Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

На правах рукопису

УДК 517.95

Лопушанський Андрій Олегович

ЛІНІЙНІ ТА НЕЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ НА КОМПЛЕКСНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ШКАЛАХ

01.01.02 диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант:
Загороднюк Андрій Васильович
доктор фіз.-мат. наук, професор

Львів – 2016

Зміст

Перелік умовних позначень

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел,

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$\Omega = \Omega_0$ – обмежена область в $\mathbb{R}^n$,

$\Omega_1 = S = \partial\Omega$,

$\nu(x)$ – орт внутрішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$ у точці $x \in \partial\Omega$,

$Q_T = \Omega \times (0, T]$,

$Q_{1T} = \partial\Omega \times (0, T]$,

$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ $(\gamma_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, \ldots, n)$– мультиіндекс,

$|\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$, $D_{x_j}^{\gamma_j} = (i\frac{\partial}{\partial x_j})^{\gamma_j}$, $j = \overline{1, n}$, $D_x^\gamma = D_{x_1}^{\gamma_1} \ldots D_{x_n}^{\gamma_n}$,

$\bar{\gamma} = (\gamma, \gamma_0)$, $|\bar{\gamma}| = |\gamma| + \alpha\gamma_0$, $\quad D^{\bar{\gamma}} = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \ldots \partial x_n^{\gamma_n}} (\frac{\partial}{\partial t})^{\gamma_0}$,

$x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\gamma_n}$,

$i^2 = -1$,

$\mathcal{E}(\mathcal{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – простір нескінченно диференційовних функцій в $\mathbb{R}^n$,

$\mathcal{D}(\mathcal{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ та $\mathcal{D}(Q)$ – простори нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями відповідно в R^n та Q,

$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — простір швидко спадаючих функцій із $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, тобто таких $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, що для довільних мультиіндексів β, γ функції $x^\beta D^\gamma \varphi$ є обмеженими,

штрихами позначаємо простори лінійних неперервних функціоналів на відповідних просторах функцій (простори узагальнених функцій), наприклад,

$\mathcal{D}'$ — простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}$,

$\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{S}$, що називається простором повільно зростаючих узагальнених функцій,

$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(R^n) = \left(C^\infty(R^n)\right)'$ – простір фінітних узагальнених функцій,

$\underset{S'}{=}$ – збіжність у просторі S',

$supp\ f$ – носій узагальненої функції f,

(f,φ) – значення узагальненої функції f на основній функції φ,

$\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0) = \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}_0) : (v(\cdot,t),\varphi(\cdot)) \in C[0,T] \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}[0,l]\}$,

$D'_+(R) = \{f \in D'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ for } t < 0\}$,

$f_\beta(t) = \frac{\theta(t)t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ при $\beta > 0$ та $f_\beta(t) = f'_{1+\beta}(t)$ при $\beta \le 0$, $1+\beta > 0$

$\theta(t)-$ функція Хевісайда,

$\Gamma(\lambda)$ – гама-функція,

$u^{(\beta)}u = f_{-\beta} * u$ – похідна (Рімана-Ліувілля) дробового порядку β,

$D^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{v_\tau^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{m-\beta}}d\tau$, $t \in [0,T]$ – регуляризована похідна функції v порядку $\beta \in (m-1;m)$, $m \in \mathbb{N}$, $D^1 v(t) = \frac{dv(t)}{dt}$,

$D^\beta_\varepsilon v(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\frac{d}{dt}\int\limits_\varepsilon^t \frac{v_\tau^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{m-\beta}}d\tau$, $t \in [\varepsilon,T]$, $\beta \in (m-1;m)$, $m \in \mathbb{N}$,

$V = \{V_0;V_1\}$ – пара банахових просторів $(V_0,\|\cdot\|_0)$ та $(V_1,\|\cdot\|_1)$ над $\mathbb{C}$ з неперервним та щільним вкладенням $E_{10} : V_1 \to V_0$,

$\omega_0 \in (\pi/2,\pi)$,

$\Lambda_0 = \left\{re^{i\omega} : \omega \in [-\omega_0,\,\omega_0],\, r > 0\right\}$, його замикання $\Lambda = \Lambda_0 \bigcup \left\{0\right\}$,

$\mathcal{A}$ – клас секторіальних замкнених лінійних операторів A над V_0 з областю визначення V_1: $A \in \mathcal{A} <=> A \in \mathcal{L}(V_1;V_0)$ та

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} = K(A) < \infty,$$

оператори класу $\mathcal{A}$ мають від'ємний тип $r(A) = \{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$,

$R(\lambda,A) = E_{10}\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}$ – резольвента оператора A,

$\mathcal{L}(\cdot)$ – простір лінійних неперервних операторів,

$\Phi_A(t) = e^{At}$ – півгрупа, породжена оператором A,

$S_{\beta,A}(t)h = \int\limits_0^\infty \frac{t}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\frac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}})\Phi_A(s)hds$, де

$g_\beta(t)$ – прообраз перетворення Лапласа для $exp(-\lambda^\beta)$,

$\Gamma_{a,\omega} := \Gamma^+_{a,\omega} \bigcup \Gamma^-_{a,\omega} \bigcup \Gamma^0_a$, числа $\omega : \omega_0 - c \le \omega \le \omega_0$, $\omega_0 - c \in (\pi/2,\pi)$ та $a > 0$ є фіксованими, $\Gamma^+_{a,\omega} := \left\{re^{i\omega} : r \ge a\right\}, \Gamma^-_{a,\omega} := \left\{re^{-i\omega} : r \ge a\right\}$, $\Gamma^0_a := \left\{ae^{i\tau} : \tau \in \left[\omega, 2\pi - \omega\right]\right\}$,

V_ϑ – область визначення фіксованого замкненого оператора $(-J)^\vartheta =$

$\big[(-J)^{-\vartheta}\big]^{-1}\,:\,V_\vartheta \longmapsto V_0\ \ (J\in\mathcal{A}),\ \|x\|_\theta=\big\|(-J)^\vartheta x\big\|_0,\ x\in V_\vartheta,\ V_\vartheta=\big[\cdot,\cdot\big]_\vartheta$ — проміжний для інтерполяційної пари $\big\{V_0;V_1\big\}$, породжений комплексним методом інтерполяції,

$$C^{\beta,\eta}=C^{\beta,\eta}[0,T]:=\Big\{v\in C\big([0,T];V_{1+\eta}\big):\exists D_t^\beta v\in C_b\big((0,T];V_\eta\big),$$
$$\|v\|_{C^{\beta,\eta}}=\|v\|_{\beta,\eta}=\max\big\{\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{V_{1+\eta}},\ \sup_{t\in(0,T]}\|D^\beta v(t)\|_{V_\eta}\big\}<\infty\Big\},$$

символи $\mathcal{F}$ та $\mathcal{F}^{-1}$, якщо не вказано нічого додатково, позначають відповідно оператори перетворення Фур'є та оберненого перетворення Фур'є $\mathcal{F}[f(x)]=\widehat{f}(\xi)$; $\mathcal{F}^{-1}:\widehat{f}(\xi)\to f(x)$,

$$L_p(\mathbb{R}^n)=\Big\{f:\ \|f\|_{L_p}=\big(\textstyle\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx\big)^{\frac{1}{p}}<\infty\Big\},\ 1\le p<\infty,$$
$$L_\infty(\mathbb{R}^n)=\Big\{f:\ \|f\|_{L_\infty}=\operatorname{vrai\,max}_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|<\infty\Big\},$$
$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n)=\Big\{v\in S'(\mathbb{R}^n):\|v\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}=\big\|\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}v]\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}<\infty\Big\}$$ – простір беселевих потенціалів [141, с. 79],

$$C\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)=\Big\{v:\|v\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}=\max_{t\in[0,T]}\|v(\cdot,t)\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}<\infty\Big\}$$

– простір неперервних функцій $v\colon[0,T]\ni t\longmapsto v(\cdot,t)\in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)=\Big\{v\in C\big([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big):$$
$$D_t^\beta v,(-\Delta)^{\alpha/2}v\ \in\ C_b\big((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)\Big\}$$ –

підпростір з нормою $\big\|v\big\|_{C_{\alpha,\beta}\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)}=$

$$=\max\Big\{\|v\|_{C([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))},\|(-\Delta)^{\alpha/2}v\|_{C_b((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))},\|D_t^\beta v\|_{C_b((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}\Big\}.$$

$H^{s,p}(\Omega)=H_p^s(\Omega)$ – простір звужень на Ω елементів простору $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ з нормою $\|g\|_{H^{s,p}(\Omega)}=\inf\limits_{v\in H^{s,p}(\mathbb{R}^n),\,v|_\Omega=g}\|v\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$ при $s\ge 0$, дуальний до $H^{-s,p'}(\Omega)$ відносно скалярного добутку $(\cdot,\cdot)$ в $L_2(\Omega)$ при $s<0$ $\big(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\big)$: $\|g\|_{H^{s,p}(\Omega)}=\sup\limits_{v\in H^{-s,p'}(\Omega)}\frac{|(g,v)|}{\|v\|_{H^{-s,p'}(\Omega)}}$ ($H^{s,p}(\Omega)$ ізометрично еквівалентний підпростору $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ з елементами, що мають носії в $\bar{\Omega}$),

$H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\ :=\ \Big\{v\ \in\ H_p^{2m}(\Omega)\ :\ B_j(x,D)v_{\,|\,\partial\Omega}\ =\ 0;\ j\ =\ \overline{1,m}\Big\}$ з нормою простору беселевих потенціалів $H_p^{2m}(\Omega)$ порядку $2m$, це щільний в $L_p(\Omega)$ підпростір, замкнений в $H_p^{2m}(\Omega)$,

$B^{s,p}(\Omega_1)$ при $s>0$ співпадає з простором слідів на S елементів із

$H^{s+\frac{1}{p},p}(\Omega)$, норма еквівалентна нормі $||g||_{s,p} = \inf\limits_{v\in H^{s+\frac{1}{p},p}(\Omega), v|_S=g} ||v||_{H^{s+\frac{1}{p}}(\Omega)}$, а при $s<0$ є спряженим відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega_1)$ до простору $B^{-s,p'}(\Omega_1)$,

$C^{\beta,\eta}\big(H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big) = W_{\beta,\eta}(T) = W_{\beta,\eta} =$

$\big\{v \in C\big([0,T]; H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big) \colon D^\beta_t v \in C_b\big((0,T]; H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big)\big\}$,

$W_{\beta,\eta,C} = \big\{v \in W_{\beta,\eta} : ||v||_{\beta,\eta} \le C\big\}$ – замкнена куля в $W_{\beta,\eta}$,

$C^{\alpha,\beta}(Q_T)$ – клас неперервних обмежених функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$, рівних нулю при $t \ge T$ та з неперервними функціями $(-\Delta)^{\alpha/2}v$, $D^\beta_t v$ в Q_T,

$C^k(Q_T)$ – простори Гельдера функцій φ з неперервними $D^{\bar\gamma}\varphi$, $|\bar\gamma| \le [k]$ та (при нецілому k) скінченними

$$\sum_{0<|\bar\gamma|=[k]} \sup_{(x,t),(y,\tau)\in Q_T, x\ne y} \frac{\Delta^y_x D^{\bar\gamma}_{x,t}\varphi(x,t)}{|x-y|^{k-[k]}}, \quad \sum_{0<k-|\bar\gamma|<\frac{\alpha}{\beta}} \sup_{(x,t),(y,\tau)\in Q_T, t\ne\tau} \frac{\Delta^\tau_t D^{\bar\gamma}_{x,t}\varphi(x,t)}{|t-\tau|^{(k-|\bar\gamma|)[\frac{\alpha}{\beta}]}},$$

де $\Delta^y_x\psi(x,t) = \psi(y,t) - \psi(x,t)$, $\Delta^\tau_t\psi(x,t) = \psi(x,\tau) - \psi(x,t)$,

$C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C^\infty(\bar{Q}_T) : D^l_t\varphi|_{t=T} = 0,\ l = 0,1,2,\dots\}$,

$C^k_0(\bar{Q}_T)$ – простори функцій із $C^k(\bar{Q}_T)$ з компактними носіями,

$C^{k,(0)}_0(\bar{Q}_T) = \big\{\varphi \in C^k_0(\bar{Q}_T) : D^l_t\varphi|_{t=T} = 0,\ l = 0,1,2,\dots,[\frac{\alpha}{\beta}]\big\}$,

$\mathcal{D}(\bar{Q}_T) = C^{\infty,(0)}_0(\bar{Q}_T)$,

$C^0[0,T] = \{\varphi \in C[0,T] : \varphi|_{t=T} = 0\}$,

$D^0[0,T] = \{\varphi \in C^\infty[0,T] : D^l_t\varphi|_{t=T} = 0,\ l \in \mathbb{Z}_+\}$,

$C^0 = C^0(V) = C^0\big([0,T];V\big) = \{\varphi \in C\big([0,T];V\big) : \varphi|_{t=T} = 0\}$,

$D^0 = D^0(V) = D^0\big([0,T];V\big) = \{\varphi \in C^\infty\big([0,T];V\big) : D^l_t\varphi|_{t=T} = 0,\ l \in \mathbb{Z}_+\}$,

$C^\beta = C^\beta(V) = C^\beta\big([0,T];V\big)$ – клас функцій $v \in C^0\big([0,T];V\big)$, для яких існують неперервні на $(0,T]$ функції $D^\beta_t v$,

$\rho(t)-$ функція із $D^0[0;T]$, додатна на $(0;T)$, яка має порядок t при $t \to 0$ ($\lim\limits_{t\to 0+} \frac{\rho(t)}{t} = const$) та $0 \le \rho(t) \le 1$, $t \in [0;T]$,

$M_k = M_k(V) = \Big\{u \in L_{1,loc}\big((0,T];V\big) : \|u\|_k = \int_0^T \rho^k(t)||u(t)||_V dt < \infty\Big\}$,

$\mathcal{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x)] = |\lambda|^\alpha \mathcal{F}[\psi(x)]$,

$E_{\beta,\gamma}(z) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p\beta+\gamma)}$ – функція Міттаг-Лефлера [29],

$H_{p,q}^{m,n}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)$–H-функція Фокса [207],

$a^* = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum_{i=n+1}^{p}\alpha_i + \sum_{i=1}^{m}\beta_i - \sum_{i=m+1}^{q}\beta_i\,,$

$\Delta^* = \sum_{i=1}^{q}\beta_i - \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\,.$

Вступ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена знаходженню достатніх умов існування та максимальної регулярності розв'язків лінійних та нелінійних операторних рівнянь, зокрема, задачі Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною та її окремих випадків – нормальних параболічних крайових задач із застосуванням побудованого функціонального числення необмежених секторіальних операторів, встановленню однозначної розв'язності прямих і обернених задач Коші та крайових задач для рівнянь із дробовими похідними у класах гладких та узагальнених функцій.

Функціональне числення обмежених операторів над банаховими просторами в класі аналітичних функцій побудовано Ф. Ріссом та Н. Данфордом на базі інтегральної теореми Коші. С. Тейлор поширив ці результати на деякі необмежені оператори, А. Пазі та Х. Хейманс, С. Ангенент і інші – на генератори аналітичних півгруп у банахових просторах. Актуальною є побудова функціонального числення важливих у застосуванні секторіальних операторів, зокрема, побудова функціонального числення генераторів однопараметричних груп автоморфізмів, що діють на апроксимовних алгебрах Вінера аналітичних комплекснозначних функцій, заданих в одиничній кулі рефлексивного банахового нескінченно-вимірного простору.

В дисертаційній праці досліджуються автономні лінійні параболічні рівняння в абстрактних, а також у функціональних банахових просторах, їхні лінійні та нелінійні збурення. Абстракна теорія автономних параболічних рівнянь в термінах аналітичних півгруп розроблена, зокрема, в працях Е. Хілле і Р. Філіпса (1962), К. Іосіди (1967), С. Г. Крейна (1967), М. Ріда і Б. Саймона (1978), В. І. Горбачук та М. Л. Горбачука (1984), Ф. Клемента, Х. Хейманса,

С. Ангенента, К. ван Дуйна, Б. де Пахтера (1992). Теорії абстрактних неавтономних параболічних рівнянь присвячено праці П. Е. Соболевского (1964), Х. Танабе (1979), А. Пазі (1983), Д. Хенрі (1985), Х. Аманна (1995), А. Лунарді (1995). Теорія збурень таких рівнянь викладена в книгах Т. Като (1966), В. П. Маслова (1987).

В дисертації використовується техніка інтерполяції банахових просторів. Метод комплесної інтерполяції введено Ж.-Л. Ліонсом, А. П. Кальдероном і С. Г. Крейном. Інтерполяційна техніка дослідження абстрактних параболічних задач розвинена в роботах Ф. Клемента, Х. Хейманса, С. Ангенента, К. ван Дуйна, Б. де Пахтера, Х. Аманна, Д. Хенрі, А. Лунарді, П. Грівара і Г. да Прато. Застосування інтерполяційних методів до диференціальних параболічних граничних задач базується на апріорних оцінках розв'язків відповідних еліптичних задач, встановлених у працях С. Агмона, А. Дугліса, Л. Ніренберга, Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса, Ю. М. Березанського, П. Грівара і Г. Геймонта, Л. Р. Волєвіча, В. А. Михайлеця, О. О. Мурача та ін.

У відомих працях С. Агмона, А. Дугліса, Л. Ніренберга (1959) і С. Агмона (1962) знайдено алгебричні умови, при яких диференціальна еліптична крайова задача в обмеженій області генерує аналітичну півгрупу. Так серед автономних лінійних еволюційних диференціальних рівнянь було виділено клас диференціальних рівнянь параболічного типу, які можуть досліджуватися методами теорії аналітичних півгруп.

Для оператора A, що не залежить від змінної $t \in [0,T]$ та є генератором аналітичної півгрупи [43], [140] в деякому банаховому просторі $(V_0, ||\cdot||)$ із щільною областю визначення $V_1 \subset V_0$ відоме існування єдиного класичного розв'язку $v \in C([0,T];V_1) \cap C^1((0,T]);V_0)$ задачі Коші

$$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + f(t), \quad t \in \big(0,T\big], \quad v(0) = h\,,$$

якщо f задовольняє умову Гельдера. Роботи П. Грівара і Г. да Прато зосереджені на ослабленні умов щодо f, за яких задача розв'язна, тобто, так званій проблемі максимальної регулярності. У дисертації продовжено такі до-

слідження задачі Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною за часом, зокрема, для наведеної вище задачі Коші.

Актуальним також є проведене у дисертаційній роботі дослідження розв'язності задачі Коші для абстрактного параболічного рівняння (та з дробовою похідною за часом) з необмеженим оператором у банаховому просторі V_0 із щільною областю визначення $V_1 \subset V_0$, збуреного на інтерполяційному просторі пари $\{V_0, V_1\}$ без обмеження на норму збурюючого оператора та знаходження на базі функціонального числення секторіальних операторів у банаховому просторі оцінок аналітичних наближень розв'язку. Збурення вивчаються за допомогою техніки дробових степенів секторіальних операторів.

Проведене у дисертації дослідження диференціальних мішаних задач параболічного типу базується, зокрема, на результатах Р. Сілі [270] та П. Грівара [192] про комплексну інтерполяцію функціональних просторів, які задовольняють крайові умови регулярності Шапіро-Лопатинського.

В праці А. Н. Кочубея [45] та в монографії [183] доведена теорема існування та єдиності, а також одержано зображення за допомогою функції Гріна класичного розв'язку задачі Коші

$$D_t^\beta u(x,t) = A(x,D)u(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T],$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

з регуляризованою похідною функції u порядку $\beta \in (0,1)$

$$D_t^\beta u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta}d\tau - \frac{u(x,0)}{t^\beta}\right),\ (x,t) \in R^n \times [0,T],$$

неперервною функцією g_1 певного росту на безмежності та еліптичним диференціальним оператором другого порядку $A(x,D)$ з гладкими коефіцієнтами, залежними від просторової змінної $x \in \mathbb{R}^n$. У випадку $\beta > 1$ та $A(x,D) = \Delta$ класичний розв'язок відповідної задачі Коші побудовано у [9]. Одержано зображення класичного розв'язку за допомогою функції Гріна.

В [232, 237] знайдено умови класичної розв'язності першої крайової задачі

для рівняння

$$D_t^\beta u - a^2 \Delta u = F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \;\; a = const$$

в обмеженій області $\Omega \in \mathbb{R}^N$. Крайові задачі для рівнянь із декількома дробовими похідними вивчались у [19, 59, 121] та інших працях.

