високоточних методів побудови наближених розв’язків лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь і крайових задач для них, верифікація цих методів та їх застосування для дослідження конкретних математичних моделей.

Об'єкт дослідження: лінійні та нелінійні динамічні системи, одновимірні та двовимірні сингулярно збурені крайові та початково-крайові задачі адвекції-дифузії та адвекції-дифузії-реакції.

Предмет дослідження: узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій диференціальних рівнянь, кусково-степеневі апроксимації методу скінченних елементів, скінченновимірні інваріантні редукції на локальні інваріантні підмноговиди гамільтонових та бігамільтонових динамічних систем.

Методи дослідження: метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій, метод скінченних елементів, теорія гамільтонових систем, метод редукції Новікова-Богоявленського.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними результатами, що виносяться на захист, є такі:

- визначено умови збіжності узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для динамічних систем;
- побудовано високоточні обчислювальні схеми для рівнянь адвекції та теплопровідності на основі узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій;
- побудовано та проведено верифікацію обчислювальних схем для сингулярно збурених задач адвекції-дифузії з постійними та змінними коефіцієнтами з

використанням кусково-степеневих базисних функцій методу скінченних елементів;

- модифіковано методи та алгоритми для знаходження законів збереження, імплектичних операторів, точних розв'язків солітонного типу та скінченновимірних редукцій нелінійних динамічних систем.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має в основному теоретичний характер. Її результати стосуються подальшого розвитку методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій і методу скінченних елементів, та їх застосування для дослідження математичних моделей, що описують процеси, що пов’язані з міграцією домішок. Результати дисертації можуть використовуватися при читанні спеціальних курсів лекцій з обчислювальних методів математичної фізики та математичного моделювання для студентів вищих навчальних закладів з фізико-математичного напряму.

Запропоновані обчислювальні схеми узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій та методу скінченних елементів подано у вигляді, придатному для розробки універсальних пакетів чисельного розв'язування задач гідродинаміки, метеорології, екології та інших задач.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримано автором самостійно. У працях [1, 3–6] науковому керівнику професору Притулі М.М. належить формулювання задач та аналіз одержаних результатів. У працях [9, 10] професору Шинкаренку Г.А. належить формулювання задач та аналіз одержаних результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на: IV Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики акад. Я.С. Підстригача. (Львів, 24–27 травня 2011 р.), XVII Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 6–7 жовтня 2011 р.), XV Всеукраїнській (X міжнародній) студентській конференції з прикладної математики та інформатики СНКПМІ-2012 (Львів, 5–6 квітня 2012 р.), Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 19–21 квітня 2012 р.), XX міжнародній конференції «Прийняття рішень в умовах невизначеності», PDMU-2012 (Brno, Czech Republic, 17–21 вересня 2012 р.) , International conference dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach (L’viv, 17–21 September 2012 р.), XVIII Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 4–5 жовтня 2012 р.), Третій Всеукраїнській науково-практичній конференції «Сучасні інформаційні технології в економіці, менеджменті та освіті» (Львів, 21 листопада 2012 р.), Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 21–25 травня 2013 р.), XIX Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 3–4 жовтня 2013 р.), IV Всеукраїнській

науково-практичній конференції «Сучасні інформаційні технології в економіці, менеджменті та освіті» (Львів, 20 березня 2014 р.), XX Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 7–9 квітня 2014 р.), VII Міжнародній науковій конференції імені академіка Ляшка І.І. «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 9–10 жовтня 2014 р.), на наукових семінарах Наукового товариства ім. Т. Шевченка (Львів, 2011–2014 рр.), на науковому семінарі кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Київ, 15 жовтня 2014 р.), на наукових семінарах кафедри дискретного аналізу та інтелектуальних систем, кафедри теорії оптимальних процесів, науковому семінарі факультету прикладної математики та інформатики, Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь, кваліфікаційному семінарі Львівського національного університету імені Івана Франка.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 12 наукових працях, з яких 9 статей у фахових наукових виданнях України та 4 статті у закордонних виданнях [4, 6, 7, 11], в тому числі 1 переклад [6]. Результати роботи додатково висвітлені у 13 тезах всеукраїнських і міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, що містять 28 таблиць і 31 рисунок, висновків і списку використаних джерел (114 найменувань). Повний обсяг роботи складає 168 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, відображено зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами та темами, сформульовано предмет і мету досліджень, визначено наукову новизну роботи і практичне значення отриманих результатів, подано відомості з апробації роботи.

У **першому розділі** дисертаційної роботи проведено аналіз актуального стану проблем за тематикою дисертації: проаналізовано застосування методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для побудови високоточних обчислювальних схем, методи стабілізації сингулярно збурених крайових задач для рівняння адвекції-дифузії, методи верифікації обчислювальних схем та алгоритми знаходження законів збереження для нелінійних динамічних систем та побудови скінченновимірних редукцій на інваріантні підмноговиди.

У другому розділі дисертації запропоновано новий високоточний метод побудови наближених розв’язків лінійних динамічних систем на основі узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій, доведено його збіжність, отримано оцінки похибки апроксимації.

Під динамічною системою розуміємо певний об’єкт, для якого визначено поняття стану системи та задано закон еволюції за допомогою диференціального рівняння вигляду $u_t = K[u]$, де K може бути як лінійним, так і нелінійним диференціальним оператором. При цьому важливим питанням є дослідження стаціонарного стану динамічної системи, тобто розв’язків рівняння вигляду $K[u]=0$, оскільки це дозволяє не лише вивчити загальні властивості поведінки динамічної системи, а також врахувати певні специфічні аспекти, які виникають під час чисельного дослідження таких систем.

Узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій полягає у використанні алгебр Лі для просторових і часової змінних, та побудові квазізображень відповідних елементів алгебри Лі.

У підрозділі 2.1 розглянуто крайову задачу з неоднорідними крайовими умовами вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x) \textit{ таку, що} \\ A(u(x)) = f(x) \text{ в } \Omega = (0,1),\ u(0) = g_1,\ \ u(1) = g_2, \end{cases} \tag{1}$$

де $A: W^{\infty,\infty}(\Omega) \to W^{\infty,\infty}(\Omega)$ – еліптичний оператор, який є формальним поліномом елементів алгебри Лі $\left\{1, x, \dfrac{d}{dx}\right\}$, простір $W^{\infty,\infty}(\Omega)$ такий, що $W^{\infty,\infty}(\Omega) = \left\{u : \Omega \to R \mid D^{\alpha} u \in L^{\infty}(Q_T),\ \forall \alpha \in N\right\}$, $g_1, g_2 -$ довільні дійсні числа, функція $f(x)$ характеризує інтенсивність внутрішніх джерел,

Для задачі (1), яка описує стаціонарні стани динамічної системи, розроблено модифікацію методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій. Скінченновимірне квазізображення оператора A є лінійною комбінацією або суперпозицією скінченновимірних квазізображень елементів алгебри Гейзенберга-Вейля алгебри Лі. Якщо, наприклад, $A = \dfrac{d^2}{dx^2}$, то цей оператор можна подати у вигляді формального добутку елементів алгебри Лі, тобто: $A = \dfrac{d^2}{dx^2} = \dfrac{d}{dx} \circ \dfrac{d}{dx}$, де $\circ$ позначає формальний добуток елементів алгебри Лі, тобто суперпозицію операторів.

Скінченновимірне квазізображення диференціального оператора $A = \dfrac{d^2}{dx^2}$ будується у вигляді матриці $A = Z_\sigma \cdot Z_\sigma = Z_\sigma^2$, де матриця Z_σ відображає дію диференціювання у скінченновмірному просторі поліномів.

Скінченновимірне квазізображення оператора d/dx має вигляд

$$Z_\sigma^1 = \left.\frac{dL_\sigma(x)}{dx}\right|_\sigma = \begin{pmatrix} l_1'(x_1) & \dots & l_1'(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_n'(x_1) & \dots & l_n'(x_n) \end{pmatrix}.$$

Скінченновимірне квазізображення $X_\sigma = diag(x_1, x_2, ..., x_n)$ оператора незалежної змінної x отримується множенням одиничної матриці на вектор розбиття σ області Ω.

Нехай відомі скінченновимірне квазізображення A_σ оператора задачі (1) та скінченновимірне квазізображення $f_\sigma = \{f(x_i)\}_{i=1}^n$ функції $f(x)$ розподілених джерел. Тоді скінченновимірне формулювання крайової задачі (1) набуде вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти вектор } u_\sigma = (u_1, u_2, ..., u_n)^{\mathrm{T}} \textit{ такий, що} \\ A_\sigma u_\sigma = f_\sigma,\ u_1 = g_1,\ u_n = g_2. \end{cases} \tag{2}$$

Особливістю задачі (2) є той факт, що значення компонент u_1 та u_n вектора u_σ відомі, оскільки ці значення задані у крайових умовах задачі (1).

Теорема 2.1 (про вигляд системи лінійних алгебричних рівнянь для відшукання розв'язку крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами). *Скінченновимірна крайова задача (2) еквівалентна задачі:*

$$\begin{cases} \textit{знайти вектор } \tilde{u}_\sigma = (u_2, ..., u_{n-1})^{\mathrm{T}} \textit{ такий, що} \\ \tilde{A}_\sigma \tilde{u}_\sigma = \tilde{f}_\sigma, \end{cases}$$

де компоненти матриці $\tilde{A}$, *з розмірністю* $(n-2)\times(n-2)$, *мають вигляд* $\tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i+1} a_{k,j+1}$, $i = \overline{1,\ n-2}$, $j = \overline{1,\ n-2}$, *а компоненти вектора* $\tilde{f}_\sigma$ *обчислюються за формулою* $\tilde{f}_i = \sum_{k=1}^{n} \left[a_{k,i+1}(f_k - a_{k1} g_1 - a_{kn} g_2)\right]$, $i = \overline{1,\ n-2}$.

Теорема 2.1 дозволяє розширити застосовність методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для розв'язування крайових задач з неоднорідними крайовими умовами.

У підрозділі 2.2 розглянуто абстрактну задачу Коші в скінченному циліндрі $Q_T = \Omega \times (0, T]$, де $\Omega := (a, b) \subset R$, часовій межа $T < +\infty$. Розв'язок цієї задачі шукається у просторі $V = W_{x,t}^{\infty,\infty}(Q_T), C = V$, де простір $W_{x,t}^{\infty,\infty}(Q_T) = \{u : Q_T \to R \mid D^\alpha u \in L^\infty(Q_T), \forall \alpha \in N\}$, тобто похідні довільного порядку розв'язку задачі за змінними x, t є обмеженими.

Припускається, що лінійний диференціальний оператор K є формальним поліномом елементів алгебри Лі $\{1, x, \partial/\partial x\}$ і записується таким чином $K = a_k \frac{\partial^k}{\partial x^k} + a_{k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} + ... + a_{k+p} \frac{\partial^{k+p}}{\partial x^{k+p}}$, де $a_{k+i} \in R$, $i = \overline{0, p}$, $a_k \neq 0$, $k \geq 1$, $\alpha = k + p$ позначає найвищий порядок похідної за змінною x, а $a_\alpha = a_{k+p}$ – коефіцієнт при старшій похідній за змінною x.

Задача Коші з оператором $K : V \to V$ має вигляд:

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x,t) \in V \textit{ таку, що} \\ u_t = Ku + f,\ \forall (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi \in W_x^{\infty,\infty}(\Omega), \end{cases} \tag{3}$$

де простір $W_x^{\infty,\infty}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to R \mid \dfrac{d^\alpha u}{dx^\alpha} \in L^\infty(\Omega),\ \forall \alpha \in N \right\}$, $\varphi = \varphi(x) \in W_x^{\infty,\infty}(\Omega)$ – початкова умова, $f = f(x,t) \in C$ описує внутрішні розподілені джерела.

Заміною $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$ задача (3) зводиться до задачі Коші з однорідними початковими умовами:

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } v = v(x,t) \in V \textit{ таку, що} \\ v_t = Kv + K\varphi + f,\ \forall (x,t) \in Q_T, \\ v\big|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

розв'язок якої шукається у просторі функцій, які в початковий момент часу набувають нульового значення, тобто у просторі $B = \left\{ v \in V : v\big|_{t=0} = 0 \right\}$.

Задача (4) записується в операторному вигляді

$$\begin{cases} \textit{задано оператор } A : B \to C \textit{ та елемент } \tilde{f} \in C, \\ \textit{знайти елемент } v \in B \textit{ такий, що } Av = \tilde{f}, \end{cases} \tag{5}$$

де $A = \partial / \partial t - K,\ \tilde{f} = K\varphi + f \in C$.

Узагальнений метод Лі-алгебричних апроксимацій полягає у дискретизації задачі (5) як за просторовою, так і за часовою змінними.

Використовуючи ідеї підрозділу 2.1 для побудови скінченновимірних квазізображень у багатовимірному випадку, отримано скінченновимірне квазізображення елемента $A = \dfrac{\partial}{\partial t} \circ 1 - 1 \circ K$ у вигляді $A_h = Z_t \otimes I_x - I_t \otimes K_x$, де $\otimes$ – тензорний добуток, I_x, I_t – скінченновимірні квазізображення одиничного оператора за змінними x та t відповідно, Z_t – скінченновимірне квазізображення оператора диференціювання за часовою змінною, K_x – скінченновимірне квазізображення поліноміального диференціального оператора K за просторовими змінними.

Базисом простору апроксимації є множина поліномів Лагранжа, без поліномів, що асоційовані з початковим моментом часу. Тобто множина поліномів Лагранжа для часової змінної має вигляд $\tilde{l}(t) = \left\{ l_2(t), l_3(t), ..., l_{n_t}(t) \right\}$, причому $\forall l_i \in \tilde{l}(t) : l_i\,|_{t=0} = 0 \Rightarrow l_i \in B,\ i = \overline{2, n_t}$. Розмірність $\dim \tilde{l}(t) = n_t - 1$. Оскільки система функцій $l_x \otimes \tilde{l}_t \in B$ лінійно незалежна, то вона формує базис простору апроксимацій B_h.

Для забезпечення умов збіжності розглядається система вузлів $\tilde{Q}_{T,h} = \{x_i\}_{i=1}^{n_x} \times \{t_j\}_{j=2}^{n_t}$. Скінченновимірні квазізображення в просторі B_h мають вигляд

$$K_{x,ij} = K(l_j)(x_i), \quad i,j = \overline{1,n_x}, \quad \tilde{Z}_{t,ij} = l_j^{'}(t_i), \quad i,j = \overline{2,n_t},$$
$$I_{x,ij} = l_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1,n_x}, \quad \tilde{I}_{t,ij} = l_j(t_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{2,n_t}.$$

Скінченновимірне квазізображення оператора A задачі (5) має вигляд

$$A_h = \tilde{Z}_t \otimes I_x - \tilde{I}_t \otimes K_x.$$

Отримано дискретне формулювання задачі (5)

$$\begin{cases} \textit{задано оператор } A_h : B_h \to C_h \textit{ та елемент } \tilde{f}_h \in C_h, \\ \textit{знайти елемент } v_h \in B_h \textit{ такий, що } A_h v_h = \tilde{f}_h, \end{cases} \tag{6}$$

де $\tilde{f}_h = \tilde{f}(x_{i_x}, t_{i_t}),\ i_x = \overline{1,n_x},\ i_t = \overline{2,n_t}$.

Умови розв'язності системи лінійних алгебричних рівнянь (6) визначаються на підставі наступних тверджень.

Лема 2.1. Матриця $\left(Z_t^{-1} \otimes K_x\right)$ є нільпотетна.

Лема 2.2. Матриця $\left(I_t \otimes I_x - Z_t^{-1} \otimes K_x\right)$ має обернену і її ранг дорівнює $(n_t - 1)n_x$.

Теорема 2.2. *Ранг скінченновимірного квазізображення A_h оператора A дорівнює $n_x(n_t - 1)$ і існує єдиний розв'язок задачі (6).*

Нехай N – розмірність скінченновимірних просторів B_h, C_h, у яких запроваджено циліндричну норму: $\|v\|_{B_h} = \|v\|_{C_h} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} v_j^2}$.