Рівняння з дробовими похідними описують різні процеси в сильно неоднорідних середовищах та є предметом дослідження у багатьох працях з математики [9, 191, 29, 173, 281] та прикладних галузей. Тому актуальним є вивчення крайових задач для рівнянь із дробовими похідними не тільки в просторах гладких, а також у просторах різних узагальнених функцій. Крайові задачі для рівнянь із частинними похідними у різних просторах узагальнених функцій достатньо повно досліджені (див. [3, 8, 16, 19, 21-24, 38, 60, 113-115, 145, 146, 211-213] та бібліографію).

Обернені коефіцієнтні крайові задачі для рівняння дифузії з дробовою похідною з різними невідомими функціями чи параметрами вивчались у [175, 243, 261] та інших працях, де доведено теореми існування та єдиності. Такі задачі важливі для практики. У просторах узагальнених функцій такі задачі поки-що не вивчались. Тому актуальним є вивчення нових обернених крайових задач як у просторах гладких, так і у просторах різних узагальнених функцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження дисертації пов'язані з науковими дослідженнями кафедри математичного та функціонального аналізу факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника. Дисертація виконана, зокрема, в рамках науково-дослідних тем у ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" : "Розробка аналітичних методів у нескінченновимірному комплексному аналізі та теорії операторів" (номер держреєстрації 0113U000184), "Гомоморфізми та функціональне числення в алгебрах аналітичних функцій на банахових просторах" (номер держреєстрації 0115U002305).

Мета і задачі дослідження.

Метою дисертаційної роботи є встановлення існування та максимальної регулярності розв'язків нелінійних операторно-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна з дробовими похідними та ядрами на комплексних інтерполяційних шкалах, породжених необмеженими секторіальними операторами, задачі Коші для рівнянь із дробовою похідною при їх лінійних та нелінійних збуреннях, головним чином шляхом застосування функціонального числення секторіальних операторів, а також дослідження розв'язності прямих та обернених крайових задач для рівнянь із дробовими похідними у класах гладких та узагальнених функцій.

Задачі дослідження полягають у побудові та знаходженні достатніх умов максимальної регулярності розв'язків задачі Коші для лінійних рівнянь із дробовою похідною, побудові наближень розв'язків таких задач для рівнянь, збурених на комплексних інтерполяційних шкалах оператора, розв'язками незбурених задач, у застосуванні одержаних результатів до регулярних еліптичних диференціальних операторів, у знаходженні достатніх умов існування та максимальної регулярності розв'язків нелінійних операторно-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна та застосуванні одержаних результатів до задачі Коші для півлінійних рівнянь із дробовою похідною, доведенні теорем існування та єдиності розв'язків прямих та обернених крайових задач для рівнянь із дробовими похідними у класах гладких та узагальнених функцій.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є задача Коші для абстрактних рівнянь із дробовою похідною, її лінійні та нелінійні збурення, нормальні крайові задачі для параболічних рівнянь із дробовими похідними та їх збурення, задача Коші та неоднорідні крайові задачі для рівнянь із дробовими похідними у різних просторах узагальнених функцій, обернені задачі для рівнянь із дробовими похідними та правими частинами з просторів гладких чи узагальнених функцій, функції від секторіальних операторів у банахових просторах і апроксимовних алгебрах Вінера, лінійні та нелінійні збурення

секторіальних операторів, операторні нелінійні рівняння на комплексних інтерполяційних шкалах довільного секторіального оператора.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є побудова розв'язків задачі Коші за допомогою функцій від необмежених секторіальних операторів у абстрактних банахових просторах та у алгебрах Вінера, розв'язність та максимальна регулярность розв'язків нелінійних операторно-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна на комплексних інтерполяційних шкалах оператора ядра, задачі Коші для абстрактних лінійних та півлінійних рівнянь із дробовою похідною, зокрема, збурених на комплексних інтерполяційних шкалах банахового простору, конкретизація на випадок регулярних еліптичних диференціальних операторів, побудова фундаментальних функцій деяких рівнянь із дробовими похідними за часовою та просторовими змінними, знаходження їх оцінок, вивчення спряжених операторів Гріна крайових задач, теореми існування та єдиності розв'язків прямих та обернених задач для рівнянь із дробовими похідними та правими частинами із просторів узагальнених функцій, зокрема, зі значеннями в просторах беселевих потенціалів.

Методи дослідження. Методи теорії диференціальних рівнянь та функціонального аналізу, зокрема, операторне числення, дробове диференціювання, метод комплексної інтерполяції, метод Радона, метод функції Гріна, застосування H-функцій Фокса, принципів Шаудера та стисних відображень.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати, що виносяться на захист, одержані автором самостійно. У роботі одержані такі нові результати:

- Описано властивості числення широких класів секторіальних операторів, що діють на банахових просторах та на апроксимовних алгебрах Вінера аналітичних в одиничній кулі банахового нескінченновимірного простору функцій, розвинуто їх застосування до дослідження задачі Коші для рівнянь із дробовими похідними.

- Одержано нові достатні умови розв'язності та максимальної регулярності розв'язків нелінійних операторно-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна на комплексних інтерполяційних шкалах секторіального оператора.

- Одержано нові достатні умови розв'язності та максимальної регулярності розв'язків задачі Коші для абстрактних лінійних та півлінійних рівнянь із дробовою похідною, нормальних параболічних крайових задач із дробовою похідною за часом.

- Використовуючи аналітичні властивості числення секторіальних операторів, побудовано новий метод наближення розв'язку задачі Коші для операторно-диференціального рівняння з дробовою похідною, збуреного на комплексних інтерполяційних шкалах секторіального оператора, без обмеження на норму збурюючого оператора.

- Побудовано наближення розв'язків нормальних параболічних крайових задач, збурених псевдодиференціальними доданками, ітераціями операторів Гріна незбурених задач.

- Вперше досліджено узагальнені початкові значення регулярних розв'язків півлінійних абстрактних рівнянь зі збуреною дробовою похідною.

- Вперше встановлено однозначну розв'язність задачі Коші для операторно-диференціального рівняння з дробовою похідною у вагових просторах узагальнених функцій.

- Одержано теореми про існування та єдиність розв'язків задачі Коші для рівнянь із дробовими похідними як за часовою, так і за просторовими змінними, нормальних параболічних крайових задач для рівнянь із дробовою похідною за часом у просторах узагальнених функцій, зокрема, теореми про існування та єдиність класичних за часом зі значеннями в просторах беселевих потенціалів розв'язків таких задач.

- Вперше сформульовано та встановлено однозначну розв'язність деяких обернених задач Коші та крайових задач для диференціальних рівнянь із дробовими похідними, також при заданих у правих частинах узагальнених функціях.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має теоретичне значення і результати її досліджень є певним внеском у теорію розв'язності операторно-диференціальних рівнянь, теорію максимальної регулярності розв'язків операторних та диференціальних рівнянь із частинними та дробовими похідними, в теорію обернених крайових задач для таких рівнянь. Їх можна застосовувати й у теорії аналітичних функцій нескіченої кількості змінних та нелінійному аналізі.

Особистий внесок здобувача. Із 29 наукових статей 17 опубліковано дисертантом одноосібно. Усі результати, винесені на захист, отримані автором самостійно. У всіх спільних працях Лопушанській Г.П. належить аналіз одержаних результатів, у [56] автору належить вибір функціональних просторів, у [62] – ідея збурення дробової похідної та одна з основних лем (лема 2), у [63] – формулювання 2 задачі та формула розв'язку задачі у випадку однорідного рівняння, у [103] автору належить формулювання задачі та методика її дослідження, у [66, 214] автору належить основний результат.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на: конференціях молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. ак. Я.С. Підстригача (24-26 травня 2004 р., м. Львів; 24-27 травня 2005 р., м. Львів; 25-27 травня 2009 р., м. Львів), II summer school in algebra, analysis and topology (Aug. 2-14, 2004, Dolyna), міжнародних математичних конференціях імені В.Я. Скоробогатька (27 вересня-1 жовтня 2004 р., м. Дрогобич; 24-28 вересня 2007 р., м. Дрогобич; 10-23 вересня 2011 р., м. Львів), міжнародній конференції "Геометрія в Одесі – 2004. Диференціальна геометрія та її застосування"(17-29 травня 2004, м. Одеса), International conference of analysis and related topics (Nov. 17-

20, 2005, Lviv), International conference on Differential Equations – Dedicated to the 100-th Anniverversary of Ja. B. Lopatynsky (Sept. 12-17, 2006, Lviv), міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування"(11-14 жовтня 2006р., м. Чернівці), Conf. on Numerical Analysis and Applied Mathematics (Rethym, Greece, 18-22 Sept. 2009), міжнародній конференції "Нескінченновимірний аналіз і топологія"(27 травня–1 червня 2009 р., м. Івано-Франківськ), міжнародній конференції до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди (8-13 червня 2009 р., м. Чернівці), міжнародній науковій конференції імені Академіка Михайла Кравчука (15-17 травня 2010 р., м. Київ), всеукраїнській науковій конференції "Застосування математичних методів в науці і техніці"(24-26 листопада 2011 р., м. Луцьк), Всеукраїнській науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці" (11-15 червня 2012р., м. Чернівці), International conference on Differential Equations – Dedicated to Ja. B. Lopatynsky (Nov. 12-17, 2012, Donetsk), International conference dedicated to the 120-th Anniverversary of S. Banach (Sept. 17-21, 2012, Lviv), міжнародній конференції "Геометрія в Одесі – 2012. Диференціальна геометрія та її застосування"(червень 2012, м. Одеса), XIV Міжнародній конференції імені академіка Михайла Кравчука, присвяченій 120-й річниці до дня народження М. Кравчука (19-21 квітня 2012 р., м. Київ), "Нелінійні проблеми аналіу"(19-22 вересня 2013 р., м. Івано-Франківськ), науковій конференції DDELU-60, присвяченій 60-річчя кафедри диференціальних рівнянь ЛНУ імені Івана Франка (18-19 жовтня 2013 р., м. Львів), XV Міжнародній конференції імені академіка Михайла Кравчука, присвяченій 120-й річниці до дня народження М. Кравчука (19-21 кв. 2014 р., м. Київ), IV міжнароднвй Ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (30 червня–5 липня 2014 р., м. Чернівці), Int. V. Skorobohatko Math. Conf. (August 25-28, 2015, Drogobych, Ukraine), міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвяченій 70-річчю ак. НАН України Перестюку М.О. (19-21 травня 2016 р., Ужгород), семінарах ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України

(м. Львів), факультету прикладної математики Національного університету "Львівська політехніка"(м. Львів), кафедри математичного та функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (м. Івано-Франківськ), на наукових конференціях та семінарах із диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 53 працях, серед них 29 статей у наукових фахових виданнях (8 статей – у журналах, що входять до науковометричних баз даних Web of Science чи Scopus), 24 – у матеріалах і тезах конференцій.

Структура і об'єм роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів, висновків і списку використаних джерел, що містить 282 найменування. Загальний об'єм дисертації – 310 сторінок, з яких 21 сторінок займає список використаних джерел.

Розділ 1

Огляд літератури, термінологія та основні напрямки досліджень

1.1 Огляд літератури за темою дисертації

У дисертаційній праці досліджуються автономні лінійні рівняння з дробовою похідною в абстрактних та функціональних банахових просторах, їхні лінійні та нелінійні збурення. Абстракна теорія автономних параболічних рівнянь викладена, зокрема, в книгах Е. Хілле і Р. Філіпса [147] (1962), К. Іосіди [39] (1967), С.Г. Крейна [50] (1967), М. Ріда і Б. Саймона [128]–[129] (1978), В.І. Горбачук та М.Л. Горбачука [16] (1984), Ф. Клемента, Х. Хейманса, С. Ангенента, К. ван Дуйна, Б. де Пахтера [43] (1992), а теорія абстрактних неавтономних параболічних рівнянь – у працях П.Е. Соболевского [134] (1064), Х. Танабе [272] (1979), А. Пазі [246] (1983), Д. Хенрі [143] (1985), Х. Аманна [154] (1995), А. Лунарді [233] (1995). Теорія збурень таких рівнянь викладена в книгах Т. Като [206] (1966), В.П. Маслова [110]–[111] (1987).

У працях С. Агмона, А. Дугліса, Л. Ніренберга [151] (1959) і С. Агмона [151] (1962) знайдено алгебричні умови, при яких диференціальна еліптична крайова задача в обмеженій області, що задовольняє умови регулярності Шапіро-Лопатинського (див. [54]), генерує аналітичну півгрупу. Таким чином, серед автономних лінійних еволюційних диференціальних рівнянь було виділено клас диференціальних рівнянь параболічного типу, які можуть до-

сліджуватися методами теорії аналітичних півгруп. У ряді важливих часткових випадків така теорія викладена в книгах Н. Данфорда і Дж.Т. Шварца [28] (1967), Ж.Л. Ліонса і Е. Мадженеса [52] (1971).

Теорія крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь параболічного типу за Петровським, а також наступних їх узагальнень, широко висвітлена у вітчизняній літературі: у працях Т. Я. Загорского [40] (1961), С. Д. Ейдельмана [150] (1964), С. Д. Івасишена [36] (1987), С. Д. Ейдельмана, С. Д. Івасишена та О. Н. Кочубея [183]. До цього напрямку відносяться також відомі книги О. А. Ладиженської, В. А. Солоннікова, Н. Н. Уральцевої [53] (1967), А. Фрідмана [142] (1968) та інших.

У дисертаційній праці істотно використовується метод комплесної інтерполяції, введений Ж.-Л. Ліонсом [212], А. П. Кальдероном [171]–[172] і С. Г. Крейном [50]. У праці ми використовуємо виклад цього методу у книгах Х. Трібеля [140], Й. Берга і Й. Лефстрема [5], В. Михайлеця та О. Мурача [113]. Відзначимо, що метод дійсної інтерполяції розроблений у працях Ж.-Л. Ліонса [211] та Ж. Петре [247, 248].

Інтерполяційна техніка дослідження абстрактних параболічних задач розвинена в працях П. Грівара і Г. да Прато [255, 256], Г. да Прато [254]. Їх праці зосереджені на послабленні умов Ліпшиця щодо неоднорідної частини рівняння, тобто, так званій проблемі максимальної регулярності. Інтерполяційна техніка дослідження еліптичних операторів та проблема максимальної регулярності розв'язків еліптичних крайових задач викладена у монографії В.А. Михайлеця та О.О. Мурача [113].

Застосування інтерполяційних методів до диференціальних параболічних крайових задач базується на апріорних оцінках розв'язків відповідних еліптичних задач, встановлених у працях С. Агмона, А. Дугліса, Л. Ніренберга [151], Ж.Л. Ліонса і Е. Мадженеса [52], Ю.М. Березанського [3], П. Грівара і Г. Геймонта [195] та ін.

До дослідження збурень абстрактних параболічних задач методи інтерполяції застосовуються у працях Ф. Клемента, Х. Хейманса, С. Ангенента,

К. ван Дуйна, Б. де Пахтера [43], Х. Аманна [154], А. Лунарді [233]. У праці Д. Хенрі [143] збурення вивчаються за допомогою техніки дробових степенів секторіальних операторів.

Дослідження диференціальних крайових задач параболічного типу в дисертації базується, зокрема, на результатах Р. Сілі [270] та П. Грівара [192] про комплексну інтерполяцію просторів функцій, які задовольняють крайові умови.

Розв'язність абстрактної задачі Коші та її аналога для рівнянь із дробовою похідною $\beta \in (0,1)$ за часом досліджувалась у багатьох працях ([44, 45, 183, 9, 160, 161, 163, 173, 174, 177, 178, 14, 191, 237, 257, 277,263, 280,281] та бібл.)

Дослідження задач вигляду

$$D^{\beta}v(t) = Av(t) + f_{1-\beta}(t)v(0), \qquad v(0) = h$$

за допомогою еквівалентних лінійних інтегральних рівнянь проводилось, зокрема, у [280], дослідження рівняння

$$D^{\beta}u(t) = Au(t) + D_t^{\beta-1}g(t) \text{ при } \beta \in (1,2)$$

проводилось у [178], задачі

$$D^{\beta}u(t) = Au(t) + A_1(t)u(t), \quad \lim_{t\to 0} D_t^{\beta-1}u(t) = h$$

за умови, що $A_1(t)$ підпорядкований оператору $(-A)^{\gamma}$, $\gamma \in (0,1)$ – у [14]. Зауважимо, що інтегральні рівняння в банахових просторах досліджувались у [257].

Часткові випадки таких задач одержимо, коли A є регулярним еліптичним оператором у функційному просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ над обмеженою областю $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, і який задовольняє умови параболічності Агмона.

У цьому випадку задача Коші буде крайовою задачею для неоднорідного диференціального параболічного рівняння.

У дисертаційній роботі знайдено достатні умови максимальної регулярності розв'язків задачі Коші для лінійного та півлінійного рівняння з регуляризованою дробовою похідною $D^{\beta}u(t)$ функції u порядку $\beta \in (0,1)$ на

комплексних інтерполяційних шкалах банахової пари $\{V_0, V_1\}$ необмеженого замкненого лінійного оператора A від'ємного типу в комплексному банаховому просторі V_0 із щільною областю визначення $V_1 \subset V_0$.

У роботах [9, 155, 45, 48, 182] та інших було доведено теореми існування та єдиності, а також одержано зображення за допомогою вектор-функції Гріна класичних розв'язків задач Коші для рівнянь вигляду

$$D_t^\beta u(x,t) = A(x,D)u(x,t),\ (x,t) \in R^N \times [0,T]$$

з еліптичним диференціальним оператором другого порядку $A(x,D)$ та регуляризованою похідною [173, 29] порядку $\beta \in (m-1;m)$, $m \in \mathbb{N}$.

Умови класичної розв'язності першої крайової задачі для рівняння

$$D_t^\beta u(x,t) - a^2 \Delta u(x,t) = F_0(x,t), \quad a^2 = const > 0, \ \ \beta \in (0,1)$$

одержані в [232, 237]. Розв'язки побудовано у вигляді рядів Фур'є за власними функціями відповідних задач Штурма-Ліувілля.

У дисертації одержані теореми існування та єдиності розв'язків задачі Коші та неоднорідних крайових задач для рівнянь із частинними дробовими похідними у випадку правих частин із просторів узагальнених функцій типу D' та S', теореми про максимальну регулярність їх розв'язків зі значеннями у просторах беселевих потенціалів, при цьому також і при коефіцієнтах, залежних від часової змінної.

У випадку $\beta = 1$ обернені коефіцієнтні крайові задачі (коли за додаткових умов, так званих умов перевизначення, потрібно ще додатково визначати деякі коефіцієнти рівняння або інші елементи рівняння) у просторах гладких функцій вивчались у багатьох працях, зокрема у [203], де доведено теореми існування та єдиності. У [175] доведена єдиність розв'язку оберненої крайової задачі для рівняння вигляду

$$D_t^\beta u - a(x)u_{xx} = F_0(x,t), \ \ (x,t) \in (0,l) \times (0,T], \tag{1.1}$$

із невідомими $u(x,t)$, $a = a(x)$, $\beta \in (0,1)$ при крайових умовах Неймана та додатково заданій $u(0,t)$. Обернені крайові задачі для рівняння дифузії з

дробовою похідною з іншими невідомими функціями та параметрами вивчались у [199, 243, 261, 282] та інших працях.

Визначенню регулярної правої частини рівняння при різних умовах перевизначення присвячено найбільше праць. Зокрема, у [184] встановлено однозначну розв'язність задачі про визначення розв'язку u задачі Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною за часом порядку $\beta \in (0,1]$ у гільбертовому просторі X та регулярної правої частини цього рівняння за умови $(u, \varphi_0) = h$ (φ_0, h – задані) та якщо під дужками розуміти скалярний добуток елементів гільбертового простору X.

У дисертації вперше одержані теореми існування та єдиності розв'язків такого типу обернених крайових задач для рівнянь з частинними дробовими похідними у випадку правих частин із просторів узагальнених функцій.

Зупинимось на перспективах розвитку представлених у даній праці досліджень. У дисертації для дослідження абстрактних параболічних рівнянь та їхніх збурень застосовується техніка комплексної інтерполяції банахових просторів. Відзначимо, що у цьому випадку можливе також використання інших методів інтерполяції, зокрема, неперервного методу інтерполяції викладеного, наприклад, Г. да Прато [254]. Такий підхід приведе до опису нових класів збурень на абстрактних просторах типу Гельдера. Техніка еволюційних операторів, розвинена у праці Х. Аманна [154], дозволяє узагальнювати деякі результати про збурення на випадок неавтономних параболічних задач.