Теорема 2.3. *Скінченновимірне квазізображення A_h апроксимує оператор A на елементі $v \in B$.*

У випадку рівновіддалених вузлів, похибка апроксимації характеризується оцінкою:

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} \le \ln(n_t)\left(\frac{1}{n_t - 1}\right)^{n_t - 1}\left\|\frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + |a_\alpha|\left(\prod_{k=0}^{\alpha-1}\left(\ln(n_x - k)\right)\right)\left(\frac{1}{n_x - 1}\right)^{n_x - \alpha}\left\|\frac{\partial^{n_x} v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty.$$

Теорема 2.4 (про існування обмеженого оберненого оператора для квазізображення). *Якщо ранг скінченновимірного матричного квазізображення A_h оператора A дорівнює розмірності простору апроксимації, тобто $rankA_h = dimB_h$, то тоді існує лінійний обмежений обернений оператор A_h^{-1}, причому для усіх A_h: $\exists M > 0,\ \exists A_h^{-1} : \left\|A_h^{-1}\right\| \le M < +\infty$.*

Теорема 2.5 (про збіжність абстрактної схеми Лі-алгебричних дискретних апроксимацій). *Нехай виконуються наступні умови:*

1. *послідовність операторів $\{A_h\}$ апроксимує оператор A задачі (5),*
2. *усі оператори з послідовності $\{A_h\}$ є невироджені,*
3. *апроксимація елемента $f \in C$ задовольняє умову $\lim_{h\to 0}\|f - f_h\|_{C_h} = 0$.*

Тоді послідовність u_h, що визначена схемою (6) відшукання розв'язку задачі (5), є збіжною до точного розв'язку, тобто $\lim_{h\to 0}\|v - v_h\|_{B_h} = 0$.

Теорема 2.6. *Якщо* $\lim\limits_{h\to 0}\left\|\tilde{f}-\tilde{f}_h\right\|_{C_h}=0$ *і послідовність квазізображень оператора* A *невироджена, то послідовність* u_h*, що визначена схемою (6) відшукання наближеного розв'язку задачі (3), збігається до точного розв'язку задачі, причому, у випадку рівновіддалених вузлів інтерполювання похибка стосовно точного розв'язку характеризується оцінкою*

$$\|u-u_h\|_{B_h}\le M\left(\ln(n_t)\left(\frac{1}{n_t-1}\right)^{n_t-1}\left\|\frac{\partial^{n_t}u}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty+|a_\alpha|\left(\prod_{k=0}^{\alpha-1}(\ln(n_x-k))\right)\left(\frac{1}{n_x-1}\right)^{n_x-\alpha}\left\|\frac{\partial^{n_x}u}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty\right).$$

У підрозділі 2.3 розглянуто обчислювальну схему для задачі Коші у q-вимірній обмеженій області $\Omega:=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\ldots\times(a_q,b_q)\subset R^q$, часовій межі $T<+\infty$ та циліндрі $Q_T=\Omega\times(0,T]$. Нехай $diam\,\Omega_i$ позначає довжину відрізку (a_i,b_i), $i=\overline{1,q}$.

Припускається, що оператор K є формальним поліномом елементів алгебри Лі $\bigoplus\limits_{i=1}^{q}\{1,x_i,\partial/\partial x_i\}$, α_i позначає найвищий порядок похідної за змінною x_i, а $a_{i,\alpha}$ – коефіцієнт при старшій похідній за змінною x_i. Розглядаються простори $C=V=W^{\infty,\infty}_{x_1,\ldots,x_d,t}(Q_T)=\{u:Q_T\to R\mid D^\alpha u\in L^\infty(Q_T),\ \forall\alpha\in N\}$. Сформульовано задачу Коші для диференціального рівняння з оператором K:

$$\begin{cases}\text{знайти функцію } u=u(x_1,\ldots,x_q,t)\in V \text{ таку, що}\\ u_t=Ku+f,\ \forall(x_1,\ldots,x_q,t)\in Q_T,\\ u\big|_{t=0}=\varphi\in W^{\infty,\infty}_x(\Omega),\end{cases}\tag{7}$$

де $\varphi=\varphi(x)\in W^{\infty,\infty}_x(\Omega)$ – початкова умова, а $f=f(x_1,\ldots,x_q,t)\in C$ представляє внутрішні розподілені джерела.

Заміною $u(x_1,\ldots,x_q,t)=v(x_1,\ldots,x_q,t)+\varphi(x_1,\ldots,x_q)$ задачу (7) зведено до задачі Коші з однорідними початковими умовами

$$\begin{cases}\text{знайти функцію } v=v(x_1,\ldots,x_q,t)\in V \text{ таку, що}\\ v_t=Kv+K\varphi+f,\ \forall(x_1,\ldots,x_q,t)\in Q_T,\\ v\big|_{t=0}=0,\end{cases}\tag{8}$$

розв'язок якої шукається у просторі функцій, які в початковий момент часу набувають нульового значення, тобто у просторі $B=\{v\in V:v\big|_{t=0}=0\}$.

Задача (8) записується в операторному вигляді

$$\begin{cases}\text{задано оператор } A:B\to C \text{ та елемент } \tilde{f}\in C,\\ \text{знайти елемент } v\in B \text{ такий, що } Av=\tilde{f},\end{cases}\tag{9}$$

де $A:=\partial/\partial t-K,\ \tilde{f}=K\varphi+f\in C$.

З використанням *(q+1)*-вимірного інтерполювання Лагранжа за змінними $x_1,x_2,\ldots,x_q,t$ отримано дискретне формулювання задачі:

$$\begin{cases} \textit{задано оператор } A_h : B_h \to C_h \textit{ та елемент } \tilde{f}_h \in C_h, \\ \textit{знайти елемент } v_h \in B_h \textit{ такий, що } A_h v_h = \tilde{f}_h. \end{cases}$$

Теорема 2.7. *Ранг скінченновимірного квазізображення A_h оператора A є повним, тобто ранг дорівнює $(n_t - 1)\prod_{i=1}^{q} n_{x_i}$, та існує єдиний розв'язок задачі (9).*

Тут n_{x_i} позначає кількість вузлів за змінною x_i, $i = \overline{1, q}$.

Теорема 2.8. *Скінченновимірне квазізображення A_h апроксимує оператор A, у випадку рівновіддалених вузлів інтерполювання з похибкою апроксимації*

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} \le \ln n_t \left(\frac{1}{n_t - 1}\right)^{n_t - 1} \left\|\frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + \sum_{i=1}^{q} \left(\left|a_{i,\alpha}\right| \left(\prod_{k=0}^{\alpha_i - 1} \ln(n_{x_i} - k)\right) \left(\frac{1}{n_{x_i} - 1}\right)^{n_{x_i} - \alpha_i} \left\|\frac{\partial^{n_{x_i}} v}{\partial x^{n_{x_i}}}\right\|_\infty \right).$$

Теорема 2.9. *Якщо $\lim_{h \to 0} \|\tilde{f} - \tilde{f}_h\|_{C_h} = 0$ та виконані умови теорем 2.6, 2.7, 2.8, то $\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_{B_h} = 0$ і у випадку рівновіддалених вузлів інтерполювання похибку стосовно точного розв'язку характеризує оцінка*

$$\|u - u_h\|_{B_h} \le M \left(\ln n_t \left(\tfrac{1}{n_t - 1}\right)^{n_t - 1} \left\|\frac{\partial^{n_t} u}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + \sum_{i=1}^{q} \left(\left|a_{i,\alpha}\right| \left(\prod_{k=0}^{\alpha_i - 1} \ln(n_{x_i} - k)\right) \left(\tfrac{1}{n_{x_i} - 1}\right)^{n_{x_i} - \alpha_i} \left\|\frac{\partial^{n_{x_i}} u}{\partial x^{n_{x_i}}}\right\|_\infty \right) \right).$$

Отримано оцінку для багатовимірної динамічної системи. Факторіальна збіжність послідовності наближеного розв'язку до точного розв'язку задачі досягається тоді, коли всі похідні є обмеженими.