Відзначимо, що в праці П. Грівара і Г. Геймонта [195] умови параболічності Агмона узагальнено на випадок необмежених областей, що створює можливість досліджувати також збурення мішаних задач для диференціальних рівнянь в необмежених областях, подібно як це зроблено у дисертації для областей обмежених. В праці А. Лунарді [233] викладено умови параболічності Агмона для просторів типу Гельдера, а також для просторів типу L_1 та L_∞, що не було предметом досліджень дисертаційної праці і що залишає можливість перенесення отриманих результатів на ці складні випадки.

Запропоновані у дисертації методи дослідження задачі Коші, прямих та

обернених крайових задач для рівнянь із дробовими похідними дають можливість знаходити достатні умови їх розв'язності при нових лінійних та нелінійних збуреннях.

1.2 Допоміжні поняття та факти

Наведено основні поняття, що використовуються у дисертаційній праці, основні допоміжні твердження і теореми. Використано означення та відомі факти, зокрема, із [16, 43, 50, 52, 140, 141].

1.2.1 Індуктивні та проективні границі банахових просторів

Лінійний топологічний простір $\mathcal{E}$ називається *локально опуклим*, якщо він має фундаментальну систему опуклих околів нуля, тобто таку множину $\Gamma = \{V^\gamma\}$ околів нуля, що довільний окіл нуля містить окіл із системи Γ.

Цій системі околів відповідає сім'я півнорм. Якщо на лінійному просторі задана сім'я Γ півнорм $p_\gamma(x)$, то на цьому просторі можна визначити локально-опуклу топологію, приймаючи за базу околів нуля сім'ю всіх абсолютно опуклих множин, визначених співвідношеннями $\max\limits_{1\le i\le n} p_{\gamma_i}(x) < \varepsilon$ при довільних натуральних n, $\varepsilon > 0$, $p_{\gamma_i} \in \Gamma$.

Кожна локально опукла топологія в лінійній системі може бути задана таким способом за допомогою відповідної системи півнорм.

У [16, с. 53-54] описані дві конструкції, як виходячи із заданої послідовності локально-опуклих просторів, утворити інший локально-опуклий простір.

Нехай $\{\mathcal{E}_\mu\}_{\mu\in J}$ (μ пробігає деяку впорядковану множину індексів J) – сім'я локально-опуклих просторів $\mathcal{E}_\mu$. Вважаємо, що $\mathcal{E}_{\mu_2} \subset \mathcal{E}_{\mu_1}$ при $\mu_1 < \mu_2$ і вкладення неперервне. Утворимо векторний простір $\mathcal{E}_{pr} = \bigcap_{\mu\in J} \mathcal{E}_\mu$ із такою топологією: за визначальну систему околів нуля приймаємо систему усіх множин $V_\mu(0) \cap \mathcal{E}_{pr}$, $\mu \in J$, де $\{V_\mu(0)\}$– база околів нуля в $\mathcal{E}_\mu$. Такий топологічний простір $\mathcal{E}_{pr}$ є локально-опуклим топологічним простором і називається *проективною границею* сім'ї $\{\mathcal{E}_\mu\}_{\mu\in J}$: $\mathcal{E}_{pr} = limpr\mathcal{E}_\mu$.

Збіжність послідовності елементів $f_\mu \in \mathcal{E}_{pr}$ до $f \in \mathcal{E}_{pr}$ еквівалентна збіжності f_μ до f у кожному $\mathcal{E}_\mu$. Обмеженість множини S у $\mathcal{E}_{pr}$ означає її обмеженість у кожному $\mathcal{E}_\mu$.

Нехай тепер $\{\mathcal{E}_\mu\}_{\mu\in J}$ – така сім'я локально-опуклих просторів $\mathcal{E}_\mu$, що $\mathcal{E}_{\mu_1} \subset \mathcal{E}_{\mu_2}$ при $\mu_1 < \mu_2$ і вкладення неперервне. Утворимо векторний простір $\mathcal{E}_{ind} = \bigcup_{\mu\in J} \mathcal{E}_\mu$ із такою топологією: за визначальну систему околів нуля приймаємо систему усіх множин $\bigcup V_\mu(0)$, $\mu \in J$, де $\{V_\mu(0)\}$– така база околів нуля в $\mathcal{E}_\mu$, що $V_{\mu_1}(0) \subset V_{\mu_2}(0)$ при $\mu_1 < \mu_2$ і вкладення неперервне. Такий топологічний простір $\mathcal{E}_{pr}$ є локально-опуклим топологічним простором і називається *індуктивною границею* сім'ї $\{\mathcal{E}_\mu\}_{\mu\in J}$: $\mathcal{E}_{ind} = limind\mathcal{E}_\mu$.

Зауважимо, що $\mathcal{E}'_{ind} = \bigcap \mathcal{E}'_\mu$, $\mathcal{E}'_{pr} = \bigcup \mathcal{E}'_\mu$. Для сім'ї рефлексивних щільно (або компактно) вкладених один в інший банахових просторів в сильній топології також $\mathcal{E}'_{ind} = limpr_{\mu\in J}\mathcal{E}'_\mu$, $\quad \mathcal{E}'_{pr} = limind_{\mu\in J}\mathcal{E}'_\mu$.

Нехай U, V – замкнені абсолютно опуклі околи нуля локально опуклого топологічного простору E, $p_U(x)$, $p_V(x)$– відповідні півнорми, $M_U = \{x \in E : p_U(x) = 0\}$. Якщо у фактор-системі E/M_U ввести норму $||X|| = \inf\limits_{x\in X} p_U(x)$, то одержуємо нормований простір, який позначимо через E_U. Так із кожним локально опуклим топологічним простором E зв'язується система нормованих просторів E_U. Якщо $V \subset U$, то $p_U(x) \le p_V(x)$ і $||X_U||_{E_U} \le ||X_V||_{E_V}$.

1.2.2 Функції в банахових просторах

Нехай X — банахів простір. Розглядаємо функції (вектор-функції) $f(t)$ $\big(t \in [a,b],\ -\infty < a < b < \infty\big)$, значеннями яких є елементи простору X. Позначимо [52, 1.3] через $L_p\big([a,b];X\big)$ – простір (класів) функцій f зі значеннями в X, інтегровних на $[a,b]$ (відносно міри Лебега dt на відрізку $[a,b]$) і таких, що $\Big(\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_p(a,b;X)} < \infty$.

Функція f називається *диференційовною (сильно диференційовною)* в точці t_0, якщо [16, с. 21] існує такий елемент $f'(t_0) \in X$, що

$$\left\| \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} - f'(t_0) \right\|_X \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Елемент $f'(t_0)$ називається *похідною* функції f в точці t_0. Якщо f диференційовна в кожній точці відрізка $[a,b]$ і при цьому функція f' неперервна, то f називається неперервно диференційовною на $[a,b]$.

Через $C\big([a,b];X\big) = C^0\big([a,b];X\big)$ позначають простір функцій f, неперервних з $[a,b]$ в X з нормою $\|f\|_{C(a,b;X)} = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_X$ і аналогічно через $C^1\big([a,b];X\big)$ — простір функцій f, неперервно диференційовних з $[a,b]$ в X з нормою $\|f\|_{C(a,b;X)} = \sup_{t\in[a,b]} \big\{\|f(t)\|_X, \|f'(t)\|_X\big\}$.

Нехай Ω — область комплексної площини. Розглядаємо функцію $f(z)$ $(z \in \Omega)$, що набуває значень в банаховому просторі X. Елемент $f'(z_0)$ називається *сильною похідною* функції f в точці z_0, якщо

$$\left\|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0)\right\|_X \to 0 \ \text{ при } \ \Delta z \to 0.$$

Функція f називається *аналітичною* (сильно) в області Ω, якщо вона в кожній точці цієї області має похідну, слабо аналітичною, якщо [16, с.22] для довільного лінійного неперервного функціоналу h на X функція $(h,f)(z)$ аналітична в Ω. Слаба і сильна аналітичність співпадають [16, с. 22].

Для локально випуклих просторів V та F через $\mathcal{L}(V,F)$ позначають простір лінійних неперервних відображень V в F.

Функцію $A(t)$, задану в області Ω комплексної площини, що набуває значень в банаховому просторі $\mathcal{L}(X,X) = \mathcal{L}(X)$ лінійних неперервних відображень з X в X називають [16, с. 27] *операторнозначною функцією (оператор-функцією)* в X. Для таких "функцій" розрізняють рівномірну, сильну і слабу неперервність.

Під рівномірною неперервністю (диференційовністю) розуміють неперервність (диференційовність) $A(t)$ як функції зі значеннями в банаховому просторі $Y = \mathcal{L}(X)$. Сильна неперервність (диференційовність) означає неперервність (диференційовність) $A(t)f$ як функції зі значеннями в банаховому просторі X для довільної $f \in X$. Слаба неперервність (диференційовність) означає слабу неперервність (диференційовність) $A(t)f$ як функції зі значеннями в банаховому просторі X для довільної $f \in X$. Із рівномірної непе-

рервності (диференційовності) випливає сильна, а із сильної — слаба. Всі три види аналітичності еквівалентні.

1.2.3 Півгрупи та їх генератори

Нехай $(V_0, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, $\mathcal{L}(V_0)$ — алгебра всіх обмежених лінійних операторів T над V_0 із одиничним оператором E_{00} : $V_0 \to V_0$ та рівномірною операторною нормою $\|T\| = \sup_{\|u\|=1} \|Tu\|$.

Означення 1.1. ([43, 5.2]) Нехай A — замкнений оператор у банаховому просторі V_0 з областю визначення $D(A) := V_1$, тобто, $A : V_1 \to V_0$, $E_{10} : V_1 \subset V_0$ — відповідний оператор вкладення. Оператор $R(\lambda, A) = E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1}$ або $R_\lambda(A)$ називається *резольвентою оператора A в точці λ*. Множина тих λ, для яких $R_\lambda(A)$ існує, називається *резольвентною множиною* оператора A і позначається $\varrho(A)$, а її доповнення $\sigma(A)$ — *спектром* оператора A. У точках $\lambda \in \varrho(A)$ обернений оператор $(\lambda E_{10} - A)^{-1}$ діє із простору V_0 на простір V_1.

Означення 1.2. Сім'я $\{T(t)_{t\geq 0}\}$ елементів із $\mathcal{L}(V_0)$ називається *однопараметричною півгрупою* обмежених лінійних операторів в V_0, якщо

$$T(t+\tau) = T(t)T(\tau), \quad t, \tau > 0, \quad T(0) = E_{00}.$$

Якщо, крім того, функція $t \to T(t)$ є неперервна в сильній операторній топології на $\mathcal{L}(V_0)$, тобто функція $t \to T(t)u$ є неперервною на $[0, \infty)$ для довільного $u \in V_0$ $\left(s - \lim\limits_{t\to\tau} T(t)u = T(\tau)u \text{ для довільного } u \in V_0\right)$, то $\{T(t)_{t\geq 0}\}$ називається *сильно неперервною півгрупою* або C_0 — *півгрупою*. Якщо $\|T(t)\| \leq 1$, $t \geq 0$, то ця півгрупа називається стискуючою.

Всі C_0 — півгрупи є в певному сенсі "експонентами" $T(t) = e^{tA}$ операторів деякого класу.

Означення 1.3. Однопараметрична півгрупа $\{T_t\}$ класу (C_0) називається *однопараметричною групою* класу (C_0), якщо $\{T_t\}$ визначена для всіх $t \in \mathbb{R}$

та $T_{-t} = T_t^{-1}$ і

$$\lim_{t\to 0} T_t x = x \qquad \forall\ x \in V_0.$$

Означення 1.4. Нехай A – лінійний оператор в банаховому просторі V_0 з областю визначення $D(A) = \left\{ u \in V_0 : \text{ існує } \lim\limits_{t\to 0} \frac{T(t)u-u}{t} \right\}$. Для $u \in D(A)$ визначаємо лінійний оператор $Au = \lim\limits_{t\to 0} \frac{T(t)u-u}{t}$. Оператор A називається *інфінітезімальним генератором (генератором)* півгрупи $T(t)$. Кажуть також, що оператор A *породжує півгрупу* $T(t)$, це записують так $T(t) = e^{tA}$.

Відомо, що для C_0 — півгрупи існує нетривіальний інфінітезімальний генератор A. Оператор A взагалі кажучи необмежений. Він обмежений тоді і лише тоді, коли півгрупа є рівномірно неперервною, тобто функція $[0,\infty) \ni t \to T(t) \in \mathcal{L}(V_0)$ є неперервною відносно рівномірної операторної норми. Підпростір $D(A)$ є щільним в V_0, оператор $A : D(A) \to V_0$ є замкненим. Множина $D(A)$ є інваріантною відносно $T(t)$ і

$$AT(t)u = T(t)Au, \quad u \in D(A), \quad t \geq 0.$$

Для довільного елемента $u \in D(A)$ визначимо функцію

$$u(t) = T(t)u, \qquad t \geq 0.$$

Функція $u(t)$ диференційовна на $[0,\infty)$ і є єдиним розв'язком абстрактної задачі Коші

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad u(0) = u, \quad t \geq 0.$$

Так що півгрупа повністю визначається своїм інфінітезімальним генератором.

Теорема 1.1. (Хілле-Іосіди) [141, с. 133]. *Замкнений лінійний оператор A на банаховому просторі породжує C_0-півгрупу $T(t)$ тоді і лише тоді, коли*

1) *існує число $r \in \mathrm{R}$ таке, що $(r,\infty) \subset \varrho(A)$;*
2) $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{\mathrm{const}}{(\mathrm{Re}\,\lambda - r)^n}$ *для всіх* $\mathrm{Re}\,\lambda > r$, $n \in \mathrm{N}$

Якщо A задовольняє умови цієї теореми, то вся відкрита півплощина $\mathrm{Re}\,\lambda > r$ належить $\varrho(A)$ і резольвента знаходиться перетворенням Лапласа

від півгрупи

$$R(\lambda, A)u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)u\, dt, \quad u \in V_0, \quad \operatorname{Re}\lambda > r.$$

Означення 1.5. *C_0-півгрупа $\{T(t)\}_{t>0}$ обмежених лінійних операторів в V_0 називається аналітичною з кутом аналітичності $\theta \in (0, \pi/2]$, якщо оператор-функція $T(\cdot)$ визначена в секторі $S_\theta = \{z : |arg\, z| < \theta\}$ і має такі властивості:*

1) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in S_\theta$;

2) $T(z)u$ є аналітичною в $S_\theta, \quad \forall u \in V_0$;

3) $\|T(z)u - u\|_{V_0} \to 0$ при $z \to 0$ у будь-якому замкненому підсекторі сектора S_θ для кожного $u \in V_0$.

Якщо, крім того, сім'я $T(z)$ обмежена на кожному секторі S_ψ із $\psi < \theta$, то півгрупа $\{T(t)\}_{t>0}$ називається обмеженою аналітичною з кутом θ.

1.2.4 Функції від операторів

Нехай A– обмежений оператор на гільбертовому просторі, $f(z)$ – аналітична функція в деякому околі спектра $\sigma(A)$ оператора A. Тоді визначено оператор [16]

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) R_z(A) dz,$$

де $R_z(A)$ – резольвента оператора A, Γ – контур із скінченої кількості гладких жорданових кривих в області аналітичності функції $f(z)$ і який обходить у додатному напрямі спектр оператора A. Цей інтеграл не залежить від вибору контуру Γ.

Формула задає операційне (функціональне) числення обмежених операторів на класі $\mathcal{F}(A)$ аналітичних функцій $f(z)$ в околі спектра $\sigma(A)$ оператора A в тому сенсі, що якщо $f(z)$, $g(z)$ належать до класу $\mathcal{F}(A)$, $\beta, \beta \in \mathbb{C}$, то $\beta f + \beta g \in \mathcal{F}(A)$, $fg \in \mathcal{F}(A)$ та

$(\alpha f + \beta g)(A) = \alpha f(A) + \beta g(A)$,

$(fg)(A) = f(A)g(A)$,

$f(A) = I$ (I – одиничний оператор) для $f(z) \equiv 1$,

$f(A) = A$ для $f(z) \equiv z$. Для $f \in \mathcal{F}(A)$ справджується теорема про відображення спектрів: $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Саме так, на базі інтегральної теореми Коші Ф. Рісс та Н. Данфорд побудували функціональне числення обмежених операторів над банаховими просторами в класі аналітичних функцій. Функціональне числення необмежених секторіальних описано в наступному розділі. Його властивості та застосування до задачі Коші є предметом дисертаційної роботи.

1.2.5 Регулярна еліптична крайова задача

Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega$.

Означення 1.6. Обмежена область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ називається (див. [140, 3.2.1]) *областю класу* C^m, де $m \in \mathbb{N}$, якщо існує такий скінченний набір відкритих куль K_j, $j = 1, \ldots, N$, що $\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^N K_j$, $K_j \bigcap \partial\Omega \neq \emptyset$, і такі m разів диференційовні дійсні вектор-функції $f^{(j)}(x) = (f_1^j(x), \ldots, f_n^j(x))$, визначені в $\bar{K}_j$, що $y = f^j(x)$ є взаємооднозначне відображення кулі K_j на деяку обмежену область в $\mathbb{R}^n$, причому образ множини $K_j \bigcap \partial\Omega$ є частиною гіперплощини $\{y : y \in \mathbb{R}^n, y_n = 0\}$, а образ множини $K_j \bigcap \Omega$ — однозв'язною областю в півпросторі $\mathbb{R}^n{}_+$, крім того, $\frac{\partial(f_1^{(j)}, \ldots, f_n^{(j)})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$ для $x \in K_j$.

Означення 1.7. [140,5.2]. Диференціальний вираз, заданий рівністю

$$L(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u, \qquad a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega}) \tag{1.2}$$

називається *еліптичним* в Ω, якщо

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \neq 0 \text{ для всіх } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ та всіх } x \in \Omega, \tag{1.3}$$

називається *власне еліптичним*, якщо виконується умова (1.3) і якщо для довільної пари лінійно незалежних векторів $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ і для довільного $x \in \bar{\Omega}$ многочлен $a(x, \xi + \tau\eta)$ комплексної змінної τ має рівно m коренів $\tau_k^+(x, \xi, \eta)$ з додатньою уявною частиною, а отже, рівно m коренів $\tau_k^-(x, \xi, \eta)$

з від'ємною уявною частиною (при $n \geq 3$ порядок еліптичного оператора завжди парний), називається *рівномірно еліптичним* в Ω (в $\bar{\Omega}$), якщо існує така стала $c > 0$, що

$$\Big| \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \Big| \geq c|\xi|^{2m} \text{ для всіх } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ та всіх } x \in \Omega, \tag{1.4}$$

називається *сильно еліптичним* [272], якщо

$$\operatorname{Re} a(x,\xi) \neq 0 \quad \text{для всіх} \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Зауважимо, що при згаданих припущеннях на область Ω умови (1.3) і (1.4) збігаються для $x \in \overline{\Omega}$. Якщо коефіцієнти a_α при $|\alpha| = 2m$ дійсні, то кожний еліптичний диференціальний вираз є сильно еліптичним. Сильно еліптичний диференціальний вираз завжди є власне еліптичним.

Нехай на $\partial\Omega$, задані диференціальні вирази

$$(B_j u)(x) = B_j(x,D)u = \sum_{|\alpha| \leq k_j} b_{j,\alpha}(x) D^\alpha u(x), \quad b_{j,\alpha} \in C^\infty(\partial\Omega), \tag{1.5}$$

$j = 1, \ldots, m$ (розглядаємо випадок обмежених областей). Тут і далі через $C^\infty(\partial\Omega)$ позначаємо множину всіх нескінченно диференційовних комплексно-значних функцій на $\partial\Omega$.

Означення 1.8. [140, 5.2]. Набір $\{B_j\}_{j=1}^m$ називається *нормальною системою* крайових умов, якщо $0 \leq k_1 < \cdots < k_m < 2m$ і для довільного нормального до $\partial\Omega$ вектора ν_x, $x \in \partial\Omega$ виконані умови

$$b_j(x,\nu_x) := \sum_{|\alpha|=k_j} b_{j,\alpha}(x)\nu_x^\alpha \neq 0, \; j = 1, \ldots, m. \tag{1.6}$$

Означення 1.9. [140, 5.2] Нехай $L(x,D)$ — власне еліптичний диференціальний вираз в Ω. Набір $\{B_j\}_{j=1}^m$ називається *доповнюючою системою* по відношенню до $L(x,D)$ (*накриває* $L(x,D)$, *задовольняє умову Лопатинського [54]*), якщо для довільної точки $x \in \partial\Omega$, відповідного нормального вектора ν_x, довільного дотичного вектора $\xi_x \neq 0$ до $\partial\Omega$ в цій точці многочлени

$$b_j(x, \xi_x + \tau\nu_x) = \sum_{|\alpha|=k_j} b_{j,\alpha}(x)(\xi_x + \tau\nu_x)^\alpha \tag{1.7}$$

змінної τ лінійно незалежні за модулем многочлена $a^+(x,\xi_x,\nu_x,\tau) = \Pi_{k=1}^m(\tau-\tau_k^+)$, тобто рівність

$$\sum_{j=1}^m c_j b_j(x,\xi_x+\tau\nu_x) = P(\tau)a^+(x,\xi_x,\nu_x,\tau),$$

де $c_1,\dots,c_m$ — комплексні числа, а P — многочлен, виконуються тотожно за τ лише у випадку $c_1=\dots=c_m=0$. Зауважимо, що заміна многочлена $a^+(x,\xi_x,\nu_x,\tau)$ на $a^-(x,\xi_x,\nu_x,\tau)=\Pi_{k=1}^m(\tau-\tau_k^-)$ не дає нічого нового.

Означення 1.10. [140,5.2] Набір з диференціального виразу (1.2) та крайових виразів (1.5) називається *регулярно еліптичним*, якщо

1) $L(x,D)$ є власне еліптичним;
2) набір $\{B_j\}_{j=1}^m$ утворює нормальну систему;
3) набір $\{B_j\}_{j=1}^m$ утворює доповнюючу щодо $L(x,D)$ систему.

Зокрема, якщо вектори μ_x класу C^∞ на $\partial\Omega$ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$ не дотикаються до $\partial\Omega$, k – фіксоване число, $k=0,1,\dots,m$,

$$B_j u = \frac{\partial^{k+j-1}}{\partial\mu_x^{k+j-i}} + \sum_{|\alpha|<k+j-1} b_{j,\alpha}(x)D^\alpha u, \quad b_{j,\alpha}\in C^\infty(\partial\Omega),$$

то набір $L,B_1,\dots,B_m$ є регулярно еліптичним. Введена щойно система $\{B_j\}_{j=1}^m$ при $k=0$ та $\mu_x=\nu_x$ називається *системою Діріхле*. Задача

$$L(x,D)u(x)=f(x), \quad x\in\Omega, \quad B_j\,u_{\big|\,\partial\Omega}=g_j, \quad j=1,\dots,m, \tag{1.8}$$

у якій набір $L,B_1,\dots,B_m$ регулярно еліптичний, називається регулярною еліптичною крайовою задачею. Цю задачу ще іноді записують так $\Big(L(x,D),\{B_j(x,D)_{j=1}^m\},\Omega\Big)$.

Один з основних результатів про регулярні еліптичні крайові задачі – апріорні оцінки розв'язку. Оцінки вигляду

$$\|u\|_{C^{t+2m}(\Omega)} \quad\sim\quad \|Au\|_{C^t(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{j=1}^m \|B_j\|_{C^{2m+t-k_j}(\partial\Omega)}$$

для нецілих $t>0$ та $u\in C^{2m+t}(\Omega)$ вперше були одержані Шаудером, а потім покращувались та узагальнювались С. Агмоном, А. Дуглісом, Л. Ніренбергом

[152], у працях Л. Хермандера [145], М. Шехтера [265], [267], Ж. Пітре [247], [248], П. Е. Соболєвського [134], Ж.-Л. Ліонса, Е. Мадженеса [213], Ю. Березанського [3], [4], Я. Ройтберга [131], Х. Трибеля [140], Л. Волєвіча та Б. Панеяха, В. Михайлеця, О. Мурача [113] та інших, зокрема, аналогічні результати одержані для $s \in \mathbb{R}$ замість $2m$, а також для функціонального параметра регулярності [113].

Означення 1.11. [140, 5.4.3] Обмежений оператор A, що діє з одного банахового простору в інший, називається *Ф-оператором, тобто фредгольмовим*, якщо його ядро $N(A)$ має скінченну розмірність, а множина значень $R(A)$ замкнена і має скінченну корозмірність.

Агмоном встановлено достатні умови, при яких сильно еліптичний диференціальний оператор породжує аналітичну півгрупу.

Теорема 1.2. *(Агмона) [272], [151] Нехай $L(x,D)$ — сильно еліптичний оператор порядку $2m$, $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ — нормальна система крайових диференціальних операторів, $a_\alpha \in L_\infty(\Omega)$ для $|\alpha| < 2m$, $a_\alpha \in C(\bar{\Omega})$ для $|\alpha| = 2m$, $b_{j,\alpha} \in C^{2m-k_j}(\partial\Omega)$, $j = 1, \dots, m$, число $\theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ і таке, що:*

1) $\dfrac{a(x,\xi)}{|a(x,\xi)|} \neq e^{i\theta}$ *для всіх* $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ *(для сильно еліптичного оператора таке θ_0 існує);*

2) *для довільних $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$, точки $x \in \partial\Omega$, відповідного нормального вектора ν_x, довільного дотичного вектора $\xi_x \neq 0$ до $\partial\Omega$ в цій точці, такого $\lambda \in \mathbb{C}$ що* $\arg \lambda = \theta$, *поліном $a(x, \xi + \tau\nu) - \lambda$ змінної τ має рівно m коренів $\tau_k^+(\xi, \lambda)$ з додатньою уявною частиною (а отже, рівно m коренів $\tau_k^-(\xi, \lambda)$ з від'ємною уявною частиною) та поліноми $B_j(x, \xi + \tau\nu)$ є лінійно незалежні за модулем $\Pi_{k=1}^m(\tau - \tau_k^-)$.*

Тоді оператор A генерує аналітичну півгрупу в $L_p(\Omega)$. Зокрема, якщо система крайових операторів є системою Діріхле, то для довільного сильно еліптичного оператора $L(x,D)$ оператор A генерує аналітичну півгрупу в $L_p(\Omega)$ для $p > 1$.

Примітка. Для крайових умов Діріхле умова 1) у теоремі 1.2 випливає з умови 2). Умова 1) означає, що оператор $L(x, D_x) - e^{i\theta} D_t^{2m}$ еліптичний, а умова 2) еквівалентна тому, що система $\{B_j\}$ його накриває.

Далі використовуємо

Припущення (A): $L(x, D) = \sum\limits_{|\gamma| \le 2m} a_\gamma(x) D^\gamma$ – сильно еліптичний лінійний диференціальний вираз, $a_\gamma(x) \in L_\infty(\Omega)$, а при $|\gamma| = 2m$ неперервні в $\overline{\Omega}$, $(B_j u)(x) = B_j(x, D)u = \sum\limits_{|\alpha| \le k_j} b_{j,\alpha}(x) D^\alpha u(x)$, $x \in \partial\Omega$ – нормальна система крайових диференціальних виразів, $b_{j,\alpha} \in C^{2m-k_j}(\partial\Omega)$, $j = 1, \ldots, m$.

Припущення (Ag): Нехай $l_\omega := \left\{ re^{i\omega} \in \mathbb{C} \colon r > 0 \right\}$ – промінь з кутом $\omega \in [0, 2\pi]$, а $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$ – фіксований кут. Нехай для будь-якого кута $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$ такого, що $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$, виконуються умови:

- $\dfrac{a(x, \zeta)}{|a(x, \zeta)|} \ne e^{i\omega}, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$;
- для будь-якого дотичного вектора μ_x та нормального вектора ν_x в точці $x \in \partial\Omega$ кожен поліном $\mathbb{C} \ni z \to a(x, \mu_x + z\,\nu_x) - \lambda$, де $\lambda \in l_\omega$, має рівно m коренів $z_1, \ldots, z_m$ з додатною уявною частиною і поліноми $\{b_j(x, \mu_x + z\nu_x)\}_{j=1}^m$ є лінійно незалежними за модулем $\prod_{j=1}^m (z - z_j)$.

Примітка. Якщо виконуються умови **(A)** та **(Ag)** (Агмона), то оператор, породжений регулярною еліптичною задачею, є Φ-оператором, його спектр непорожній і складається з власних значень.

1.2.6 Похідні дробового порядку

Через $g \hat{*} \varphi$ позначаємо операцію згортки узагальненої функції g з основною функцією φ ([149], с. 111):

$$(g \hat{*} \varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x + \xi)), \quad g \in D'(R), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Функціонал $f * g \in D'(\mathbb{R})$, який діє за правилом

$$(f * g, \varphi) = (f, g \hat{*} \varphi) \;\; \forall \varphi \in D(\mathbb{R}),$$

називається згорткою узагальнених функцій f та g ([149], с. 111).

Зауважимо, що $f(x)\hat{*}\varphi(x) = f(-x)\hat{*}\varphi(x)$ ([6], с. 80).

Для $f, g \in D'(\mathbb{R})$, $\varphi \in D(R)$ при існуванні $f * g$ правильні рівності

$$(f * g)\hat{*}\varphi = f\hat{*}(g\hat{*}\varphi), \quad f\hat{*}(g * \varphi) = g * (f\hat{*}\varphi).$$

Використовуємо функцію $f_\lambda \in D'_+(\mathbb{R})$, яка залежить від числового параметра λ і така, що

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \quad \text{при} \quad \lambda > 0 \quad \text{та} \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \quad \text{та} \quad \lambda \leq 0,$$

де $\theta(t)-$ функція Хевісайда, $\Gamma(\lambda)-$ гамма-функція ([6, с. 87]). Правильні співвідношення

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu} \ ([6], \text{с. } 87), \quad f_\lambda\hat{*}f_\mu = f_{\lambda+\mu} \ ([2, \text{с. } 145]).$$

При $\lambda > 0$ оператор згортки $(f_{-\lambda}*)$ в алгебрі $D'_+(\mathbb{R})$ називають оператором дробового диференціювання (Рімана-Ліувілля).

Зауважимо, що

$$f_{-\beta}(t) * v(t) = f'_{1-\beta}(t) * v(t) = f_{1-\beta}(t) * v'(t), \quad v \in D'_+(\mathbb{R}).$$

Регуляризованою похідною [9, 29] порядку $\beta \in (m-1, m)$, $m \in \mathbb{N}$ функції v називають функцію

$$D_t^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{v_\tau^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{m-\beta}}d\tau, \quad t \in [0, T].$$

При $\beta \in (0, 1)$

$$D^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{v(\tau)}{(t-\tau)^\beta}d\tau - f_{1-\beta}(t)v(0).$$

Відзначимо, що

$$v^{(\beta)}(t) = \frac{d}{dt}f_{1-\beta}(t) * v(t), \qquad D_t^\beta v(t) = v^{(\beta)}(t) - f_{1-\beta}(t)v(0),$$

$$\big(f_\beta * D^\beta v\big)(t) = v(t) - v(0), \qquad D^\beta\big(f_\beta * v\big)(t) = v(t), \quad t > 0, \quad \beta > 0.$$

1.2.7 Окремі властивості H-функцій Фокса

H-функцією Фокса називається [207] функція

$$H_{p,q}^{m,n}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right) := H_{p,q}^{m,n}(z)\,,$$

де

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = \int_C \mathcal{H}(s) z^{-s} ds,$$

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\Pi_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)\Pi_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)}{\Pi_{i=n+1}^{q}\Gamma(a_i+\alpha_i s)\Pi_{j=m+1}^{p}\Gamma(1-b_j-\beta_j s)},$$

$$z^{-s} = \exp[-s(\log|z| + i\arg z)], \quad z \neq 0\,,\ i^2 = -1\,,$$

C – безмежний контур, що відокремлює полюси $b_{jl} = \frac{-b_j-l}{\beta_j}$, $1 \le j \le m$, $l = 0,1,\dots$ функції $\Gamma(b_j+\beta_j s)$ наліво і полюси $a_{ik} = \frac{1-a_i-k}{\alpha_i}$, $1 \le i \le n$, $k = 0,1,\dots$ функції $\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)$ направо (припускається, що вони не збігаються).

Використовуємо позначення із [207] для $H_{p,q}^{m,n}$:

$a^* = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum_{i=n+1}^{p}\alpha_i + \sum_{i=1}^{m}\beta_i - \sum_{i=m+1}^{q}\beta_i\,,$

$\Delta^* = \sum_{i=1}^{q}\beta_i - \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\,.$

При $\Delta^* > 0$, $a^* \ge 0$ за теоремою 1.1 [207] функція $H_{p,q}^{m,n}(z)$ існує для всіх $z \neq 0$.

Наведемо основні властивості H-функцій, які використовуємо.

Властивість 2.1. H-функція симетрична на кожній із множин пар: $(a_1,\alpha_1),\dots,(a_n,\alpha_n)$; $(a_{n+1},\alpha_{n+1}),\dots,(a_p,\alpha_p)$; $(b_1,\beta_1),\dots,(b_m,\beta_m)$; $(b_{m+1},\beta_{m+1}),\dots,(b_q,\beta_q)$.

Властивість 2.2. При $n \ge 1$, $q \ge m$

$$H_{p,q}^{m,n}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) & \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_{q-1},\beta_{q-1}) & (a_1,\alpha_1)\end{matrix}\right) =$$
$$= H_{p-1,q-1}^{m,n-1}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_2,\alpha_2) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_{q-1},\beta_{q-1})\end{matrix}\right).$$

Властивість 2.3.

$$H_{p,q}^{m,n}\left(\tfrac{1}{z}\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)=$$
$$=H_{q,p}^{n,m}\left(z\middle|\begin{matrix}(1-b_1,\beta_1) & \dots & (1-b_q,\beta_q)\\ (1-a_1,\alpha_1) & \dots & (1-a_p,\alpha_p)\end{matrix}\right).$$

Властивість 2.8 (про диференціювання).

Для $\omega, c\in\mathbb{C}$, $\sigma>0$, $k=0,1,\dots$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k\left[z^{\omega}H_{p,q}^{m,n}\left(cz^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)\right]=$$
$$=z^{\omega-k}H_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left(cz^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(-\omega,\sigma) & (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q) & (k-\omega,\sigma)\end{matrix}\right)=$$
$$=(-1)^k z^{\omega-k}H_{p+1,q+1}^{m+1,n}\left(cz^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) & (-\omega,\sigma)\\ (k-\omega,\sigma) & (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right).$$

За теоремою 2.1 із [207] для довільних $\lambda\in\mathbb{C}$, $m>0$ та при виконанні умови (1.1.6)

$$H_{p,q}^{m,n}\left(\lambda z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)=$$
$$=\lambda^{\frac{b_1}{\beta_1}}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{k!}(1-\lambda^{\frac{1}{\beta_1}})^k H_{p,q}^{m,n}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1+k\beta_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right).$$

За теоремою 2.7 із [207] про дробове диференціювання H-функцій Фокса при $a^*>0$, $\sigma\min\limits_{1\le j\le m}\left[\dfrac{\operatorname{Re}b_j}{\beta_j}\right]+\operatorname{Re}\omega>-1$, $\varrho>0$

$$f_{\varrho}(z)*\left[z^{\omega}H_{p,q}^{m,n}\left(z^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)\right]=$$
$$=z^{\omega+\varrho}H_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left(z^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(-\omega,\sigma) & (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q) & (-\omega-\varrho,\sigma)\end{matrix}\right).$$

1.3 Основні напрямки та результати досліджень

У в с т у п і вказано на актуальність досліджень дисертаційної роботи, зв'язок роботи з науковими програмами, сформульовано мету та задачі дослідження, відзначено наукову новизну одержаних у дисертації результатів, їх практичне значення та апробацію результатів.

У р о з д і л і 1 наведено огляд літератури за темою дисертації, введено основні поняття, сформульовано основні результати, що використовуються в

дисертаційній праці, вказано основні напрямки досліджень та сформульовано деякі з одержаних основних результатів.

У р о з д і л і 2 описано відомі та одержано нові властивості секторіальних операторів, які суттєво використовуються у наступних розділах. Виділено спеціальні класи секторіальних операторів. Встановлено умови належності операторів до таких класів. Досліджено властивості аналітичних функцій від секторіальних операторів над фіксованою парою банахових просторів. Введена інтерполяційна шкала просторів для секторіального оператора, яка істотно використана у наступних розділах. Показано застосування до дослідження абстрактної задачі Коші з необмеженими збуреннями секторіального оператора.

У підрозділі 2.6 введена апроксимовна алгебра Вінера аналітичних функцій нескінченної кількості змінних, виділено клас операторів із секторіальною властивістю на цій алгебрі та побудовано голоморфне числення операторів такого класу. Зупинимось детальніше на цих результатах.

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ банахів простір із нормованим спряженим $(X', \|\cdot\|)$, і через

$$\langle X \mid X' \rangle = \{\langle x \mid \xi \rangle \colon x \in X, \xi \in X'\}$$

позначимо їх дуальну форму. Нехай $B_{X'} = \{\xi \in X' \colon \|\xi\| < 1\}$ та $\bar{B}_{X'} = \{\xi \in X' \colon \|\xi\| \leq 1\}$ – відповідно відкрита й замкнена одиничні дуальні кулі. Розглядаємо тільки комплексні простори.

Нехай $\mathcal{P}^n(X')$ – алгебра всіх n-однорідних поліномів на X', $\odot^n_\varepsilon X$ – поповнення симетричного тензорного добутку $\odot^n X$ просторів X ін'єктивною нормою

$$\|x\|_{\odot^n_\varepsilon X} = \sup\Big\{\Big|\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \langle \xi \mid x_j \rangle^n\Big| \colon \xi \in \bar{B}_{X'}\Big\}, \quad x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j (\otimes^n x_j) \in \odot^n X,$$

де $x_j \in X$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Простір $\odot^n_\varepsilon X$ збігається з підпростором у $\mathcal{P}^n(X')$ апроксимовних n-однорідних поліномів на X', які *-слабо неперервні на обмежених множинах і вкладення $\mathcal{P}^n_\varepsilon(X') = \odot^n_\varepsilon X \looparrowright \mathcal{P}^n(X')$ ізометричне. Нехай

$\mathcal{P}_\varepsilon(X')$ – алгебра всіх апроксимовних поліномів на X', які *-слабо неперервні на обмежених підмножинах із X'. Вона щільна в апроксимовній алгебрі Вінера

$$W_\varepsilon(B_{X'}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n_\varepsilon(X') = \Big\{x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d^n x}{n!} \colon d^n x \in \mathcal{P}^n_\varepsilon(X')\Big\}.$$

Для заданих банахових просторів $\{X_\imath, \|\cdot\|_\imath\}_{\imath=0,1}$ з тотожним відображенням $I_0\colon X_0 \to X_0$ і щільним вкладенням $I_1 := I_0\,|_{X_1}\colon X_1 \to X_0$ визначено пари $\mathcal{P}^n_\imath := \mathcal{P}^n_\varepsilon(X'_\imath)$, $W_\imath := W_\varepsilon(B_{X'_\imath})$ для $\imath = 0,1$, та трійку Гельфанда із щільними неперервними вкладеннями $W_1 \looparrowright W_0 \looparrowright W_0^+$, де

$$W_0^+ = \Big\{x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d^n x}{n!} \colon d^n x \in \mathcal{P}^n_\varepsilon(X'_0), \quad \|x\|_{W_0^+} := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|d^n x\|_{\odot^n_\varepsilon X_0}}{(n+1)!} < \infty\Big\}.$$

За заданим оператором $A \in \mathcal{L}(X_1, X_0)$ у просторі $\mathcal{L}(W_1, W_0^+)$ визначаємо матричний діагональний оператор

$$\Gamma(A) := \left[\begin{cases} \Gamma({}^n A) & : n = k \\ 0 & : n \neq k \end{cases}\right]_{n,k\in\mathbb{N}}, \quad \Gamma({}^n A) := \sum_{j=1}^{n} \Gamma({}^n_j A),$$

де $\Gamma({}^n_j A) := \otimes^{j-1} I_0 \otimes A \otimes^{n-j} I_0$ належить $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n_1, \mathcal{P}^n_0)$.

Нехай $\Lambda(\vartheta) = \{re^{i\vartheta} \in \mathbb{C} \colon r \geq 0\}$ – промінь із фіксованим $\vartheta \in [0, 2\pi]$ та $\Theta(\alpha) = \{\Lambda(\vartheta) \colon \vartheta \in [-\alpha, \alpha]\} \subset \mathbb{C}$ – замкнений сектор із фіксованим $\alpha \in (\pi/2, \pi)$. Оператор $A \in \mathcal{L}(X_1, X_0)$ називається *секторіальним*, якщо існує сектор $\Theta(\alpha)$ і такі сталі $\delta = \delta(A)$, $K_\delta = K_\delta(A)$ що

$$\sup_{\lambda\in\Theta^\alpha_\delta} \|(\lambda I_1 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0,X_1)} := K_\delta, \quad \Theta^\alpha_\delta := \Theta(\alpha) \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| < \delta\} \subset \varrho(A).$$

Підмножину в $\mathcal{L}(X_1, X_0)$ секторіальних операторів із кутом Θ^α_δ позначаємо через $\Theta^\alpha_\delta(X_1, X_0)$. Якщо $A \in \Theta^\alpha_\delta(X_1, X_0)$, то $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus \Theta^\alpha_\delta$. Подібно визначаємо множину секторіальних операторів на парах $\mathcal{P}^n_\imath$.