У підрозділі 2.4 застосовано обчислювальну схему для задачі Коші для одновимірного рівняння адвекції. Розглядається інтервал $\Omega = (0,1)$, часова межа $T < +\infty$, циліндр $Q_T = \Omega \times (0, T]$ та простори $V, C = W^{\infty,\infty}(\Omega_T)$. Сформульовано задачу Коші для одновимірного рівняння адвекції

$$\begin{cases} \textit{задано коефіцієнт адвекційного переносу } c \in R \\ \textit{та початковий розподіл величини } \varphi = \varphi(x) \in V, \\ \textit{знайти функцію } u = u(x,t) \in V \textit{ таку, що} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall (x,t) \in Q_T, \; u|_{t=0} = \varphi. \end{cases} \tag{10}$$

Підстановкою $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$ задачу (10) зведено до задачі Коші для функції $v(x,t)$ з однорідною початковою умовою:

$$\begin{cases} \textit{задано коефіцієнт адвекційного переносу } c \in R, \\ \textit{знайти функцію } v = v(x,t) \in V \textit{ таку, що} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + c\dfrac{\partial v}{\partial x} = -c\dfrac{d\varphi}{dx}, \forall (x,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Розв’язок задачі (11) шукаємо у просторі $B = \{v \in V : v|_{t=0} = 0\}$.

Задача (11) допускає операторне формулювання

$$\begin{cases} \textit{задано оператор } A: B \to C \textit{ та елемент } f \in C, \\ \textit{знайти елемент } v \in B \textit{ такий, що } Av = f, \end{cases} \tag{12}$$

де $A := \dfrac{\partial}{\partial t} + c\dfrac{\partial}{\partial x}, f := -c\dfrac{d\varphi}{dx} \in C$.

Дискретне формулювання задачі (12) подано у вигляді

$$\begin{cases} \textit{задано оператор } A_h : B_h \to C_h \textit{ та елемент } f_h \in C_h, \\ \textit{знайти елемент } v_h \in B_h \textit{ такий, що } A_h v_h = f_h, \end{cases} \tag{13}$$

де матриця $A_h = Z_t \otimes I_x + cI_t \otimes Z_x$ – скінченновимірне квазізображення диференціального оператора A задачі (12), а вектор f_h скінченновимірне квазізображення правої частини у (12).

Наслідок 2.1 (про збіжність схеми методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші з одновимірним рівнянням адвекції). *Послідовність u_h, що визначена схемою (13) відшукання наближеного розв'язку задачі (12), збігається до точного розв'язку задачі (10), причому, норма похибки при нерівномірній сітці характеризується величиною*

$$\|u - u_h\|_{B_h} \le M\left(\frac{T^{n_t-1}}{(n_t-1)!}\left\|\frac{\partial^{n_t} u}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + |c|\frac{diam(\Omega)^{n_x-1}}{(n_x-1)!}\left\|\frac{\partial^{n_x} u}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty\right),$$

де число $M > 0$ таке, що $\forall A_h : \|A_h^{-1}\| \le M$, а при рівномірній сітці норма похибки допускає оцінку:

$$\|u - u_h\|_{B_h} \le M\left(\ln(n_t)\left(\frac{1}{n_t-1}\right)^{n_t-1}\left\|\frac{\partial^{n_t} u}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + |c|\ln(n_x)\left(\frac{1}{n_x-1}\right)^{n_x-\alpha}\left\|\frac{\partial^{n_x} u}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty\right).$$

Приклад 2.1. Для модельної задачі

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x,t) \textit{ таку, що}: \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \ (x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \sin x, \end{cases} \tag{14}$$

отримано числові результати, які наведені у таблиці 1.

Точний розв'язок задачі (14) має вигляд $u(x,t) = \sin(x-t)$.

Таблиця 1

Значення норми похибок у просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.0815902	0.383927	0.0903126
$h = 1/4$	0.0394812	0.0390588	0.0027526
$h = 1/8$	0.0195588	0.0000578184	$3.1048 \cdot 10^{-6}$
$h = 1/16$	0.00975607	0.000338286	$4.45453 \cdot 10^{-14}$
$h = 1/32$	0.00487437	–	$7.13162 \cdot 10^{-17}$

Тут використані скорочення: МСР – метод скінченних різниць (схема Лакса-Вендорфа), МЛАДА – метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій, УМЛАДА – узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.

Аналогічно побудовано схему для двовимірного рівняння адвекції та рівняння теплопровідності у підрозділах 2.5 та 2.6. Результати обчислювальних експериментів засвідчили ефективність узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.

У випадку сингулярно збурених крайових задач адвекції-дифузії значення похідних розв'язку можуть набувати дуже великих значень. Для побудови високоточних обчислювальних схем для таких задач зі змінними коефіцієнтами у **третьому розділі** запропоновано застосування кусково-степеневих базисних функцій методу скінченних елементів та на підставі використання законів збереження здійснено верифікацію обчислювальної схеми.

У підрозділі 3.1 визначено кусково-степеневу апроксимацію функцій. Зафіксовано натуральне число N та поділено відрізок $[0,1]$ на інтервали $K_{i+1/2} := (x_i, x_{i+1})$ довжини $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i > 0,\ i = 0,...,N-1$. Дробовим індексом позначено номер інтервалу і певні його характеристики. Наприклад, $x_{i+1/2} = (x_{i+1} + x_i)/2$ – центр ваги інтервалу $K_{i+1/2} := (x_i,\ x_{i+1})$, $\{u(x)\}_{i+1/2} = u_{i+1/2}$ – значення функції $u(x)$ у точці $x = x_{i+1/2}$. Нехай задано достатньо регулярну функцію $u = u(x)$. Тоді для довільного $\alpha > 0$ на кожному з інтервалів виберемо апроксимаційний поліном $u_i(x)$ у вигляді лінійної комбінації

$$u(x) \approx u_{I,i+1/2}(x, \alpha_{i+1/2}) = u(x_i)\varphi_i(x, \alpha_{i+1/2}) + u(x_{i+1})\varphi_{i+1}(x, \alpha_{i+1/2}),\ \forall x \in \overline{K}_{i+1/2},\ i = 0,...,N-1, \quad (15)$$

кусково-степеневих функцій

$$\begin{cases} \varphi_i(x, \alpha_{i+1/2}) = 1 - (\omega_i(x))^{\alpha_{i+1/2}}, \\ \varphi_{i+1}(x, \alpha_{i+1/2}) = 1 - \varphi_i(\alpha_{i+1/2}, x), \end{cases}$$

де $\omega_i(x) = (x - x_{i-1})/h_{i+1/2}$, а стала $\alpha_{i+1/2} > 0$ відіграє роль параметра апроксимації.

Якщо задана функція $u(x) \in C([0,1])$, то кусково-визначена функція $u_I(x,\alpha)$ у (15) буде також кусково-визначеною на відрізку $[0,1]$ і її можна подати у вигляді

$$u_I(x,\alpha) = \sum_{i=0}^{N} u_i \phi_i(x, \alpha_{i+1/2}),\ \ \forall x \in [0,\ 1], \quad (16)$$

де базис інтерполяції має вигляд

$$\operatorname{supp}\phi_0 = \overline{K}_{1/2},\ \phi_0(x) = 1 - (\omega_1(x))^{\alpha_{1/2}},$$

$$\operatorname{supp}\phi_i = \overline{K}_{i-1/2} \cup \overline{K}_{i+1/2},\ \phi_i(x) = \begin{cases} (\omega_i(x))^{\alpha_{i-1/2}}, x \in \overline{K}_{i-1/2}, \\ 1 - (\omega_{i+1}(x))^{\alpha_{i+1/2}}, x \in \overline{K}_{i-1/2}, \end{cases} \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$\operatorname{supp}\phi_i = \overline{K}_{N-1/2},\ \phi_N(x) = (\omega_N(x))^{\alpha_{N-1/2}}.$$

У підрозділах 3.2 та 3.3 доведено лінійну незалежність кусково-степеневих функцій та знайдено оцінки похибки кусково-степеневої апроксимації.

Лема 3.1 (про лінійну незалежність системи кусково-степеневих функцій.) 1. *Нехай параметр апроксимації* $\alpha = \min_{i=1,n} \alpha_{i+1/2} > 0$. *Тоді система кусково-степеневих функцій* $\{\phi_i(\cdot,\alpha)\}_{i=0}^N$ *лінійно незалежна в просторі* $L^2(\Omega)$ *зі скалярним добутком* $(u,v)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega uv dx$.