Означення 2.4. Кажемо, що оператор $T \in \mathcal{L}(W_1, W_0^+)$ є *(слабо) секторіальним*, якщо $\Theta^\alpha_\delta \subset \varrho(T)$ і

$$\sup_{\lambda\in\Theta^\alpha_\delta} \|(\lambda \mathrm{I}_1 - T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W_1)} < \infty, \quad \text{де} \quad \mathrm{I}_\imath := \left[\begin{cases} \otimes^n I_\imath & : n = k \\ 0 & : n \neq k \end{cases}\right]_{n,k\in\mathbb{N}}.$$

Підмножину в $\mathcal{L}(W_1, W_0^+)$ операторів із такою секторіальною властивістю в куті Θ_δ^α позначаємо через $\Theta_\delta^\alpha(W_1)$. Якщо $T \in \Theta_\delta^\alpha(W_1)$, то $\sigma(T) \subset \mathbb{C} \setminus \Theta_\delta^\alpha$.

Доведено, що для секторіального оператора A множина операторів $\Gamma(A)$ має секторіальну властивість.

Теорема 2.3 [215]. *Якщо* $A \in \Theta_\delta^\alpha(X_1, X_0)$, *то* $\Gamma(A) \in \Theta_\gamma^\alpha(W_1)$ *і норми відповідних резольвент мають наступні оцінки*

$$\sup_{\lambda \in \Theta_\delta^\alpha} \|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X_0)} \leq 1 + K_\delta \|A\|_{\mathcal{L}(X_1, X_0)} := C_\delta,$$

$$\sup_{\lambda \in \Theta_\gamma^\alpha} \|\lambda R[\lambda, \Gamma(A)]\|_{\mathcal{L}(W_1)} \leq C_\delta$$

із $\gamma = \max\{\delta,\ 4C_\delta \|A\|_{\mathcal{L}(X_1, X_0)}\}$, *де* $\Theta_\gamma^\alpha \subset \varrho[\Gamma(A)] \bigcap \Theta_\delta^\alpha$.

Введений певний нормований простір скалярних неперервних функцій $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha) = \{\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha \ni \lambda = re^\vartheta \longmapsto f(\lambda) \in \mathbb{C}\}$, аналітичних у відкритій частині $\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha$, що не містить одиниці. У *теоремі* 2.4 доведено, що для довільних $A \in \Theta_\delta^\alpha(X_1, X_0)$ і $\gamma = \max\{\delta,\ 4C_\delta \|A\|_{\mathcal{L}(X_1, X_0)}\}$ відображення

$$\begin{aligned} \Phi \ &: \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha) \ni f \longrightarrow f(A) \in \mathcal{L}(X_0), \\ \Gamma(\Phi) \ &: \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha) \ni f \longrightarrow f[\Gamma(A)] \in \mathcal{L}(W_1), \end{aligned}$$

визначені для одної й тої ж функції f відповідно формулами

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Theta_\gamma^\alpha} f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda,$$

$$f[\Gamma(A)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Theta_\gamma^\alpha} f(\lambda) R[\lambda, \Gamma(A)] d\lambda,$$

є неперервними гомоморфізмами відповідних алгебр. Контури інтегрування $\partial \Theta_\gamma^\alpha$ додатно орієнтовані щодо спектрів і інтеграли не залежать від вибору контурів такого вигляду.

Для довільного $A \in \Theta_\delta^{\omega_0}(X_1, X_0)$ на алгебрі Вінера W_1 визначена аналітична операторна півгрупа з генератором $\Gamma(A)$,

$$0 < t \longmapsto e^{t\Gamma(A)} \in \mathcal{L}(W_1).$$

Функція $u(t) = e^{t\Gamma(A)} u_0$, $(t \geq 0)$ є єдиним розв'язком задачі Коші на алгебрі Вінера W_1:

$$\frac{du}{dt} = \Gamma(A) u, \quad u(0) = u_0 \in W_1.$$

У р о з д і л і 3 встановлено результат про максимальну регулярність розв'язку задачі Коші для абстрактного автономного лінійного рівняння з регуляризованою дробовою похідною за часом: якщо значення неоднорідної частини рівняння належать комплексній інтерполяційній шкалі, асоційованій з оператором рівняння, то існує єдиний класичний розв'язок задачі Коші. Цей факт є перенесенням відомого результату Да Прато і Грівара, встановленого для неперервних інтерполяційних шкал, на випадок комплексних інтерполяційних шкал та рівняння з дробовою похідною, а також при лінійних збуреннях оператора.

У підрозділі 3.1 розглянуто задачу Коші

$$D_t^\beta u = Au(t) + (f_{1-\beta} * f)(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = h, \tag{1.9}$$

при $\beta \in (0,1)$ та задачу Коші для лінійного параболічного рівняння

$$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + f(t), \quad t \in \big(0,T\big], \quad v(0) = h\,, \tag{1.10}$$

де A – необмежений замкнений лінійний секторіальний оператор від'ємного типу $r(A)$ ($A \in \mathcal{A}$) у деякому комплексному банаховому просторі $\Big(V_0,\ \|\cdot\|_0\Big)$ із щільною областю визначення $V_1 \subset V_0$, що є генератором сильно неперервної півгрупи $\{\Phi_A(t)\}_{t\geq 0}$ на банаховому просторі V_0.

Зафіксуємо довільний оператор $J \in \mathcal{A}$. Через V_ϑ позначаємо область визначення дробового степеня J^ϑ $(0 < \vartheta < 1)$ із нормою графіка $\|x\|_\vartheta := \|J^\vartheta x\|_0$. Простір $V_\vartheta = \big[\cdot,\cdot\big]_\vartheta$ — проміжний для інтерполяційної пари $\big\{V_0; V_1\big\}$, породжений комплексним методом інтерполяції.

Розв'язком задачі (1.9) називаємо функцію $u(t)$ класу

$$C^{\beta,\eta} := \Bigg\{ v \in C\big([0,T]; V_{1+\eta}\big) \colon D_t^\beta v \in C_b\big((0,T]; V_\eta\big),$$
$$\|u\|_{C^{\beta,\eta}} = \max\Big\{ \max_{t\in[0,T]} \big\|u(t)\big\|_{1+\eta}, \sup_{t\in(0,T]} \big\|D^\beta u(t)\big\|_\eta \Big\} < \infty \Bigg\},$$

що задовольняє рівняння задачі в V_η та початкову умову.

Доведена теорема 3.1 про максимальну регулярність розв'язку.

Теорема 3.1 [57]. *Нехай задані оператори $A, J \in \mathcal{A}$ та числа $0 \leq \eta < \vartheta \leq 1$, $f(t) \in C\big([0,T]; V_\vartheta\big)$, $h \in V_\vartheta$. Тоді існує єдиний розв'язок $u \in C^{\beta,\eta}$*

задачі (1.9). Цей розв'язок має вигляд

$$u(t) = \int_0^t S_{\beta,A}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + S_{\beta,A}(t)h$$

та існують такі сталі $K > 0$, $K_1 > 0$, *що виконується нерівність*

$$||u||_{C^{\beta,\eta}} \leq K \max_{t\in[0,T]} \left\|f(t)\right\|_{\vartheta} + K_1 \|h\|_{\vartheta}.$$

У підрозділі 3.2 досліджено лінійні збурення секторіального оператора A на проміжних просторах банахової пари, породженої цим оператором. Доведено теорему про однозначну розв'язність задачі Коші

$$D_t^{\beta} u = (A+X)u(t) + (f_{1-\beta} * f)(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = g,$$

де $X \in \mathcal{L}(U, V_0)$ – збурюючий оператор для оператора A, U – правильний проміжний простір банахової пари $\{V_0, V_1\}$, зокрема, $U = V_\theta$, $\theta \in (0,1)$. Побудовано наближення розв'язку такої збуреної задачі скінченними ітераціями резольвенти незбуреного оператора, при цьому без обмеження на норму збурюючого оператора, якщо $U = D(X) = V_\theta$ є проміжним простором з показником $\theta \in (0,1)$ для пари $\{V_0, V_1\}$. Результат одержаний на базі встановленої аналітичної залежності розв'язку від збурюючого оператора. Одержані оцінки збіжності таких наближень. Вони є з точнішими, ніж, наприклад, у [172].

У підрозділі 3.3 наведені результати застосовуються до диференціального оператора A, заданного на дробових шкалах просторів беселевих потенціалів. А саме, розглянуто випадок, коли A є регулярним еліптичним диференціальним оператором у функційному просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ над обмеженою областю $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, який додатково задовольняє умови параболічності Агмона. У цьому випадку досліджувана задача Коші буде крайовою задачею для неоднорідного лінійного диференціального параболічного рівняння, визначенного на підпросторі $V_1 = H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ функційного простору беселевих потенціалів $V_1 = H^{2m}_p(\Omega)$, який визначається набором нормальних крайових умов на межі області $\partial\Omega$.

Розглянуто крайову задачу

$$\begin{aligned} D_t^\beta u = L(x,D)u + f_{1-\beta}(t) * f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \\ B_j u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad j = 1,\dots,m, \qquad u(x,0) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.11}$$

в обмеженій області $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ класу C^∞, $\beta \in (0,1]$.

Теорема 3.6 [88] *Якщо* $0 \le \eta < \theta \le 1$, *виконуються припущення* **(A)**, **(Ag)**, *нерівності Сілі* $k_j < 2m\vartheta - \frac{1}{p}$, $j = 1,\dots,m$, $g \in H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$, $f \in C\Big(\Omega \times [0,T]; H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$, *то існує єдиний розв'язок* $u \in C^{\beta,\eta}\big(H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big)$ *задачі (1.11).*

Також доведено [82] однозначну розв'язність задачі з оператором $A + X$, де збурюючим є заданий замкнений в $L_p(\Omega)$ лінійний оператор $X : H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega)$, наприклад, $X = (-\Delta)^{m\vartheta}$, де Δ — оператор Лапласа. Побудовано наближення розв'язку за допомогою ітерацій функціїї Гріна незбуреної задачі з точними оцінками збіжності.

У р о з д і л і 4 знайдено умови класичної розв'язності нелінійних операторних рівнянь типу Гаммерштейна з ядрами на комплексних інтерполяційних шкалах, породжених секторіальними операторами. Нехай $\tilde{V}_\eta := V_{1+\eta} \times V_\eta$, $\|(z,\xi)\|_{\tilde{V}_\eta} = \max\big\{\|z\|_{V_{1+\eta}}, \|\xi\|_{V_\eta}\big\}$, $\tilde{V}_{\eta,C} = \big\{(z,\xi) \in \tilde{V}_\eta \colon \|(z,\xi)\|_{\tilde{V}_\eta} \le C\big\}$ – замкнена куля в $\tilde{V}_\eta$.

На $C^{\beta,\eta}$ вивчено нелінійне інтегро-диференціальне рівняння

$$v(t) = \int_0^t S_{\beta,A}(t-\tau) f(\tau, v(\tau), D^\beta v(\tau))\, d\tau + h(t), \tag{1.12}$$

щодо якого виконуються наступні умови.

Припущення (F1): $\beta \in (0,1)$, $0 \le \eta < \theta \le 1$;

$f \in C_b\big((0,T] \times V_{1+\eta} \times V_\eta; V_\vartheta\big)$; $\sup\limits_{t\in(0,T]} \|f(t,z,\xi)\|_{V_\vartheta} < +\infty \ \ \forall (z,\xi) \in \tilde{V}_\eta$,

$h(t)$ визначена на $[0,T]$, $h \in C^{\beta,\theta}$.

Припущення (F2): Існують такі додатні сталі K_1, M_1, K_2, M_2, q, r, C, що для будь-яких $(z,\xi), (z_1,\xi_1), (z_2,\xi_2) \in \tilde{V}_{\eta,C}$ правильні нерівності:

$$\sup_{t\in(0,T]} \|f(t,z,\xi)\|_{V_\vartheta} \le K_1 \|z\|^q{}_{V_{1+\eta}} + M_1 \|\xi\|^r{}_{V_\eta}$$

$$\sup_{t\in(0,T]} \|f(t,z_1,\xi_1) - f(t,z_2,\xi_2)\|_{V_\vartheta} \le K_2 \|z_1 - z_2\|^{q_0}{}_{V_{1+\eta}} + M_2 \|\xi_1 - \xi_2\|^{r_0}{}_{V_\eta},$$

де $q_0 = \min\{q, 1\}$, $r_0 = \min\{r, 1\}$.

Розглянуто випадки: 1) $q, r \in (0, 1)$; 2) $q \geq 1$ та $r \geq 1$.

Теорема 4.1 [85]. *Нехай виконуються припущення* **(F1), (F2)**. *Тоді існує розв'язок* $v \in C^{\beta,\eta}$ *рівняння (1.12) (у випадку 2* v *визначено на* $[0, T_0]$ *при деякому* $T_0 \in (0, T]$ *).*

Зауважимо, що коли функція f не залежить від третього аргументу, $h(t) = S_{\beta,A}(t)h_0$, $h_0 \in V_\theta$, то розв'язок $v \in C\big([0, T]; V_\eta\big)$ рівняння (1.12) є розв'язком класу $C^{\beta,\eta}$ задачі Коші

$$D^\beta v(t) = Av(t) + f_{1-\beta}(t) * f(t, v(t)), \qquad v(0) = h_0,$$

а при $\beta = 1$ розв'язок $v \in C\big([0, T]; V_\eta\big)$ рівняння (1.12) є розв'язком (класу $C^{1,\eta}$) задачі Коші для півлінійного абстрактного параболічного рівняння

$$v'(t) = Av(t) + f(t, v(t)), \qquad v(0) = h_0.$$

Отож, результат теореми 4.1 застосовано [83] в підрозділі 4.2 (теорема 4.2) до задачі Коші для абстрактного півлінійного рівняння з дробовою похідною.

У підрозділі 4.3 в теоремі 4.3 знайдено [86] достатні умови існування класичних за часом зі значеннями в просторах беселевих потенціалів розв'язків нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна. Цей результат застосовано в підрозділі 4.4 до крайових задач для півлінійних параболічних рівнянь.

У підрозділі 4.5 в теоремах 4.5, 4.6 одержано достатні умови розв'язності задачі Коші для півлінійного рівняння з дробовою похідною зі збуреним на комплексній інтерполяційній шкалі секторіальним оператором [83], побудовано наближення розв'язку збуреної задачі розв'язками таких задач для незбуреного півлінійного абстрактного рівняння. В теоремі 4.7 результати проілюстровано у випадку оператора A, породженого регулярною еліптичною крайовою задачею, збуреною псевдодиференціальними доданками [87, 88].

У працях [15, 24, 60, 61, 114–115, 62–63] та інших досліджувались узагальнені крайові значення регулярних в області розв'язків гіпоеліптичних рівнянь

із частинними похідними. Доведено, що такі розв'язки належать до вагових просторів Лебега з вагами порядків степенів відстані від точки області до межі і розв'язки з певних вагових L_p-просторів набувають на межі узагальнених крайових значень.

У підрозділі 4.6 знайдено достатні умови, при яких існують узагальнені початкові значення регулярних розв'язків півлінійних абстрактних рівнянь зі збуреною дробовою похідною. Як для диференціальних операторів [62, 63], знайдено два узагальнення задачі Коші для півлінійних абстрактних рівнянь із дробовою похідною. Доведено теорему 4.10 про їх порівняння.

У підрозділі 4.7 доведено теорему 4.11 існування та єдиності розв'язку абстрактної задачі Коші з дробовою похідною у вагових просторах узагальнених функцій.

У р о з д і л і 5 метод спряжених операторів Гріна Я. Б. Лопатинського, розвинений у працях С. Д. Івасишена, Г. С. Гупало та Г. П. Лопушанської при дослідженнях крайових задач із правими частинами – узагальненими функціями, застосовано до дослідження задачі Коші для рівнянь із дробовими похідними за часовою та просторовими змінними. У випадку диференціальних операторів у цьому розділі деякі результати розділу 3 поширено на задачу Коші для рівнянь із дробовими похідними за просторовими змінними вже в головній частині рівняння. Доведено теореми існування та єдиності розв'язків у просторах узагальнених функцій типу D', S' та вагових просторах узагальнених функцій, отримано їх зображення за допомогою вектор-функцій Гріна.

У підрозділі 5.1 доведено теорему 5.1 про однозначну розв'язність та зображення розв'язку задачі Коші

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T], \;\; u(x,0) = u_0(x), \quad (1.13)$$

з похідною Рімана-Ліувіля $u_t^{(\beta)}$ порядку $\beta \in (0,1)$ та u_0, F із просторів узагальнених функцій. Тут $(-\Delta)^{\alpha/2}$ визначено за допомогою перетворення Фур'є: $\mathcal{F}[(-\Delta))^{\alpha/2}\psi(x)] = |\lambda|^{\alpha}\mathcal{F}[\psi(x)]$.

Припущення $(\mathcal{L}_{\alpha,\beta})$: $\quad \beta \in (0,1), \quad \min\{n,2,\alpha\} > (n-1)/2\,,\ \alpha \neq \beta\,.$

Теорема 5.1 [64]. *За припущення* $(\mathcal{L}_{\alpha,\beta})$ *та при* $u_0 \in \mathcal{E}'(R^n)\,,\ F \in X'(\bar{Q}_T)$ *існує єдиний розв'язок* $u \in \mathcal{D}'(\bar{Q}_T)$ *задачі (1.13). Він визначений формулою*

$$(u,\varphi)_{Q_T} = (F_0, \hat{\mathcal{G}}_0\varphi)_{Q_T} + (u_0, \hat{\mathcal{G}}_1\varphi)_{Q_T} \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q}_T).$$

Тут $(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dx\,,$

$(\hat{\mathcal{G}}_1\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{Q_T} G_1(x-y,t)\varphi(x,t)dxdt\,,\ \varphi \in D(\bar{Q}_T)\,,$

$(G_0(x,t), G_1(x,t))$ – вектор-функція Гріна задачі, існування якої виводимо з результатів [182].

Встановлено характер особливостей розв'язку при $t=0$ залежно від порядку сингулярності заданої узагальненої функції в початковій умові та характеру степеневих особливостей функції в правій частині рівняння.

У підрозділі 5.2 для задачі Коші

$$D_t^\beta u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F_0(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T],$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.14}$$

з регуляризованою дробовою похідною встановлено існування єдиного розв'язку, класичного за часовою змінною зі значеннями в повній шкалі просторів беселевих потенціалів.

Теорема 5.4 [58]. *Нехай виконане припущення* $(L_{\alpha,\beta})\,,\ 1 < p < \frac{1}{\beta}\,,\ s \in \mathbb{R}\,,$ $u_0 \in H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\,,\ F_0(x,t) = f_{1-\beta}(t) * f(x,t)\,,\ f \in C\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)\,.$ *Тоді існує єдиний розв'язок*

$$u(x,t) = f(x,t) * G_1(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T$$

задачі (1.14), причому $u \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *та*

$$\|u\|_{C_{\alpha,\beta}\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le b_0\|f\|_{C\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + b_1\|u_0\|_{H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.15}$$

де b_0, b_1 *– додатні сталі.*

Теорема 5.5 [58]. *Нехай виконане припущення* $(L_{\alpha,\beta})$, $0<\theta<1$ $s\in\mathbb{R}$, $p>1$ *та* $p(1-\beta\theta)<1$, $u_0\in H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, $F_0\in C\big([0,T];H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)\big)$. *Тоді існує єдиний розв'язок*

$$u(x,t)=F_0(x,t)*G_0(x,t)+u_0(x)*G_1(x,t),\qquad (x,t)\in Q_T$$

задачі (1.14), причому $u\in C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *та*

$$\|u\|_{C_{\alpha,\beta}\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)}\le k_0\|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)\right)}+k_1\|u_0\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)},$$

де k_0, k_1 *– додатні сталі.*

Такі результати поширено в теоремі 5.6 на випадок даних зі значеннями в уточнених шкалах просторів беселевих потенціалів [102], а у підрозділах 5.3 та 5.4 – на рівняння зі змінним коефіцієнтом (теорема 5.7) та зі значеннями в просторах S' повільно зростаючих узагальнених функцій (теорема 5.8).