2. *Нехай* $m \in N$. *Тоді для довільних значень параметра апроксимації* α *таких, що* $\alpha > m - 1/2$, *система кусково-степеневих функцій* $\{\phi_i(\cdot,\alpha)\}_{i=0}^N$ *лінійно незалежна в просторі* $H^m(\Omega)$ *зі скалярним добутком* $(u,v)_{H^m(\Omega)} := \int_\Omega \left(uv + \sum_{k=1}^m \left(u^{(k)} v^{(k)} \right) \right) dx$.

Теорема 3.1 (про похибку степеневого інтерполювання на скінченному елементі). *Нехай* $u(x) \in H^2(\Omega)$, $\{\varphi_i(\cdot,\alpha)\}_{i=0}^N \in H^1(\Omega)$ *та* $\alpha > 1/2$. *Тоді мають місце оцінки похибки на скінченному елементі вигляду:*

$$\|u - u_I(\cdot,\alpha)\|_{i+1/2} \le h_{i+1/2}^2 / 2 \|u''\|_{i+1/2} + |\alpha - 1| / \sqrt{2\alpha - 1}\, h_{i+1/2} \sqrt{2h_{i+1/2}} \|u'\|_{L^\infty(\Omega)},$$

$$\|u' - u_I'(\cdot,\alpha)\|_{i+1/2} \le h_{i+1/2} / \sqrt{2} \|u''\|_{i+1/2} + |\alpha - 1| / \sqrt{2\alpha - 1} \sqrt{h_{i+1/2}} \|u'\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Теорема 3.2 (про покращену оцінку похибки кусково-степеневої апроксимації). *Нехай* $u(x) \in H^2(\Omega)$, $\{\varphi_i(\cdot,\alpha)\}_{i=0}^N \in H^1(\Omega)$. *Тоді при виборі параметра апроксимації* $\alpha = 1 + h_{i+1/2} \|u''\|_{i+1/2}^2 / \|u'\|_{L^\infty(\Omega)}^2$ *справджуються оцінки похибки кусково-степеневої апроксимації на скінченному елементі вигляду*

$$\|u - u_I\|_{i+1/2} \le h_{i+1/2}^2 \|u''\|_{i+1/2}, \quad \|u' - u_I'\|_{i+1/2} \le \sqrt{2} h_{i+1/2} \|u''\|_{i+1/2}.$$

Для розгляду аспектів застосування обчислювальної схеми з використанням кусково-степеневих базисних функцій, у підрозділі 3.4 розглянуто модельну крайову задачу для рівняння адвекції-дифузії з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -u'' + Pe\, u' = f \text{ на } \Omega := (0,1),\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Тут число Пекле Pe характеризує відношення швидкості адвекційних процесів до дифузійних, тобто, $Pe = \beta / \mu$, де $\beta > 0$ – коефіцієнт адвекційного перенесення, $\mu > 0$ – коефіцієнт дифузії. Якщо $Pe \to \infty$, то задача (17) стає сингулярно збуреною і породжує нестійкість стандартних схем МСЕ.

Варіаційне формулювання задачі (17) має вигляд

$$\begin{cases} \text{задано простір } V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0\}, \\ \text{знайти елемент } u \in V \text{ такий, що } a(u,v) = \langle l, v \rangle,\ v \in V, \end{cases} \tag{18}$$

де $a(u,v) := \int_0^1 (u'v' + Pe\, u'v) dx,\ \langle l, v \rangle = \int_0^1 fv dx,\ u, v \in V.$

Для розв'язування задачі (18) використано кусково-степеневу апроксимацію (16) з підрозділу 3.1. Врахувавши головні крайові умови

$u_0 = u_N = 0$, отримано кусково-визначену степеневу апроксимацію $u_h(x,\alpha) = \sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i(x, \alpha_{i+1/2}),\ \forall x \in [0,1]$, де кусково-степеневі базисні функції мають вигляд

$$\operatorname{supp}\phi_i = \overline{K}_{i-1/2} \cup \overline{K}_{i+1/2},\ \phi_i(x) = \begin{cases} (\omega_i(x))^{\alpha_{i-1/2}},\ x \in \overline{K}_{i-1/2}, \\ 1-(\omega_{i+1}(x))^{\alpha_{i+1/2}},\ x \in \overline{K}_{i-1/2}. \end{cases} \quad i = \overline{1,N},$$

Система кусково-визначених функцій формує базис у скінченно-вимірному просторі $V_h \subset V$, причому $\dim V_h = N$. Дискретне формулювання задачі (18) має вигляд

$$\begin{cases} \textit{задано тріангуляцію } T_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^{N} \textit{ та пов'язаний з нею} \\ \textit{простір кусково-степеневих апроксимацій } V_h \subset V, \\ \textit{знайти елемент } u_h \in V_h \textit{ такий, що} \\ a(u_h, v) = \langle l, v \rangle \qquad \forall v \in V_h\ . \end{cases} \tag{19}$$

Вибравши у рівнянні (19) почергово $v = \varphi_i,\ \varphi_i \in V_h,\ i = \overline{1,N}$, отримано систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), де матриця A визначена за правилом $A_{ij} = a(\varphi_j,\ \varphi_i),\ i, j = \overline{1,N}$, а права частина набула вигляду $F_i = \langle l,\ \varphi_i \rangle,\ i = \overline{1,N}$.

У підрозділі 3.5 розглянуто обчислення значень білінійної форми та лінійного функціоналу на скінченному елементі.

У підрозділі 3.6 отримано систему рівнянь МСЕ, доведено стійкість та збіжність побудованої обчислювальної схеми. Система лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для знаходження коефіцієнтів апроксимації в (16) із врахуванням (18) та (19) має вигляд:

$$-\left(\frac{\alpha^2}{2\alpha-1}\right)\left(\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}\right) + Pe\left(\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}\right) = f,\ i = \overline{1,N}\ . \tag{20}$$

Теорема 3.3 (про порядок апроксимації рівняння адвекції – дифузії схеми з штучно підвищеним коефіцієнтом дифузії). *Нехай $\mu(\alpha)$ – штучно підвищений коефіцієнт дифузії, а схема відшукання розв'язку задачі (17) має вигляд (20). Тоді схема (20) апроксимує диференціальне рівняння вигляду $-\mu(\alpha)u'' + Pe\,u' = f,\ x \in \Omega := (0,1),$ з похибкою апроксимації $O(h^2)$.*

Теорема 3.4 (про безумовну стійкість схеми з штучно підвищеним коефіцієнтом дифузії для рівняння адвекції-дифузії). *Нехай $\mu(\alpha)$ – штучно підвищений коефіцієнт дифузії, де α – параметр стабілізації. Тоді для безумовної стійкості схеми (20) необхідно, щоб значення штучно підвищеного коефіцієнта дифузії задовольняло умову $\mu(\alpha) \geq \frac{Pe}{2}h$. При значенні коефіцієнта дифузії $\mu(\alpha) = \frac{Pe}{2}h$ схема вносить мінімальну надлишкову дифузію.*

Теорема 3.5 (про безумовну стійкість схеми з використанням степеневих базисних функцій для рівняння адвекції дифузії). *Схема (20), що побудована з використанням степеневих базисних функцій МСЕ є безумовно стійкою, якщо значення параметра стабілізації* $\alpha_h \geq \frac{Pe}{2}h + \sqrt{\frac{Pe}{2}h\left(\frac{Pe}{2}h - 1\right)}$. *За вибору параметра стабілізації* $\alpha_h = \frac{Pe}{2}h + \sqrt{\frac{Pe}{2}h\left(\frac{Pe}{2}h - 1\right)}$ *схема вносить мінімальну надлишкову дифузію, що забезпечує коректність схеми.*

Теорема 3.6 (про збіжність схеми МСЕ з степеневими базисними функціями). *Схема МСЕ (20) для розв'язування задачі (17) за умови виконання теорем 3.3, 3.4 та 3.5 є збіжною.*

У підрозділах 3.7 та 3.8 показано застосування кусково-степеневих апроксимації МСЕ до задачі адвекції-дифузії реакції та визначено похибку кусково-степеневої апроксимації. Розглянуто модельну крайову задачу для рівняння адвекції-дифузії-реакції зі змінними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -(\mu u')' + \beta u' + \sigma u = f, \text{ в } \Omega = (0,1), u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{21}$$

де функції $\mu = \mu(x),\ \beta = \beta(x),\ \sigma = \sigma(x)$ можуть мати розриви першого роду, причому функція $\mu(x)$ задовольняє умову $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$.