У підрозділі 5.5 теорема 5.1 поширена на випадок $\beta\in(1,2)$ [89].

У підрозділі 5.6 у теоремі 5.11 методом Радона одержано [65] оцінки фундаментального розв'язку рівняння

$$u_t^{(\beta)}-\sum_{j=1}^n b_j u_{x_j}^{(\alpha)}=\delta(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}$$

з частинними дробовими похідними Рімана-Ліувіля $u_t^{(\beta)}$, $u_{x_j}^{(\alpha)}$ та сталими коефіцієнтами b_j, $j=\overline{1,n}$ за умови $\sum\limits_{j=1}^n b_j p_j^\alpha\ge C_0$ для всіх $p\in\mathbb{R}^n, |p|=1$. Так що одержані вище результати можна поширити на такі рівняння.

У підрозділі 5.7 доведено [218] теорему 5.13 існування та єдиності та одержано зображення за допомогою вектор-функції Гріна розв'язку першої крайової задачі для дифузійно-хвильового рівняння в обмеженій області з даними з просторів узагальнених функцій, зокрема, з даними зі значеннями в просторах беселевих потенціалів (теорема 5.14).

У р о з д і л і 6 вивчено обернені крайові задачі для дифузійно-хвильових рівнянь, які іншими авторами для таких рівнянь не вивчались.

У підрозділі 6.1 доведено [100] існування вектор-функції Гріна, однозначну розв'язність задачі на визначення пари функцій $a\in C[0,T]$, $a(t)>0$, $t\in$

$[0,T]$ та класичного розв'язку u першої крайової задачі для рівняння

$$D_t^\beta u - a(t)u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T], \ \ \beta \in (0,2)$$

при додатковій умові (умові перевизначення)

$$a(t)u_x(0,t) = F(t), \quad t \in [0,T].$$

Багатовимірний випадок такої задачі розглянуто автором у [90].

У підрозділі 6.2 в теоремі 6.5 встановлено [91], що у випадку узагальненої функції $F(x,t) = F_0(x)g(t)$ при неперервній $g(t)$ розв'язок $u(x,t)$ задачі є узагальненою функцією, неперервною за змінною t в узагальненому сенсі.

Цей результат використовується для доведення розв'язності деяких обернених крайових задач для такого рівняння з заданими узагальненими функціями у правих частинах.

У підрозділі 6.3 вперше доведено однозначну розв'язність задач про визначення пари функцій: розв'язку $u(x,t)$ першої крайової задачі для рівняння з дробовою похідною Рімана-Ліувіля, узагальненими функціями $F_0(x)$ та в початкових умовах з просторів типу D' та S', а також невідомого старшого (теореми 6.6, 6.7) або молодшого (теореми 6.9, 6.10) коефіцієнта, або невідомої компоненти правої частини при відомих значеннях шуканої узагальненої функції на заданій основній функції [101, 103].

У підрозділах 6.4, 6.5 для такого типу обернених задач Коші та обернених крайових задач із заданими в правих частинах узагальненими функціями із просторів беселевих потенціалів доведено теореми 6.11–6.14 про існування та єдиність розв'зків.

У підрозділі 6.6 у теоремах 6.16, 6.17 доведено однозначну розв'язність обернених задач про відновлення відповідно початкових даних та правої частини рівняння з дробовою похідною у просторах періодичних узагальнених функцій при інтегральній за часом умові перевизначення [66, 214].

Розділ 2

Функціональне числення секторіальних операторів

У даному розділі виділено клас $\mathcal{A}$ секторіальних операторів з від'ємним типом і клас $\mathcal{A}_0$ певних збурень таких операторів. Встановлено умови належності операторів до таких класів. Досліджено властивості аналітичних функцій від введених секторіальних операторів над фіксованою парою банахових просторів. Показано, що секторіальні оператори класу $\mathcal{A}_0$ генерують рівномірно обмежені сильно неперервні однопараметричні аналітичні півгрупи обмежених операторів над обома просторами заданої пари просторів, а генератори класу $\mathcal{A}$ виділяють серед них півгрупи із асимптотичним прямуванням до нуля на безмежності.

Вивчено секторіальні оператори, що діють на апроксимовній алгебрі Вінера аналітичних функцій нескінченної кількості змінних. Для таких операторів встановлена достатня умова секторіальності і побудовано голоморфне числення.

2.1 Про секторіальні оператори

Через $l_\omega := \left\{re^{i\omega} : r > 0\right\}$ позначаємо промінь із заданим кутом $\omega \in \left[0, 2\pi\right]$. Зафіксуємо деякий кут $\omega_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ і співставимо йому в комплексній площині $\mathbb{C}$ замкнений сектор з виколотою точкою $\left\{0\right\}$ і його замикання, відповідно $\Lambda_0 := \bigcup\left\{l_\omega : \omega \in \left[-\omega_0, \omega_0\right]\right\}$ і $\Lambda := \Lambda_0 \bigcup \left\{0\right\}$, а для довільного

числа $a > 0$

$$\Lambda_a := \Lambda \bigcup \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \le a\Big\}, \qquad \Lambda_{-a} := \Lambda \setminus \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \le a\Big\}.$$

Означення 2.1. Нехай над полем $\mathbb{C}$ задано пару банахових просторів $\big(V_0, \|\cdot\|_0\big)$ та $\big(V_1, \|\cdot\|_1\big)$ з неперервним та щільним вкладенням $E_{10} : V_1 \to V_0$.

Через $\mathcal{A}_0$ позначаємо клас таких лінійних неперервних операторів $A : V_1 \longmapsto V_0$, що для будь-якого числа $a > 0$ резольвента

$$\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1} : \ V_0 \longmapsto V_1 \,,$$

є визначеною та рівномірно обмеженою відносно чисел $\lambda \in \Lambda_{-a}$ за нормою простору $\mathcal{L}(V_0; V_1)$, тобто

$$\mathcal{A}_0 := \Big\{A \in \mathcal{L}(V_1; V_0) : \\ \sup_{\lambda \in \Lambda_{-a}} \Big\|\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} = K_a(A) < \infty, \quad \forall\, a > 0\Big\},$$

де стала $K_a(A)$ залежить від A та a.

Через $\mathcal{A}$ позначаємо підклас класу $\mathcal{A}_0$ таких операторів $A : V_1 \longmapsto V_0$, резольвента яких $\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}$ є визначеною та рівномірно обмеженою за нормою $\mathcal{L}(V_0; V_1)$ відносно всіх чисел $\lambda \in \Lambda$, тобто

$$\mathcal{A} := \Big\{A \in \mathcal{L}(V_1; V_0) : \sup_{\lambda \in \Lambda} \Big\|\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} = K(A) < \infty\Big\},$$

де стала $K(A)$ залежить тільки від A.

Оператори класу $\mathcal{A}$ будемо називати секторіальними операторами від'ємного типу $r(A) := \sup\Big\{\operatorname{Re}\lambda : \ \lambda \in \sigma(A)\Big\} = r < 0$ над простором V_0.

З того, що $\Lambda_{-a} \subset \Lambda$ для всіх $a > 0$, маємо $K_a(A) \le K(A)$ для $A \in \mathcal{A}$. Отже, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$. Для довільного оператора A класу $\mathcal{A}$ існує обернений $A^{-1} \in \mathcal{L}(V_0, V_1)$. Оператори класу $\mathcal{A}_0$ можуть вже не мати точки $\big\{0\big\}$ в області визначення своєї резольвенти.

Кожен з операторів A введених класів можна трактувати як необмежений лінійний оператор над банаховим простором V_0 із щільною областю визна-

чення $V_1 = \mathcal{D}(A)$. Як звичайно, далі позначаємо через

$$\varrho\,(A) := \Big\{\lambda : \ \big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0; V_1)\Big\} \quad \text{і} \quad \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho\,(A)$$

відповідно резольвентну множину і спектр оператора A. Резольвентою оператора A називаємо операторнозначну функцію

$$\varrho\,(A) \ni \lambda \longmapsto \big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0; V_1).$$

Тут і надалі використовуємо результати і позначення [43]. Звичайно ж резольвентою називають операторнозначну функцію вигляду

$$R(\lambda, A) := E_{10}\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0),$$

очевидно, також визначену для всіх чисел $\lambda \in \varrho\,(A)$. В наших позначеннях під обмеженим оберненим оператора A розуміємо оператор $E_{10}A^{-1} \in \mathcal{L}(V_0)$.

Оскільки лінійні оператори, які мають непорожню резольвентну множину, є замкненими [28], то класи $\mathcal{A}$ і $\mathcal{A}_0$ складаються із замкнених операторів над простором V_0. Тому для будь-якого оператора A із цих класів спектр $\sigma(A)$ є замкненим, а резольвентна множина $\varrho\,(A)$ є відкритою на комплексній площині $\mathbb{C}$. До того ж, функція $R(\lambda, A)$ є аналітичною в $\varrho\,(A)$.

Для спектра довільного оператора $A \in \mathcal{A}$ правильне включення $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus \Lambda$, де множина справа відкрита. З огляду на замкненість спектру звідси випливає, що тип $r(A)$ довільного оператора A класу $\mathcal{A}$ є насправді числом від'ємним. Крім того, завжди існує залежне від оператора A таке число a, що $0 < a < -r(A), \qquad \Lambda_a \subset \varrho\,(A)$.

Зауваження 2.1. У загальному випадку лінійний оператор A над банаховим простором V_0 називають [143] секторіальним, якщо існують такі сталі $\omega_0 \in \big(\frac{\pi}{2}, \pi\big)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ та $C > 0$, що

$$\alpha + \Lambda_0 \subset \varrho\,(A),$$

$$\big\|R(\lambda, A)\big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{C}{|\lambda - \alpha|}, \qquad \forall\, \lambda \in \alpha + \Lambda_0.$$

З леми 2.1 випливатиме, що клас $\mathcal{A}$ секторіальних операторів з від'ємним типом задовольняє сформульовані вище умови при $\alpha = 0$. Крім того, якщо A є довільний секторіальний оператор над простором V_0 з областю визначення V_1, то

$$A + (\alpha + \varepsilon)E_{10} \in \mathcal{A}, \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Іншими словами, довільний секторіальний оператор лінійною заміною зводиться до оператора класу $\mathcal{A}$.

Нехай далі $E_{00} : V_0 \longmapsto V_0$ – одиничний оператор в алгебрі обмежених лінійних операторів $\mathcal{L}(V_0)$.

Лема 2.1. (a) *Якщо $A \in \mathcal{A}$, то існує обернений оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(V_0; V_1)$ і виконується нерівність*

$$\left\| R\left(\lambda, \frac{A}{s}\right) \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq \frac{C}{|\lambda|}, \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda_0, \quad \forall\, s > 0, \tag{2.1}$$

де стала C залежить тільки від A та не залежить від чисел λ та s.

(b) *Якщо існує обернений оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(V_0; V_1)$ та число $a > 0$ такі, що виконується нерівність*

$$\left\| R\left(\lambda, \frac{A}{s}\right) \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq \frac{C'}{|\lambda|}, \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda_{-a}, \quad \forall\, s > 0,$$

де стала C' залежить тільки від A і a та не залежить від чисел λ та s, то $A \in \mathcal{A}$.

Доведення. Нехай $A \in \mathcal{A}$. Використаємо тотожність

$$\xi E_{10}(\xi E_{10} - A)^{-1} = E_{00} + A(\xi E_{10} - A)^{-1}, \qquad \forall\, \xi \in \varrho\,(A). \tag{2.2}$$

Із (2.2) та нерівності

$$\left\| A(\xi E_{10} - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)} \left\| (\xi E_{10} - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}$$

випливає існування сталої $C = 1 + K(A)\,\|A\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}$, незалежної від чисел $\xi \in \Lambda$ і такої, що

$$\left\| \xi E_{10}(\xi E_{10} - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq C.$$

Оскільки $s\Lambda_0 \subset \Lambda_0$ для будь-якого $s > 0$, то вибираючи $\xi = s\lambda$, маємо

$$\left\| \lambda E_{10} \left(\lambda E_{10} - \frac{A}{s} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} = \left\| s\lambda E_{10} \big(s\lambda E_{10} - A \big)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq C$$

для всіх $\lambda \in \Lambda_0$ та $s > 0$, тобто, нерівність (2.1) встановлено.

Нехай тепер виконується умова твердження (b) леми. Домножуючи нерівність (2.1) на довільне число $\lambda \in \Lambda_{-a}$, отримуємо

$$\left\| \xi E_{10} \big(\xi E_{10} - A \big)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} = \left\| s\lambda E_{10} \big(s\lambda E_{10} - A \big)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} =$$

$$\left\| \lambda \, R \left(\lambda, \frac{A}{s} \right) \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq C, \qquad \forall \, \lambda \in \Lambda_{-a}, \quad \forall \, s > 0,$$

де взято $\xi = s\lambda$. За довільністю чисел $s > 0$ відображення $\big(0, +\infty\big) \times \Lambda_{-a} \ni \big\{ s, \lambda \big\} \longmapsto s\lambda = \xi \in \Lambda_0$ сюр'єктивне. Тобто, остання нерівність виконується для всіх чисел $\xi \in \Lambda_0$. Користуючись тотожністю (2.2) і тим, що існує A^{-1}, маємо

$$\big(\xi E_{10} - A \big)^{-1} = A^{-1} \xi E_{10} \big(\xi E_{10} - A \big)^{-1} - A^{-1}.$$

Звідси, враховуючи попередню нерівність, отримуємо

$$\left\| \big(\xi E_{10} - A \big)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0, V_1)} \leq \left\| A^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0, V_1)} \left(\left\| \xi E_{10} \big(\xi E_{10} - A \big)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} + 1 \right) \leq$$

$$\leq \left\| A^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0, V_1)} (C + 1), \qquad \forall \, \xi \in \Lambda_0 \, .$$

Нарешті, з існування A^{-1} випливає, що остання нерівність правильна також при $\xi = 0$. Отже, $A \in \mathcal{A}$. $\square$

Лема 2.2. *Якщо $A \in \mathcal{A}_0$, то для будь-якого числа $a > 0$ існує така додатна стала C (залежна від A і a), що*

$$\left\| R(\lambda, A) \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq \frac{C}{|\lambda|}, \qquad \forall \, \lambda \in \Lambda_{-a}.$$

Якщо $A \in \mathcal{A}$, то для будь-якого числа $a : 0 < a < -r(A)$ існує така додатна стала C (залежна від A і a), що

$$\left\| R(\lambda, A) \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq \frac{C}{|\lambda|}, \qquad \forall \, \lambda \in \Lambda_a \setminus \big\{ 0 \big\} \, .$$

Доведення. Справді,

$$\left\|\lambda E_{10}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}=\left\|E_{00}+A(\lambda E_{10}-A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}\leq$$
$$1+\|A\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}\left\|\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}\leq C,$$

де взято $C:=1+K_a(A)\,\|A\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}$. Друге твердження доводиться подібно. А саме, маємо

$$\left\|\lambda E_{10}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}\leq 1+\|A\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}\left\|\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}\leq C,$$

де $C:=1+\|A\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}\max\left\{K(A)\,;\ \sup\limits_{|\lambda|\leq a}\left\|\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}\right\}$. $\square$

2.2 Функціональне числення

Числу $a>0$ та невід'ємному числу $c:\ \frac{\pi}{2}<\omega_0-c<\pi$ поставимо у відповідність відкриті комплексні області

$$\Lambda^c:=\mathbb{C}\setminus\left[\Big\{l_\omega:\ \omega\in\big[-\omega_0+c,\,\omega_0-c\big]\Big\}\bigcup\Big\{0\Big\}\right],$$

$$\Lambda^c_a:=\mathbb{C}\setminus\left[\Big\{l_\omega:\ \omega\in\big[-\omega_0+c,\,\omega_0-c\big]\Big\}\bigcup\Big\{\lambda:\ |\lambda|\leq a\Big\}\right],$$

$$\Lambda^c_{-a}:=\mathbb{C}\setminus\left[\Big\{l_\omega:\ \omega\in\big[-\omega_0+c,\,\omega_0-c\big]\Big\}\setminus\Big\{\lambda:\ |\lambda|\leq a\Big\}\right],$$

де, як і раніше, фіксований кут $\omega_0:\ \frac{\pi}{2}<\omega_0<\pi$ визначає сектор Λ. Маємо

$$\mathbb{C}\setminus\Lambda\subset\Lambda^c,\qquad \mathbb{C}\setminus\Lambda_a\subset\Lambda^c_a,\qquad \mathbb{C}\setminus\Lambda_{-a}\subset\Lambda^c_{-a},$$

а при $c=0$ правильні рівності

$$\Lambda^0=\mathbb{C}\setminus\Lambda,\qquad \Lambda^0_a=\mathbb{C}\setminus\Lambda_a,\qquad \Lambda^0_{-a}=\mathbb{C}\setminus\Lambda_{-a}.$$

Нехай $\partial\Lambda^c$, $\partial\Lambda^c_a$ та $\partial\Lambda^c_{-a}$ — межі областей Λ^c, Λ^c_a та Λ^c_{-a} відповідно.

Зафіксуємо далі таке $c>0$. Для будь-якого числа $r\geq a$ та аналітичної функції φ в секторі Λ^c позначимо

$$M_\varphi(r):=\max\left\{\left|\varphi\big(re^{i\arg(\lambda)}\big)\right|:\quad |\lambda|=r,\quad \arg(\lambda)\in\big[\omega_0-c,\,2\pi-\omega_0+c\big]\right\}$$

та розглянемо

$\mathcal{H}(\Lambda_a^c)$ – алгебру комплексних функцій $\varphi = \varphi(\lambda)$, голоморфних в області Λ_a^c та неперервних на її замиканні $\overline{\Lambda_a^c} = \Lambda_a^c \bigcup \partial\Lambda_a^c$, для яких

$$\|\varphi\|_a := \frac{1}{\pi}\int\limits_a^{+\infty} M_\varphi(r)\frac{dr}{r} + \sup_{\lambda\in\Lambda_a^c}\big|\varphi(\lambda)\big| < +\infty, \tag{2.3}$$

$\mathcal{H}(\Lambda_{-a}^c)$ – алгебру функцій, голоморфних в ширшій області Λ_{-a}^c та неперервних на її замиканні $\overline{\Lambda_{-a}^c} = \Lambda_{-a}^c \bigcup \partial\Lambda_{-a}^c$ із нормою

$$\|\varphi\|_{-a} := \frac{1}{\pi}\int\limits_a^{+\infty} M_\varphi(r)\frac{dr}{r} + \sup_{\lambda\in\Lambda_{-a}^c}\big|\varphi(\lambda)\big|.$$

Очевидно, що $\mathcal{H}(\Lambda_a^c)$ є алгеброю з нормою (2.3), причому без функції $\varphi \equiv 1$, хоча б тому, що з умови збіжності невласного інтегралу, який є в нормі,

$$\lim_{r\to+\infty} M_\varphi(r) = 0, \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda_a^c). \tag{2.4}$$

Зауважимо, що $\mathcal{H}(\Lambda_{-a}^c)$ – підалгебра алгебри $\mathcal{H}(\Lambda_a^c)$. Для функцій із $\mathcal{H}(\Lambda_{-a}^c)$ також виконується умова (2.4). Величина

$$m_a(\varphi) := \sup_{\lambda\in\Lambda_a^c}\big|\varphi(\lambda)\big| \qquad \Big(m_{-a}(\varphi) := \sup_{\lambda\in\Lambda_{-a}^c}\big|\varphi(\lambda)\big|\Big)$$

є рівномірною нормою в алгебрі всіх аналітичних функцій в області Λ_a^c та неперервних на її замиканні $\overline{\Lambda_a^c}$ $\Big($відповідно, в підалгебрі всіх аналітичних функцій в області Λ_{-a}^c та неперервних на замиканні $\overline{\Lambda_{-a}^c}\Big)$, при цьому такою, що

$$m_a(\varphi) \le \|\varphi\|_a\,, \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda_a^c)$$
$$\Big(m_{-a}(\varphi) \le \|\varphi\|_{-a}\,, \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda_{-a}^c)\Big).$$

Отже, якщо φ_n — фундаментальна послідовність в $\mathcal{H}(\Lambda_a^c)$ відносно норми $\|\cdot\|_a$ $\Big($відповідно в $\mathcal{H}(\Lambda_{-a}^c)$ $\Big)$, то вона фундаментальна відносно норми m_a $\Big($відповідно $m_{-a}\Big)$. А тому її границя

$$\varphi \overset{\|\cdot\|_a}{=} \lim_{n\to\infty}\varphi_n \overset{m_a}{=} \lim_{n\to\infty}\varphi_n \qquad \Big(\varphi \overset{\|\cdot\|_{-a}}{=} \lim_{n\to\infty}\varphi_n \overset{m_{-a}}{=} \lim_{n\to\infty}\varphi_n\Big)$$

також буде функцією аналітичною в області Λ_a^c $\Big($відповідно $\Lambda_{-a}^c\Big)$ та неперервною на її замиканні $\overline{\Lambda_a^c}$ $\Big($відповідно $\overline{\Lambda_{-a}^c}\Big)$, причому такою, що $\|\varphi\|_a < \infty$ $\Big($відповідно $\|\varphi\|_{-a} < \infty\Big)$. Тобто, алгебра $\mathcal{H}(\Lambda_a^c)$, а також, алгебра $\mathcal{H}(\Lambda_{-a}^c)$ — банахові.