Варіаційне формулювання задачі (21) має вигляд:

$$\begin{cases} \text{задано простір } V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0\}, \\ \text{знайти елемент } u \in V \text{ такий, що } a(u, v) = \langle l, v \rangle, \ \forall v \in V, \end{cases} \tag{22}$$

де $a(u, v) = \int_0^1 (\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv)dx,\ \langle l, v \rangle = \int_0^1 fv\,dx$.

Теорема 3.7 (про структуру системи рівнянь МСЕ з кусково-степеневим базисом). *Для розв'язування коректно-сформульованої варіаційної задачі (21) на тріангуляції* $T_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^N$ *введено простір апроксимацій* V_h, *де базисні елементи* $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ *цього простору є кусково-неперервні степеневі функції. Тоді система лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для знаходження коефіцієнтів апроксимації (16) має вигляд*

$$\left\{-\frac{\mu}{h}\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} + \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h\alpha}{1 + 3\alpha + 2\alpha^2}\right\}_{i-1/2} u_{i-1} +$$

$$+\left(\left\{\frac{\mu}{h}\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} + \sigma h\frac{2\alpha^2}{1 + 3\alpha + 2\alpha^2}\right\}_{i-1/2} + \left\{\frac{\mu}{h}\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} + \sigma h\frac{1}{1 + 2\alpha}\right\}_{i+1/2}\right)u_i +$$

$$+\left\{-\frac{\mu}{h}\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} + \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h\alpha}{1 + 3\alpha + 2\alpha^2}\right\}_{i+1/2} u_{i+1} = \left\{hf\frac{1}{\alpha + 1}\right\}_{i-1/2} + \left\{hf\frac{\alpha}{\alpha + 1}\right\}_{i+1/2},$$

де $u_0 = u_N = 0,\ i = \overline{1, N-1}$.

Теорема 3.8 (про структуру системи рівнянь МСЕ з кусково-степеневим базисом на рівномірній сітці зі сталими коефіцієнтами). *Нехай виконані умови теореми 3.7, при цьому додатково кожен скінченний елемент є однакового діаметру, тобто* $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i = h = const$, $i = \overline{0, N}$ *та функції* μ, β, σ, f *сталі на відрізку. Тоді система лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для знаходження коефіцієнтів апроксимації (16) має вигляд:*

$$\left(-\mu\frac{\alpha^2}{2\alpha-1}+\frac{\sigma h^2}{1+3\alpha+2\alpha^2}\right)\left(\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}\right)+\beta\left(\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}\right)+\sigma u_i = f_i .$$

Теорема 3.9 (про оптимальне значення параметра стабілізації для задачі адвекції-дифузії-реакції з кусково-степеневим базисом). *Для розв'язування коректно-сформульованої варіаційної задачі (21) на поділі* $T_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^{N}$ *введемо простір апроксимацій* V_h, *де базисні елементи* $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ *цього простору є кусково-степеневими функціями. Тоді за умови вибору значення параметра стабілізації* $a_{h,i+1/2} = \left\{\frac{h|\beta|}{|\mu|}+\frac{h^2\sigma^2}{|\mu|}+\sqrt{\left(\frac{h|\beta|}{|\mu|}+\frac{h^2\sigma^2}{|\mu|}\right)\left(\frac{h|\beta|}{|\mu|}+\frac{h^2\sigma^2}{|\mu|}-1\right)}\right\}_{i+1/2}$ *на кожному скінченному елементі отримаємо монотонну схему, при якій розв'язок стійкий.*

У підрозділі 3.9 проведено аналіз числових результатів.

Приклад 3.1. Розглядається крайова задача:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -u'' + 8000(x-1/2)^2 u' = 400 \text{ на } \Omega := (0,1), u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Особливістю задачі (23) є те, що в околі точки $x = 1/2$ є внутрішній шар, а в околі точки $x = 1$ – примежовий шар , а також те, що точний розв'язок для задачі (23) невідомий. З огляду на таку обставину розглянемо апостеріорні оцінки похибок.

Таблиця 2

Норми похибок апроксимацій у просторі $L^2(\Omega)$ для лінійних та степеневих апроксимацій.

Крок h	$\|u_{h,1} - u_{h/2,1}\|_{L^2(\Omega)}$	$\|u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\|_{L^2(\Omega)}$
1/40	1.00497	0.281952
1/80	0.558169	0.178945
1/160	0.271885	0.101899
1/320	0.11191	0.0423447
1/640	0.036648	0.00817964
1/1280	0.01011	0.01011
1/2560	0.00259931	0.00259931
1/5120	0.000654563	0.000654563
1/10240	0.000163941	0.000163941
1/20480	0.000041004	0.000041004

У підрозділі 3.10 наведено узагальнення кусково-степеневих апроксимацій для двовимірних крайових задач, а застосування кусково-степеневих апроксимацій для нестаціонарних задач адвекції-дифузії-реакції та рівняння Бюргерса досліджено у підрозділі 3.11.

У **четвертому розділі** розвинуто методи знаходження законів збереження для нелінійних динамічних систем. Створено програмне забезпечення для знаходження законів збереження, точних розв'язків солітонного типу та скінченновимірних інваріантних редукцій.

У підрозділі 4.1 досліджено динамічну систему типу Бюргерса на нескінченновимірному $l-$періодичному многовиді M:

$$\left\{\begin{matrix} u_t = k_1 u_{xx} + k_2 u u_x + k_3 v_x \\ v_t = k_4 (uv)_x + k_5 v_{xx} \end{matrix}\right\} = K[u,v], \qquad (24)$$

де $K: M \to T(M)-$гладке за Фреше функціонально-поліноміальне векторне поле на многовиді M; k_1, k_2, k_3, k_4, k_5-дійсні числові параметри, $t-$параметр еволюції системи (24). Визначено, при яких значеннях параметрів k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 система (24) має нескінченну ієрархію нетривіальних законів збереження та володіє парою імплектичних операторів.

Теорема 4.1. *Динамічна система (24) володіє нескінченною ієрархією законів збереження, якщо коефіцієнти системи задовольняють співвідношення* $k_4 = k_2$, $k_5 = -k_1$, k_3 *– довільне число.*

Перші чотири закони збереження мають вигляд:

$$\gamma_0 = \int_{x_0}^{x_0+l} u dx,\ \gamma_1 = \int_{x_0}^{x_0+l} v dx,\ \gamma_2 = \int_{x_0}^{x_0+l} uv dx,\ \gamma_3 = \int_{x_0}^{x_0+l} \left(k_2 u^2 v + k_3 v^2 + 2k_1 u_x v\right) dx.$$

Теорема 4.2. *Динамічна система (24) бігамільтонова, якщо коефіцієнти системи задовольняють умови теореми 4.1.*

Теорема 4.3. *У точному частковому розв'язку системи (24), який є поліномом від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса, коефіцієнти при однакових степенях гіперболічного тангенса та котангенса є рівними.*

У підрозділі 4.2 знайдено закони збереження та інваріантні редукції нелінійної динамічної системи Буссінеска-Бюргерса.

$$\left\{\begin{matrix} u_t = \dfrac{1}{2} v_x - 2 u u_x \\ v_t = \dfrac{1}{2} u_{xxx} - 2(uv)_x \end{matrix}\right\} = K[u,v]. \qquad (25)$$

Теорема 4.4. *Нелінійна динамічна система (25) володіє такими першими трьома законами збереження:* $\gamma_0 = \int_{x_0}^{x_0+l} u dx,\ \gamma_1 = \int_{x_0}^{x_0+l} v dx,\ \gamma_2 = \int_{x_0}^{x_0+l} uv dx$.

Твердження 4.1. *Система (25) є бігамільтонова, причому імплектичні оператори мають вигляд*

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}, \ \eta = \begin{pmatrix} 1/2\partial & -\partial u \\ -u\partial & 1/2\partial^3 - v\partial - \partial v \end{pmatrix},$$

а відповідні функціонали Гамільтона мають вигляд

$$H_\vartheta = \int_{x_0}^{x_0+l} \left(u^2 v - \frac{1}{4} v^2 + \frac{1}{4} u_x^2 \right) dx, \ H_\eta = H_\eta[u,v] = -\gamma_2[u,v] = \int_{x_0}^{x_0+l} (uv) dx .$$

Теорема 4.5. *Система (25) володіє нескінченною ієрархією законів збереження* $\{\gamma_i\}, i \in \mathrm{Z}_+$, *що породжені оператором рекурсії*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\partial^{-1} u\partial & 1/2\partial^2 - \partial^{-1} v\partial - v \\ 1/2 & -u \end{pmatrix},$$

та градієнтним співвідношенням $grad\gamma_{i+1} = \Lambda grad\gamma_i, \ i \in \mathrm{Z}_+$.

Методом Новікова-Богоявленського знайдено гамільтонові потоки відповідно до векторних полів d/dx та d/dt:

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dx} = \dfrac{2p}{c_\vartheta}, \\ \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{2c_\eta^2 q}{c_\vartheta} + 6c_\eta q^2 + 4c_\vartheta q^3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{2c_\eta p}{c_\vartheta^2}, \\ \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{2c_\eta^3 q}{c_\vartheta^2} + \dfrac{6c_\eta^2 q^2}{c_\vartheta} + 4c_\eta q^3. \end{cases} \tag{26}$$

Побудовано фазовий портрет гамільтонових систем (26).

Теорема 4.6. *Редукція нелінійної динамічної системи Буссінеска-Бюргерса (25) на двовимірний інваріантний підмноговид* $M^2 \subset M$ *еквівалентна двом комутуючим гамільтоновим потокам, які повністю інтегровні у квадратурах.*

Теорема 4.7. *Редукція на чотиривимірний інваріантний підмноговид* $M^4 \subset M$ *нелінійної динамічної системи (25) еквівалентна системі двох комутуючих гамільтонових потоків, які повністю інтегровні у квадратурах.*

У підрозділі 4.3 знайдено точні розв'язки солітонного типу двовимірної нелінійної динамічної системи Бюргерса з числовими коефіцієнтами

$$\begin{cases} u_t + k_{11} u u_x + k_{12} v u_y = k_{13} u_{xx} + k_{14} u_{yy}, \\ v_t + k_{21} u v_x + k_{22} v v_y = k_{23} v_{xx} + k_{24} v_{yy}, \end{cases} \tag{27}$$

де функції $u = u(x,y,t), \ v = v(x,y,t)$, а $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}$ – дійсні ненульові числові коефіцієнти. Якщо визначник системи (27) $\Delta = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}$ відмінний від нуля, то розв'язки системи (27) мають вигляд

$$u(x,y,t) = \left(\frac{k_{12} - k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) + 2\left(\frac{k_{23}k_{12} - k_{13}k_{22} + k_{24}k_{12} - k_{14}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) \big(th(x+y+t-1) + cth(x+y+t-1) \big),$$

$$v(x,y,t) = \left(\frac{k_{21} - k_{11}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) + 2\left(\frac{k_{13}k_{21} - k_{11}k_{23} + k_{14}k_{21} - k_{11}k_{24}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) \big(th(x+y+t-1) + cth(x+y+t-1) \big).$$

Якщо визначник системи (27) Δ дорівнює нулю та виконуються умови $k_{11} = k_{21}, \ k_{12} = k_{22}, \ k_{13} + k_{14} = k_{23} + k_{24}$, то розв'язки системи (27) мають вигляд

$$u(x,y,t) = -\frac{1+k_{12}A_{20}}{k_{11}} - \left(\frac{k_{12}A_{21} + 2(k_{13}+k_{14})}{k_{11}}\right)\left(th(x+y+t-1) + cth(x+y+t-1)\right),$$

$$v(x,y,t) = A_{20} + A_{21}\left(th(x+y+t) + cth(x+y+t)\right),$$

де A_{20}, A_{21} – довільні ненульові дійсні числа. Крім того, система (27) має розв'язок $u(x,y,t) = v(x,y,t)$:

$$u(x,y,t) = v(x,y,t) = -\frac{1}{k_{11}+k_{12}} - 2\left(\frac{k_{13}+k_{14}}{k_{11}+k_{12}}\right)\left(th(x+y+t-1) + cth(x+y+t-1)\right).$$

Теорема 4.8. *У розв'язку системи (27), що є одночасно поліномом від гіперболічного тангенса, гіперболічного котангенса та суми гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса, коефіцієнти при однакових степенях гіперболічного тангенса та котангенса є рівні між собою.*

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, у якому розв’язано актуальну задачу побудови високоточних схем та їх верифікації для динамічних систем. Розроблено комплексне програмне забезпечення для виконання обчислювальних експериментів. Отримані такі основні наукові результати:

1. Узагальнено та визначено умови збіжності методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для лінійних та нелінійних динамічних систем.
2. Побудовано високоточні обчислювальні схеми для рівнянь адвекції та теплопровідності на основі узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.
3. Побудовано та здійснено верифікацію обчислювальних схем для сингулярно збурених задач адвекції-дифузії з постійними та змінними коефіцієнтами з використанням кусково-степеневих базисних функцій методу скінченних елементів.
4. Модифіковано методи та алгоритми для знаходження законів збереження, імплектичних операторів, точних розв'язків солітонного типу та скінченновимірних редукцій нелінійних динамічних систем.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові статті у фахових виданнях:

1. *Кіндибалюк А.А.* Бігамільтоновість і точні розв'язки узагальненої динамічної системи типу Бюргерса / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія механіко-математична. – 2012. – Вип. 74. – С. 109 – 121.
2. *Кіндибалюк А.А.* Солітонні розв'язки двовимірної нелінійної динамічної системи Бюргерса з числовими коефіцієнтами / *А.А. Кіндибалюк* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2012. – Вип. 18.– С. 106 – 129.

3. *Кіндибалюк А.А.* Застосування степеневих базисних функцій МСЕ до розв’язування сингулярно збуреної задачі адвекції-дифузії / *А.А Кіндибалюк, М.М Притула* // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 140 – 157.
4. *Киндыбалюк А.* Обоснование применения степенных базисных функций метода конечных элементов к сингулярно возмущенной краевой задачи адвекции-диффузии / *А. Киндыбалюк, Н. Притула* // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1/2013. – С. 59 – 65.
5. *Кіндибалюк А.А.* Модифікований метод Лі-алгебричних апроксимацій для еліптичних рівнянь з неоднорідними крайовими умовами / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2013. – Вип. 19. – С. 56 – 67.
6. *Кіндибалюк А.А.* Застосування узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій до розв'язування задачі Коші з рівнянням адвекції / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // Укр. мат. вісник. – 2014. – Том 11, № 2. – С. 158 – 180. (Переклад: *Kindybaliuk Arkadii.* Application of the generalized method of Lie-algebraic discrete approximations to the solution of the Cauchy problem with the advection equation / Arkadii Kindybaliuk, Mykola Prytula // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 204, Is. 3. – P. 280 – 297.)
7. *Кіндибалюк А.А.* Застосування узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій до розв'язування задачі Коші для двовимірного рівняння адвекції / *А.А. Кіндибалюк* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія механіко-математична – 2014. – Вип. 79. – С. 48 – 68.
8. *Кіндибалюк А.А.* Властивості кусково-степеневих апроксимацій МСЕ для сингулярно збурених задач адвекції-дифузії-реакції / *А.А. Кіндибалюк, Г.А. Шинкаренко* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2014. – Вип. 21. – С. 99 – 109.
9. *Кіндибалюк А.А.* Застосування кусково-степеневих апроксимацій МСЕ для сингулярно збурених задач адвекції-дифузії-реакції / *А.А. Кіндибалюк, Г.А. Шинкаренко* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2014. – Вип. 22. – С. 60 – 74.
10. *Кіндибалюк Аркадій* Застосування узагальненого методу Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій до розв'язування задачі Коші для рівняння теплопровідності / *Аркадій Кіндибалюк* // Математичні Студії. – 2014. – Т. 42, № 2. – С. 181 – 194.
11. *Kindybaliuk A.* Generalized method of Lie-algebraic discrete approximations for solving Cauchy problems with evolution equation / *Arkadii Kindybaliuk* // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2014. – Vol. 12, № 2. – P. 51 – 62.
12. *Kindybaliuk A.* Combined algorithm for finding conservation laws and implectic operators for the Boussinesq-Burgers nonlinear dynamical system and its finite dimensional reductions / *Arkadii Kindybaliuk, Mykola Prytula* // Journal of

Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2014. – Vol. 13, № 3. – P. 85 – 99.