Для будь-яких функцій $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(\Lambda_{\pm a}^c)$ з нерівності $M_{\varphi\psi}(r) \le M_\varphi(r) M_\psi(r)$ випливає

$$\|\varphi\psi\|_{\pm a} \le \frac{m_{\pm a}(\varphi)}{\pi} \int\limits_a^{+\infty} M_\psi(r) \frac{dr}{r} + m_{\pm a}(\varphi)\, m_{\pm a}(\psi) = m_{\pm a}(\varphi)\, \|\psi\|_{\pm a}\,.$$

Отже, згідно з [260], на алгебрах $\mathcal{H}(\Lambda_{\pm a}^c)$ існують еквівалентні до $\|\cdot\|_{\pm a}$ норми, а тому *операція множення функцій в алгебрах* $\mathcal{H}(\Lambda_{\pm a}^c)$ *є неперервною за обидвома співмножниками.*

При $0 < b \le a$, маємо $\Lambda_a^c \subset \Lambda_b^c$, $\|\varphi\|_a \le \|\varphi\|_b$ для кожної $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda_b^c)$, і тоді вкладення $\mathcal{H}(\Lambda_b^c) \subset \mathcal{H}(\Lambda_a^c)$ неперервні та можна розглядати проективну границю родини таких алгебр

$$\mathcal{H}(\Lambda^c) := \bigcap_{a>0} \mathcal{H}(\Lambda_a^c),$$

яка буде алгеброю Фреше відносно набору норм $\Big\{\|\cdot\|_a : a > 0\Big\}$ і складається з функцій, голоморфних в об'єднанні областей $\Lambda^c = \bigcup\limits_{a>0} \Lambda_a^c$ та неперервних в його замиканні з виколотою точкою (у $\overline{\Lambda^c} \setminus \big\{0\big\}$).

Приклад 1. Алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda^c)$ належить функція

$$\mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \ni \lambda \longmapsto \frac{1}{(-\lambda)^\vartheta} = e^{-\vartheta \ln(-\lambda)}, \qquad \forall\, \vartheta > 0,$$

яка далі використовується для побудови дробових степенів операторів. Справді,

$$\left\| \frac{1}{(-\lambda)^\vartheta} \right\|_a \le \frac{1}{a^\vartheta} + \frac{1}{\pi} \int\limits_a^{+\infty} \frac{dr}{r^{1+\vartheta}} < \infty, \qquad \forall\, a > 0.$$

При $0 < a \le b$ виконуються вкладення $\Lambda_{-a}^c \subset \Lambda_{-b}^c$ і лінійні оператори, породжені звуженнями функцій $\mathcal{H}(\Lambda_{-b}^c) \ni \varphi \longmapsto \varphi_{\big|\Lambda_{-a}^c} \in \mathcal{H}(\Lambda_{-a}^c)$, є непе-

рервними. Справді, якщо $\varphi \overset{\|\cdot\|_{-b}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, то одночасно маємо $\varphi \overset{m_{-b}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, $\varphi \overset{|\cdot|_{-b}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, де тимчасово позначено $\big|\varphi\big|_{-b} := \frac{1}{\pi} \int\limits_{b}^{+\infty} M_\varphi(r) \frac{dr}{r}$.

Для будь-якої функції $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda^c_{-b})$ виконується нерівність

$$m_{-b}(\varphi) \geq M_\varphi(r), \qquad \forall\, r:\ a \leq r \leq b.$$

Тому з умови $\varphi \overset{m_{-b}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{r\in[a,b]} M_{\varphi_n-\varphi}(r) = 0$. Оскільки $\big|\varphi\big|_{-a} = \big|\varphi\big|_{-b} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{a}^{b} M_\varphi(r) \frac{dr}{r}$, то звідси, а також з умови $\varphi \overset{|\cdot|_{-b}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, отримуємо $\varphi \overset{|\cdot|_{-a}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$. Очевидно

$$\varphi \overset{m_{-b}}{=} \lim_{n\to\infty} \varphi_n \quad \Longrightarrow \quad \varphi \overset{m_{-a}}{=} \lim_{n\to\infty} \varphi_n\,.$$

Таким чином, маємо одночасно $\varphi \overset{m_{-a}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, $\qquad \varphi \overset{|\cdot|_{-a}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$, що еквівалентно умові $\varphi \overset{\|\cdot\|_{-b}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ і неперервність операторів звуження встановлена.

Користаючи з неперервності звужень $\mathcal{H}(\Lambda^c_{-b}) \longmapsto \mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})$ для всіх $0 < a \leq b$, можемо утворити індуктивну границю банахових алгебр

$$\mathcal{H}(\Lambda^c_0) := \bigcup_{a>0} \mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})\,,$$

взяту за числами $a > 0$ із достатньо малого околу нуля. Така границя є топологічною алгеброю і складається з функцій, голоморфних в кожній з областей Λ^c_{-a} та неперервних в замиканнях $\overline{\Lambda^c_{-a}}$ $\Big($які включають деякий окіл точки $\big\{0\big\}\Big)$. Як видно з побудови, правильним є включення

$$\mathcal{H}(\Lambda^c_0) \subset \mathcal{H}(\Lambda^c).$$

Приклад 2. Підалгебрі $\mathcal{H}(\Lambda^c_0)$ належить експоненціальна функції

$$\Lambda^c \ni \lambda = re^{i\omega} \longmapsto e^{z\,\lambda}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \big\{0\big\} :\ \big|\arg(z)\big| < \omega_0 - c - \frac{\pi}{2}\,.$$

Справді, при $\big|\arg(z)\big| < \omega_0 - c - \frac{\pi}{2}$ маємо

$$\mathrm{Re}\,(z\lambda) = |z\lambda| \cos\big[\arg(z) + \omega\big] < 0, \qquad \forall\, \omega \in \big[\omega_0 - c,\, 2\pi - \omega_0 + c\big].$$

Оскільки існує число $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}(\arg(z)) \in \big[\omega_0 - c,\, 2\pi - \omega_0 + c\big]$, в якому досягається $\max\limits_{\omega \in \big[\omega_0 - c,\, 2\pi - \omega_0 + c\big]} e^{r|z|\cos\big[\arg(z)+\omega\big]}$, то $M_{e^{z\lambda}}(r) = e^{r|z|\cos\big[\arg(z)+\widetilde{\omega}\big]} \le 1$. Максимум функції $\big|e^{z\lambda}\big|$ в області Λ^c_{-a} може досягатися тільки на межі, тобто, при $\widetilde{\omega} = \omega_0 - c$ або $\widetilde{\omega} = 2\pi - \omega_0 + c$ для довільного $r > a$, та при $r = a$ для довільного $\omega \in \big[0,\, 2\pi\big]$. Тому для будь-якого числа $a > 0$, маємо

$$\big\|e^{z\lambda}\big\|_{-a} \le K + \frac{1}{\pi}\int\limits_a^{+\infty} e^{r|z|\cos\big[\arg(z)+\widetilde{\omega}\big]}\,\frac{dr}{r} = K + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-a|z|\cos\big[\arg(z)+\widetilde{\omega}\big]}^{+\infty} \frac{e^{-s}\,ds}{s} < \infty,$$

де $K := \max\Big\{1;\ \max_{\omega\in[0,2\pi]} e^{a|z|\cos\big[\arg(z)+\omega\big]}\Big\}$.

Приклад 3. Підалгебрі $\mathcal{H}(\Lambda^c_0)$ належить похідна експоненціальної функції за параметром z

$$\Lambda^c \ni \lambda \longmapsto \lambda e^{z\lambda}, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\big\{0\big\} :\ \big|\arg(z)\big| < \omega_0 - c - \frac{\pi}{2},$$

оскільки вона має в області Λ^c_{-a} скінченну рівномірну норму

$$m_{-a}(\lambda e^{z\lambda}) = \max\Big\{a \max_{\omega\in[0,2\pi]} e^{a|z|\cos\big[\arg(z)+\omega\big]};\ \sup_{a<r<\infty} r e^{r|z|\cos\big[\arg(z)+\widetilde{\omega}\big]}\Big\},$$

та $\big\|\lambda e^{z\lambda}\big\|_{-a} \le m_a(\lambda e^{z\lambda}) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-a|z|\cos\big[\arg(z)+\widetilde{\omega}\big]}^{+\infty} e^{-s}\,ds.$

Розглянемо контури

$$\Gamma_{a,\omega} := \Gamma^+_{a,\omega}\bigcup\Gamma^-_{a,\omega}\bigcup\Gamma^0_a, \qquad \Gamma_{-a,\omega} := \Gamma^+_{a,\omega}\bigcup\Gamma^-_{a,\omega}\bigcup\Gamma^0_{-a},$$

де числа $\omega :\ \omega_0 - c \le \omega \le \omega_0$ та $a > 0$ є фіксованими і взято

$$\Gamma^+_{a,\omega} := \Big\{re^{i\omega} :\ r \ge a\Big\}, \quad \Gamma^-_{a,\omega} := \Big\{re^{-i\omega} :\ r \ge a\Big\},$$
$$\Gamma^0_a := \Big\{ae^{i\tau} :\ \tau \in \big[\omega, 2\pi - \omega\big]\Big\}, \quad \Gamma^0_{-a} := \Big\{ae^{i\tau} :\ \tau \in \big[-\omega, \omega\big]\Big\}.$$

Лема 2.3. *Для будь-яких оператора $A \in \mathcal{A}_0$ та функції $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda^c_0)$ в її області аналітичності існує контур $\Gamma_{-a,\omega} \subset \varrho(A)$, який обходить спектр $\sigma(A)$ в додатному напрямку і такий, що формула*

$$\varphi(A) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{-a,\omega}} \varphi(\lambda)\,R(\lambda, A)\,d\lambda \tag{2.5}$$

яка не залежить від вибору в контурі числа a *і кута* ω[1], *однозначно визначає гомоморфізм*

$$\mathcal{H}(\Lambda_0^c) \ni \varphi(\lambda) \longmapsto \varphi(A) \in H\big(\mathcal{A}_0\big) \tag{2.6}$$

алгебри скалярних аналітичних функцій на комутативну алгебру $\mathcal{L}(V_0)\bigcap\mathcal{L}(V_1)$ *-значних функцій операторного аргументу*

$$H\big(\mathcal{A}_0\big) := \left\{\mathcal{A}_0 \ni A \longmapsto \varphi(A) \in \mathcal{L}(V_0)\bigcap\mathcal{L}(V_1) : \varphi \in \mathcal{H}(\Lambda_0^c)\right\}$$

з "поточково" визначеними алгебричними операціями множення $\varphi(A)\cdot\psi(A) = (\varphi\cdot\psi)(A)$ *та додавання і множення на скаляри* $\alpha\varphi(A)+\beta\psi(A) = (\alpha\varphi+\beta\psi)(A)$ *для всіх* $\varphi,\psi\in\mathcal{H}(\Lambda_0^c)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ *і операторів* $A\in\mathcal{A}_0$.

Для будь-яких оператора $A\in\mathcal{A}$ *та функції* $\varphi\in\mathcal{H}(\Lambda^c)$ *існує такий контур* $\Gamma_{a,\omega}\subset\varrho(A)$, *що для довільного числа* $t>0$ *формула*

$$\varphi(tA) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \varphi(t\lambda)\,R(\lambda,A)\,d\lambda, \tag{2.7}$$

яка не залежить від вибору в контурі числа a *і кута* ω, *однозначно визначає гомоморфізм*

$$\Phi\colon \mathcal{H}(\Lambda^c) \ni \varphi(t\lambda) \longmapsto \varphi(tA) \in H\big(\mathcal{A}\big) \tag{2.8}$$

алгебри скалярних аналітичних функцій на комутативну алгебру $\mathcal{L}(V_0)\bigcap\mathcal{L}(V_1)$ *-значних функцій операторного аргументу*

$$H\big(\mathcal{A}\big) := \left\{\mathcal{A} \ni tA \longmapsto \varphi(tA) \in \mathcal{L}(V_0)\bigcap\mathcal{L}(V_1) : \varphi \in \mathcal{H}(\Lambda^c)\right\}$$

з "поточково" визначеними алгебричними операціями множення $\varphi(A)\cdot\psi(A) = (\varphi\cdot\psi)(A)$ *та додавання і множення на скаляри* $\alpha\varphi(A)+\beta\psi(A) = (\alpha\varphi+\beta\psi)(A)$ *для всіх* $\varphi,\psi\in\mathcal{H}(\Lambda^c)$, *скалярів* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ *і операторів* $A\in\mathcal{A}$.

Для будь-яких оператора $A\in\mathcal{A}\subset\mathcal{A}_0$ *і функції* $\varphi\in\mathcal{H}(\Lambda_0^c)\subset\mathcal{H}(\Lambda^c)$ *оператори* $\varphi(A)$, *визначені формулами (2.5) та (2.7), збігаються.*

[1]Насправді родина операторів $\varphi(A)$, визначена наведеною формулою, не залежить від ширшого класу деформацій контура $\Gamma_{\mp a,\omega}$, але ми не будемо цього використовувати

Гомоморфізми (2.6) та (2.8) є неперервними у наступному сенсі: якщо в алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda_0^c)$ *послідовність функцій* φ_n *має границю* $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n \overset{\mathcal{H}(\Lambda_0^c)}{=} \varphi$ $\Big(\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n \overset{\mathcal{H}(\Lambda^c)}{=} \varphi$ *в алгебрі* $\mathcal{H}(\Lambda^c)\Big)$, *то для будь-якого оператора* $A \in \mathcal{A}_0$ *(відповідно,* $A \in \mathcal{A}$*), маємо* $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(A) \overset{\mathcal{L}(V_j)}{=} \varphi(A)$ *за нормою алгебри* $\mathcal{L}(V_j)$, $j = 0, 1$, *для всіх операторів* $A \in \mathcal{A}_0$ *(відповідно,* $A \in \mathcal{A}$*).*

Доведення. Нехай $A \in \mathcal{A}_0$ і $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda_0^c)$. Виберемо число $a > 0$ і відповідний йому контур $\Gamma_{-a,\omega}$ такими, щоб функція φ була неперервною на ньому. Це можна зробити, бо за означенням алгебри $\mathcal{H}(\Lambda_0^c)$ для кожної її функції існує аналітичне розширення в деякий окіл нуля. Тоді формула (2.5) визначає обмежений оператор $\varphi(A)$ над просторами V_0 і V_1. Справді, з леми 2.2 випливає існування сталої C', для якої виконуються нерівності

$$\big\|R(\lambda, A)\big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{C'}{|\lambda|}, \qquad \big\|R(\lambda, A)E_{10}\big\|_{\mathcal{L}(V_1)} \le \frac{C'}{|\lambda|}, \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda_{-a}.$$

Оскільки, $\Gamma_{-a,\omega} \subset \Lambda_{-a}$, то можемо оцінити інтеграл у формулі (2.5) наступним чином

$$\begin{aligned}
\big\|\varphi(A)\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} &= \frac{1}{2\pi}\Bigg\|\int\limits_{\Gamma_{-a,\omega}} \varphi(\lambda)R(\lambda, A)\,d\lambda\Bigg\|_{\mathcal{L}(V_j)} \le \\
&\frac{C'}{2\pi}\Bigg[\int\limits_{\Gamma^+_{a,\omega}} \big|\varphi(re^{i\omega})\big|\frac{dr}{r} + \int\limits_{\Gamma^-_{a,\omega}} \big|\varphi(re^{-i\omega})\big|\frac{dr}{r} + \int\limits_{\Gamma^0_{-a}} \big|\varphi(ae^{i\tau})\big|\,d\tau\Bigg] \le \\
&\frac{C'}{2\pi}\Bigg[2\int\limits_{a}^{+\infty} M_\varphi(r)\frac{dr}{r} + 2\omega\, m_{-a}(\varphi)\Bigg] \le C'\big\|\varphi\big\|_{-a}, \qquad j = 0, 1.
\end{aligned}$$

Отож, $\varphi(A) \in \mathcal{L}(V_0)\bigcap\mathcal{L}(V_1)$. Крім цього, із встановленої нерівності випливає неперервність відображення (2.6), сформульована в твердженні (a).

Тепер розглянемо випадок $A \in \mathcal{A}$ і $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda^c)$. Для оператора A існує число $a:\ 0 < a < r(A)$ і такий відповідний контур $\Gamma_{a,\omega} \subset \Lambda_a$, що формула (2.7) визначає обмежені оператори $\varphi(tA)$ над просторами V_0 і V_1 для будь-якого $t > 0$. Справді, з леми 2.2 випливає існування сталої $C'' > 0$ такої,

що

$$\big\|R(\lambda,A)\big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{C''}{|\lambda|}, \qquad \big\|R(\lambda,A)E_{10}\big\|_{\mathcal{L}(V_1)} \le \frac{C''}{|\lambda|}, \qquad \forall\,\lambda\in\Lambda_a\setminus\big\{0\big\}.$$

Оскільки, $\Gamma_{a,\omega}\subset\Lambda_a\setminus\big\{0\big\}$, то оцінюючи інтеграл у формулі (2.7) подібно до попереднього, одержуємо

$$\big\|\varphi(tA)\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} = \frac{1}{2\pi}\Bigg\|\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \varphi(t\lambda)\,R(\lambda,A)\,d\lambda\Bigg\|_{\mathcal{L}(V_j)} \le$$

$$\frac{C''}{2\pi}\Bigg[\int\limits_{\Gamma^+_{a,\omega}} \big|\varphi(rt\,e^{i\omega})\big|\frac{dr}{r} + \int\limits_{\Gamma^-_{a,\omega}} \big|\varphi(rt\,e^{-i\omega})\big|\frac{dr}{r} + \int\limits_{\Gamma^0_a} \big|\varphi(at\,e^{i\tau})\big|\,d\tau\Bigg] =$$

$$\frac{C''}{2\pi}\Bigg[\int\limits_{\Gamma^+_{at,\omega}} \big|\varphi(s\,e^{i\omega})\big|\frac{ds}{s} + \int\limits_{\Gamma^-_{at,\omega}} \big|\varphi(s\,e^{-i\omega})\big|\frac{ds}{s} + \int\limits_{\Gamma^0_a} \big|\varphi(at\,e^{i\tau})\big|\,d\tau\Bigg] \le$$

$$\frac{C''}{2\pi}\Bigg[2\int\limits_{at}^{+\infty} M_\varphi(s)\frac{ds}{s} + 2(\pi-\omega)M_\varphi(at)\Bigg] \le C''\big\|\varphi\big\|_{at}, \qquad j=0,1.$$

Отже, $\Big\{\varphi(tA)\,:\,t>0\Big\}\in\mathcal{L}(V_0)\bigcap\mathcal{L}(V_1)$. З нерівності випливає також неперервність відображення (2.8). Нарешті, лінійність відображень (2.6) та (2.8) є наслідком лінійності інтеграла в формулах (2.5), (2.7).

Якщо тепер в інтегральній формулі (2.5) для операторів $\varphi(A)$ контур $\Gamma_{-a,\omega}$ замінити на довільний контур $\Gamma_{-a',\omega'}\subset\varrho\,(A)$, такий, що $0<a\le a'$ та $\omega_0-c\le\omega'\le\omega\le\omega_0$, то за теоремою Коші для необмежених областей [28],

$$\Bigg(\int\limits_{\Gamma_{-a,\omega}} - \int\limits_{\Gamma_{-a',\omega'}}\Bigg)\varphi(\lambda)\,R(\lambda,A)\,d\lambda = 0.$$

Справді, підінтегральна функція аналітична в області між контурами $\Gamma_{-a,\omega}$ та $\Gamma_{-a',\omega'}$, а на безмежності, згідно з (2.4), задовольняє умову

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\big\|\varphi(\lambda)\,R(\lambda,A)\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} \le C'\lim_{|\lambda|\to\infty}\frac{M_\varphi\big(|\lambda|\big)}{|\lambda|} = 0, \qquad j=0,1.$$

Тобто, незалежність $\varphi(A)$ від вибору $\Gamma_{-a,\omega}$ встановлено.