Матеріали конференцій:

13. *Кіндибалюк А.А.* Бігамільтоновість узагальненої нелінійної динамічної системи типу Бюргерса та її солітонні розв'язки / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача. Львів, Україна, 24–27 травня 2011 р. – С. 283 – 284.
14. *Кіндибалюк А.А.* Точні солітонні розв’язки двовимірної нелінійної динамічної системи Бюргерса / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // XVII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». Львів, Україна, 6–7 жовтня 2011 р. – С. 58.
15. *Кіндибалюк А.А.* Модифікація Лі-алгебричного методу дискретних апроксимацій для розв’язування крайових задач з неоднорідними крайовими умовами / *А.А. Кіндибалюк* // П’ятнадцята всеукраїнська (десята міжнародна) студентська конференція з прикладної математики та інформатики СНКПМІ-2012. Львів, Україна, 5–6 квітня 2012 р. – С. 216 – 217.
16. *Кіндибалюк А.А.* Степеневі базисні функції МСЕ для сингулярно збуреної крайової задачі конвекції - дифузії // *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука. Київ, Україна, 19–21 квітня 2012 р. – Матеріали конференції. – Т.1. – С. 222.
17. *Кіндибалюк А.А.* Розв’язування МСЕ двовимірної крайової сингулярно збуреної задачі конвекції-дифузії з використанням степеневих базисних функцій / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // XVIII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». Львів, Україна, 4–5 жовтня 2012 р. – С. 90 – 91.
18. *Кіндибалюк А.А.* Модифікація Лі-алгебричного методу дискретних апроксимацій для розв'язування двовимірних крайових задач з неоднорідними крайовими умовами / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // Третя Всеукраїнська науково-практична конференція «Сучасні інформаційні технології в економіці, менеджменті та освіті». Львів, Україна, 21 листопада 2012 р. – С. 14.
19. *Кіндибалюк А.А.* Степеневі базисні функції МСЕ для сингулярно збуреної крайової задачі дифузії-реакції / *А.А. Кіндибалюк* // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики». Львів, Україна, 21–25 травня 2013 р. – Т. 3. – С. 25 – 27.
20. *Кіндибалюк А.А.* Узагальнення схеми Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задач Коші / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // XIX Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної

математики та інформатики». Львів, Україна, 3–4 жовтня 2013 р. – С. 75 – 77.

21. *Кіндибалюк А.А.* Збіжність узагальненого методу Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій для розв'язування задач Коші з динамічними системами / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // IV Всеукраїнська науково-практична конференція «Сучасні інформаційні технології в економіці, менеджменті та освіті». Львів, Україна, 20 березня 2014 р. – С. 42 – 44.
22. *Кіндибалюк А.А.* Закони збереження, оператор рекурсії та імплектичні оператори нелінійної динамічної системи Броера-Каупа-Купершмідта / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // І міжнародна, XX Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». Львів, Україна, 7–9 квітня 2014 р. – С. 90 – 91.
23. *Кіндибалюк А.* Узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для нелінійних динамічних систем / *А. Кіндибалюк, М. Притула* // VII Міжнародна наукова конференція імені академіка І.І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика». Київ, Україна, 9–10 жовтня 2014 р. – С. 56.
24. *Arkadii Kindybaliuk* Finite dimensional reduction of nonlinear hydrodynamic thin layered currents evolution on invariant two-dimensional submanifold // *Arkadii Kindybaliuk, Mykola Prytula* // XX International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties, Brno, Czech Republic, 17–21 September, 2012. – Abstracts. – P. 57 – 58.
25. *Arkadii Kindybaliuk* Finite dimensional reduction of generalized Burger's type nonlinear dynamical system on invariant two dimensional submanifold / *Arkadii Kindybaliuk, Mykola Prytula* // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, L'viv, Ukraine, 17–21 September 2012. – Abstracts of Reports. – P. 206 – 207.

АНОТАЦІЯ

Кіндибалюк А.А. Чисельне дослідження динамічних систем на основі методу скінченних елементів і Лі-алгебричних дискретних апроксимацій. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2015.

Дисертація присвячена чисельному дослідженню динамічних систем на основі методу скінченних елементів та узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій, а саме динамічних систем з адвекційними, дифузійними та дисперсійними процесами.

У дисертаційній роботі запропоновано узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для лінійних диференціальних рівнянь.

Основна його відмінність від класичного методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій полягає у дискретизації як за просторовими так і за часовою змінними, що дало можливість досягти факторіального порядку збіжності послідовності наближених розв'язків.

Для сингулярно збурених крайових задач запропоновано кусково-степеневі базисні функції, які є застосовні для задачі адвекції-дифузії як з постійними так і зі змінними коефіцієнтами.

Запропоновано нові підходи до знаходження законів збереження нелінійних динамічних систем, зокрема запропоновано комбінований алгоритм відшукання законів збереження для узагальненої нелінійної динамічної системи Бюргерса та системи Буссінеска-Бюргерса. Для цих систем знайдено пари імплектичних операторів. Для системи Буссінеска-Бюргерса отримано скінченновимірні редукції на інваріантні підмноговиди.

Ключові слова: метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій, метод скінченних елементів, сингулярно збурена крайова задача, рівняння адвекції, система адвекції-дифузії-реакції, закони збереження, скінченновимірні інваріантні редукції.

АННОТАЦИЯ

Киндыбалюк А.А. Численное исследование динамических систем на основе метода конечных элементов и Ли-алгебраических дискретных аппроксимаций. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – вычислительная математика. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2015.

Диссертация посвящена развитию методов численного исследования динамических систем на основании метода конечных элементов и обобщенного метода Ли-алгебраических дискретных аппроксимаций, а именно динамических систем с адвективными, диффузионными и дисперсионными процессами.

В диссертационной работе предложен обобщенный метод Ли-алгебраических дискретных аппроксимаций для линейных дифференциальных уравнений. Основное его отличие от классического метода Ли-алгебраических дискретных аппроксимаций заключается в дискретизации как по пространственным, так и по временной переменными, что дало возможность достичь факториального порядка сходимости последовательности приближенных решений.

Для сингулярно возмущенных краевых задач предложены кусочно-степенные базисные функции, которые применимы для задачи адвекции-диффузии как с постоянными, так и с переменными коэффициентами.

Предложены новые подходы к нахождению законов сохранения нелинейных динамических систем, в частности, предложен комбинированный алгоритм отыскания законов сохранения для обобщенной нелинейной

динамической системы Бюргерса и системы Буссинеска-Бюргерса. Для этих систем найдены пары имплектических операторов. Для системы Буссинеска-Бюргерса получены конечномерные редукции на инвариантные подмногообразия.

Ключевые слова: метод Ли-алгебраических дискретных аппроксимаций, метод конечных элементов, сингулярно возмущенная краевая задача, уравнения адвекции, система адвекции-диффузии-реакции, законы сохранения, конечномерные инвариантные редукции.

ABSTRACT

Kindybaliuk A.A. Numerical study of dynamical systems based on finite element method and Lie-algebraic discrete approximations. - Manuscript.

Thesis for a PhD degree in physics and mathematics, speciality 01.01.07 – Computational Mathematics. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2015.

The thesis deals with numerical investigation of dynamical systems upon finite element method and the generalized Lie-algebraic discrete approximations, namely dynamic systems with advection, diffusion and dispersion processes.

The generalized method of Lie-algebraic discrete approximations for linear differential equations have been proposed in the thesis. The main difference from the classical method of Lie-algebraic discrete approximations is sampling both spatial and time variable, reaching rapid convergence order sequences are obtained.

Piecewise power basis functions are proposed for singularly perturbed boundary value problems are applicable for both the advection-diffusion problems with constant coefficients and with variable coefficients. The new approach to finding conservation laws of nonlinear dynamical systems is proposed, namely the combined algorithm for finding conservation laws which was applied for generalized Burgers' type nonlinear dynamic system and Boussinesq-Burgers' system. For these systems have been found the pair of implectic operators. Finite dimensional reduction on invariant submanifold has been obtained for Boussinesq-Burgers'.

Key words: Lie-algebraic method of discrete approximations, finite element method, singular perturbed boundary value problem, advection equation, advection-diffusion-reaction system, conservation laws, finite dimensional invariant reduction.