Замінимо в формулі (2.7) контур $\Gamma_{a,\omega}$ на такий контур $\Gamma_{a',\omega'} \subset \varrho\,(A)$, що $0 < a \le a'$ та $\omega_0 - c \le \omega \le \omega' \le \omega_0$. Згідно з тим, що між контурами $\Gamma_{a',\omega'}$ та $\Gamma_{a,\omega}$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \big\|\varphi(t\lambda)\, R(\lambda, A)\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} \le C'' \lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{M_\varphi\big(|t\lambda|\big)}{|\lambda|} = 0, \qquad j = 0, 1,$$

за теоремою Коші отримуємо

$$\left(\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} - \int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}} \right) \varphi(t\lambda)\, R(\lambda, A)\, d\lambda = 0, \qquad \forall\, t > 0.$$

Отже, формула (2.8) також не залежить від вибору контура $\Gamma_{a,\omega}$.

Розглянемо випадок $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$ і $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda_0^c) \subset \mathcal{H}(\Lambda^c)$. Маємо

$$\varphi(tA) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \varphi(t\lambda)\, R(\lambda, A)\, d\lambda =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{at,\,\omega}} \varphi(\mu)\, R(\mu, tA)\, d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{-a',\omega}} \varphi(\mu)\, R(\mu, tA)\, d\mu$$

для будь-якого з таких чисел $a' > 0$, що контур $\Gamma_{-a',\omega}$ залишається в області аналітичності функції φ. Справді, за теоремою Коші, застосованої до скінченної області між контурами $\Gamma_{at,\omega}$ та $\Gamma_{-a',\omega}$,

$$\left(\int\limits_{\Gamma_{at,\omega}} - \int\limits_{\Gamma_{-a',\omega'}} \right) \varphi(\mu)\, R(\mu, tA)\, d\mu = 0, \qquad \forall\, t > 0.$$

Отже, у цьому випадку формули (2.5) і (2.7) визначають один і той самий оператор.

Нехай $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(\Lambda_0^c)$ і оператори $\varphi(A)$ та $\psi(A)$ подані як інтеграли вигляду (2.5) з різними контурами $\Gamma_{-a,\omega}$ та $\Gamma_{-a',\omega'}$, де $0 < a \le a'$ та $\omega_0 - c \le \omega' \le \omega \le \omega_0$. Зауважимо, що відкрита множина, яка обмежена контуром $\Gamma_{-a',\omega'}$, містить контур $\Gamma_{-a,\omega}$, а спектр $\sigma(A)$ міститься всередині

внутрішнього контура $\Gamma_{-a,\omega}$. Тоді

$$\varphi(A)\,\psi(A) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma_{-a,\omega}}\int\limits_{\Gamma_{-a',\omega'}} \varphi(\lambda)\psi(\mu)\,R(\lambda,A)\,R(\mu,A)\,d\mu\,d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{-a,\omega}} \varphi(\lambda)R(\lambda,A)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{-a',\omega'}} \frac{\psi(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu\right)d\lambda$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{-a',\omega'}} \psi(\mu)R(\mu,A)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{-a,\omega}} \frac{\varphi(\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\lambda\right)d\mu\,.$$

Вище ми скористалися резольвентною тотожністю

$$R(\lambda,A)R(\mu,A) = \frac{1}{\mu-\lambda}\Big[R(\lambda,A)-R(\mu,A)\Big],$$

правильною для всіх $\lambda \neq \mu$ із сектора Λ_0. Оскільки точка $\lambda \in \Gamma_{-a,\omega}$ лежить всередині контура $\Gamma_{-a',\omega'}$, тоді як точка $\mu \in \Gamma_{-a',\omega'}$ лежить поза $\Gamma_{-a,\omega}$, то інтеграли, які містять $(\mu-\lambda)^{-1}$, дорівнюють відповідно $\psi(\lambda)$ і 0 $\big($ за вже згадуваною теоремою Коші [147]$\big)$. Звідси одержуємо

$$\varphi(A)\,\psi(A) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{-a,\omega}} \varphi(\lambda)\psi(\lambda)\,R(\lambda,A)\,d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{-a,\omega}} \psi(\lambda)\varphi(\lambda)\,R(\lambda,A)\,d\lambda = \psi(A)\,\varphi(A).$$

Комутативність алгебри $H\big(\mathcal{A}_0\big)$ доведено. Комутативність алгебри $H\big(\mathcal{A}\big)$ доводиться аналогічно. Звідси також видно, що лінійне відображення (2.5) реалізує гомоморфізм цих комутативних алгебр. Лема доведена. $\square$

2.3 Основні властивості півгруп, породжених секторіальними операторами

Застосуємо отримані в 2.1 та 2.2 результати до дослідження півгруп, породжених секторіальними операторами класу $\mathcal{A}$, заданого кутом $\omega_0 : \frac{\pi}{2} < \omega_0 < \pi$.

Нехай $A \in \mathcal{A}$. Довільному числу $c > 0 : \frac{\pi}{2} < \omega_0 - c$ співставимо комплексний сектор

$$S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}} := \left\{z = t + i\tau \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : \big|\arg(z)\big| < \omega_0 - c - \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Лема 2.4. (a) *Операторнозначна функція*

$$S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}} \ni z \longmapsto e^{zA} := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{z\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda \in \mathcal{L}(V_0) \bigcap \mathcal{L}(V_1) \tag{2.9}$$

не залежить від вибору параметрів $\omega : \omega_0 - c \le \omega \le \omega_0$ *та* $a : 0 < a < r(A)$, *контура* $\Gamma_{a,\omega}$ *і за комплексною змінною* z *має півгрупову властивість.*

(b) *Для будь-яких* $z \in S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}}$ *та* $x \in V_0$ *маємо* $e^{zA}x \in V_1$. *Якщо* $x \in V_1$, *то*

$$Ae^{zA}x = e^{zA}Ax, \qquad \forall\, z \in S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}}\,. \tag{2.10}$$

(c) *Операторнозначна функція (2.9) аналітична і задовольняє співвідношення*

$$\frac{d}{dz}\, e^{zA} = Ae^{zA}, \qquad \forall\, z \in S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}}. \tag{2.11}$$

(d) *Для будь-якого числа* $\varepsilon > 0$ *та будь-якої замкненої підмножини* S_0 *в секторі* $S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}}$ *виконується нерівність*

$$\max_{j=0,1} \left\| e^{z\,A} \right\|_{\mathcal{L}(V_j)} \le C_\varepsilon\, e^{|z|\,\left[r(A)+\varepsilon\right]}, \qquad \forall\, z \in S_0, \tag{2.12}$$

де число $r(A) := \sup\Big\{ \operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A) \Big\} < 0$ *є типом оператора* A.

(e) *Елемент* x *належить простору* V_1 *тоді і тільки тоді, коли*

$$Ax \overset{V_0}{=} \lim_{t\to+0} \frac{e^{tA}x - x}{t}$$

за нормою простору V_0, *тобто, коли оператор* A *є генератором півгрупи* e^{tA} *над простором* V_0.

Доведення. Вище було показано, що для всіх значень параметра $z \in S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}}$ функція $\mathbb{C} \ni \lambda \longmapsto e^{z\lambda} \in \mathbb{C}$ належить алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda_0^c)$. Для всіх $z, \xi \in S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}}$, маємо $z + \xi \in S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}}$. Тому за гомоморфізмом алгебр, встановленим у лемі 2.3, з рівності $e^{(z+\xi)\lambda} = e^{z\lambda}e^{\xi\lambda}$ випливає $e^{(z+\xi)A} = e^{zA}e^{\xi A}$ для всіх $z, \xi \in S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}}$. Півгрупова властивість (a) встановлена.

Як було відзначено вище, $\lambda e^{z\lambda} \in \mathcal{H}(\Lambda_0^c)$ для всіх $z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$. Тому згідно з лемою 2.3

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \lambda e^{z\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda \in \mathcal{L}(V_0) \bigcap \mathcal{L}(V_1), \qquad \forall\, z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}\,.$$

З тотожності

$$AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - E_{00}\,, \qquad \lambda \in \Gamma_{a,\omega}\,, \tag{2.13}$$

отримуємо рівності

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \lambda e^{z\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda = & \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{z\lambda} AR(\lambda, A)\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{z\lambda} E_{00}\, d\lambda \\ & = \frac{A}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{z\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda = Ae^{zA}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Справді, оскільки оператори A, E_{00} замкнені, то їх можна витягати з-під інтегралу [147]. Крім цього, $\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{z\lambda}\, d\lambda = 0$ згідно з теоремою Коші [147], оскільки на безмежності з боку області Λ^c підінтегральна функція задовольняє умову

$$\lim_{r \to \infty} M_{e^{z\lambda}}(r) = 0, \qquad \forall\, z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}.$$

Це так, бо як було обчислено вище, функція $M_{e^{z\lambda}}(r)$ має вигляд

$$M_{e^{z\lambda}}(r) = e^{r|z| \cos\left[\arg(z) + \widetilde{\omega}\right]}, \qquad \widetilde{\omega} \in \left[\omega_0 - c, 2\pi - \omega_0 + c\right],$$

і при цьому $\cos\left[\arg(z) + \widetilde{\omega}\right] < 0, \qquad z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$.

З рівності (2.14) випливає, що $e^{zA}x \in V_1$ для всіх векторів $x \in V_0$ та чисел $z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$. Крім цього, оскільки

$$AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax, \qquad \forall\, x \in V_1\,, \quad \lambda \in \Gamma_{a,\omega}\,,$$

то з (2.9) отримуємо $Ae^{zA}x = e^{zA}Ax$ для всіх $x \in V_1$ та $z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$. Твердження (b) леми доведено.

Оскільки похідна $\frac{d}{dz} e^{z\lambda} = \lambda e^{z\lambda}$ також належить алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda_0^c)$ для всіх $z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$, то інтеграл у формулі (2.14) можна диференціювати за параметром z. Диференціюючи, отримуємо

$$\frac{d}{dz} e^{zA} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \lambda e^{z\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda = Ae^{zA}, \qquad \forall\, z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}.$$

Нарешті з факту існування похідної функції комплексної змінної $S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}} \ni z \longmapsto e^{zA}$ випливає її аналітичність [147]. Твердження (c) доведено.

Доведемо правильність твердження (d). В інтегральній формулі (2.9) для півгрупи e^{zA} контур $\Gamma_{a,\omega}$ не залежить від вибору чисел a. Тому a можемо задавати таким, що

$$0 < a = -\big[r(A) + \varepsilon\big], \qquad \forall\, \varepsilon > 0 : \Gamma_{a,\omega} \subset \varrho\,(A).$$

А тому, зокрема, число $\varepsilon > 0$ може бути довільно малим.

Із леми 2.2 випливає існування такої сталої $C > 0$, що

$$\big\|R(\lambda, A)\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} \leq \frac{C}{|\lambda|}, \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda_a \setminus \big\{0\big\}, \quad j = 0, 1.$$

Тепер

$$\begin{aligned}\big\|e^{zA}\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} \leq\ & \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \big\|e^{z\lambda} R(\lambda, A)\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} |d\lambda| \leq \frac{C}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{|e^{z\lambda}\, d\lambda|}{|\lambda|} \leq \\ & \frac{C}{\pi} \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{e^{r|z|\cos\left[\arg(z)+\widetilde{\omega}\right]}\, dr}{r} + \frac{C}{2\pi a} \int\limits_{\omega}^{2\pi-\omega} e^{a|z|\cos\left[\arg(z)+\theta\right]}\, d\theta = \\ & \frac{C}{\pi} \int\limits_{-a|z|\cos\left[\arg(z)+\widetilde{\omega}\right]}^{+\infty} \frac{e^{-s}\, ds}{s} + \frac{C}{2\pi a} \int\limits_{\omega}^{2\pi-\omega} e^{a|z|\cos\left[\arg(z)+\theta\right]}\, d\theta,\end{aligned}$$

де число $\widetilde{\omega} \in \big[\omega_0 - c, 2\pi - \omega_0 + c\big]$, яке залежить від $\arg(z)$ і не залежить від $r > a$, є точкою максимуму неперервної функції $\max\limits_{\omega \in \left[\omega_0 - c,\, 2\pi - \omega_0 + c\right]} e^{r|z|\cos\left[\arg(z)+\omega\right]} = e^{r|z|\cos\left[\arg(z)+\widetilde{\omega}\right]}$. Проводячи в інтегралі заміну $s' = s - a|z|$, отримуємо

$$\begin{aligned}\big\|e^{zA}\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} \leq\ & \frac{C}{\pi} \int\limits_{-a|z|\cos\left[\arg(z)+\widetilde{\omega}\right]}^{+\infty} \frac{e^{-s}\, ds}{s} + \frac{C}{2\pi a} \int\limits_{\omega}^{2\pi-\omega} e^{a|z|\cos\left[\arg(z)+\theta\right]}\, d\theta = \\ & \frac{Ce^{-a|z|}}{\pi} \int\limits_{-a|z|\cos\left[\arg(z)+\widetilde{\omega}\right]-a|z|}^{+\infty} \frac{e^{-s'}\, ds'}{s' + a|z|} + \frac{Ce^{-a|z|}}{2\pi a} \int\limits_{\omega}^{2\pi-\omega} e^{a|z|\cos\left[\arg(z)+\theta\right]+a|z|}\, d\theta.\end{aligned}$$

Враховуючи строгу від'ємність функції $\cos\big[\arg(z)+\widetilde{\omega}\big]$ для всіх чисел $z \in S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}}$ та $\widetilde{\omega} \in \big[\omega_0 - c,\, 2\pi - c - \omega_0\big]$, зауважимо, що в першому інтегралі особлива точка підінтегральної функції $s' = -a|z|$ не належить проміжку інтегрування $\Big[-a|z|\,\cos\big[\arg(z)+\widetilde{\omega}\big]-a|z|, \quad +\infty\Big)$. На будь-якій замкненій підмножині S_0 у відкритому секторі $S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}}$ досягається нижня границя неперервної функції $-a|z|\,\cos\big[\arg(z)+\widetilde{\omega}\big]-a|z|$, причому

$$-a|z| < c_a := \inf_{z\in S_0}\Big[-a|z|\,\cos\big[\arg(z)+\widetilde{\omega}\big]-a|z|\Big] \le 0.$$

На інтервалі $\big[c_a,\, +\infty\big)$ підінтегральна функція задовольняє оцінку

$$\frac{e^{-s'}}{s'+a|z|} \le \frac{e^{-s'}}{s'+b_a}, \quad \text{де} \quad -a|z| < b_a := \frac{c_a - a|z|}{2} < c_a.$$

Тому на будь-якій замкненій підмножині $S_0 \subset S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}}$ виконується нерівність

$$\frac{Ce^{-a|z|}}{\pi}\int\limits_{-a|z|\,\cos\left[\arg(z)+\widetilde{\omega}\right]-a|z|}^{+\infty}\frac{e^{-s'}\,ds'}{s'+a|z|} + \frac{Ce^{-a|z|}}{2\pi a}\int\limits_{\omega}^{2\pi-\omega} e^{a|z|\,\cos\left[\arg(z)+\theta\right]+a|z|}\,d\theta$$

$$\le \frac{Ce^{-a|z|}}{\pi}\int\limits_{c_a}^{+\infty}\frac{e^{-s'}\,ds'}{s'+b_a} + \frac{C_a e^{-a|z|}(\pi-\omega)}{2\pi a},$$

де $C_a := \sup\limits_{z\in S_0}\Big[-a|z|\,\cos\big[\arg(z)+\widetilde{\omega}\big]-a|z|\Big]$ і стала $C_\varepsilon := \frac{C}{\pi}\int\limits_{c_a}^{+\infty}\frac{e^{-s'}\,ds'}{s'+b_a} + \frac{C_a(\pi-\omega)}{2\pi a}$ є скінченною (особлива точка $s' = -b_a$ підінтегральної функції не належить проміжку інтегрування). Звідси отримуємо

$$\big\|e^{zA}\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} \le C_\varepsilon\, e^{-a|z|}, \qquad \forall\, z \in S_0\,, \quad j = 0, 1.$$

Тобто, нерівність (2.12) та відповідне твердження (d) встановлено, якщо підставити $a = -\big[r(A)+\varepsilon\big]$.

Для доведення правильності твердження (e) спочатку покажемо, що

$$\int\limits_0^t e^{sA}x\,ds \in V_1\,,$$

$$e^{tA}x - x = A\int\limits_0^t e^{sA}x\,ds, \quad \forall\, x \in V_0, \quad t > 0. \tag{2.15}$$

Для чисел $0 < \varepsilon < t$ із формули (2.11) отримуємо

$$\int\limits_{\varepsilon}^{t} e^{sA}x\,ds = \int\limits_{\varepsilon}^{t} AA^{-1}e^{sA}x\,ds = \int\limits_{\varepsilon}^{t} \frac{d}{ds}\big[A^{-1}e^{sA}x\big]\,ds = A^{-1}\big[e^{tA}x - e^{\varepsilon A}x\big].$$

Звідси при $\varepsilon \to +0$ на підставі твердження (b), маємо

$$\int\limits_{0}^{t} e^{sA}x\,ds = A^{-1}\big[e^{tA}x - x\big] \in V_1\,, \quad \text{або} \quad A\int\limits_{0}^{t} e^{sA}x\,ds = e^{tA}x - x.$$

Довели правильність (2.15).

Із другої рівності в (2.15) та співвідношення (2.10) для всіх $x \in V_1$

$$\lim_{t\to+0} \frac{e^{tA}x - x}{t} \overset{V_0}{=} \lim_{t\to+0} \frac{A}{t}\int\limits_{0}^{t} e^{sA}x\,ds \overset{V_0}{=} \lim_{t\to+0} \frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t} e^{sA}Ax\,ds. \tag{2.16}$$

Згідно з твердженням (d), підінтегральна функція $0 < s \longmapsto e^{sA}Ax$ неперервна в нулі. Тому з (2.16) отримуємо

$$\lim_{t\to+0} \frac{e^{tA}x - x}{t} \overset{V_0}{=} Ax, \qquad \forall\, x \in V_1.$$

Навпаки, з існування для функції $0 < t \longmapsto e^{tA}x \in V_0$ на елементі $x \in V_0$ правої похідної в нулі $\lim_{t\to+0} \frac{e^{tA}x - x}{t} \overset{V_0}{=} y$, маємо $y \in V_0$. Тому

$$R(\lambda, A)y \overset{V_0}{=} \lim_{t\to+0} R(\lambda, A)\frac{e^{tA}x - x}{t}, \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda^c.$$

Звідси, враховуючи (2.13) та (2.15), отримуємо

$$R(\lambda, A)y \overset{V_0}{=} \lim_{t\to+0} \frac{R(\lambda, A)A}{t}\int\limits_{0}^{t} e^{sA}x\,ds \overset{V_0}{=} \lim_{t\to+0} \frac{\lambda R(\lambda, A) - E_{00}}{t}\int\limits_{0}^{t} e^{sA}x\,ds.$$

З неперервності підінтегральної функції $0 \le s \longmapsto e^{sA}x \in V_0$ в нулі справа та останньої рівності, для будь-якої точки $\lambda \in \Lambda^c$ отримуємо

$$R(\lambda, A)y = \lambda R(\lambda, A)x - x, \quad \text{або} \quad x = \lambda R(\lambda, A)x - R(\lambda, A)y \in V_1\,.$$

Твердження (e) доведено. $\square$

Зауваження 2.2. Із (d) випливає наступне граничне співвідношення

$$\lim_{t\to+\infty} \big\|e^{tA}\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} = 0, \qquad j = 0, 1. \tag{2.17}$$

2.4 Задача Коші для збурених параболічних рівнянь

Означення 2.2. Банахів комплексний простір $\big(U, \|\cdot\|_U\big)$ називають проміжним для пари банахових просторів $\big\{V_0; V_1\big\}$, якщо правильні наступні неперервні (не обов'язково щільні) вкладення

$$V_1 \subset U \subset V_0.$$

Проміжний простір U для пари $\big\{V_0; V_1\big\}$ будемо називати правильним, якщо виконується одна з двох умов:

(a) $U = V_1$,

або

(b) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, C_\varepsilon > 0: \quad \big\|x\big\|_U \le \varepsilon \big\|x\big\|_1 + C_\varepsilon \big\|x\big\|_0, \quad \forall\, x \in V_1$.

Правильними проміжними будуть обидва крайні простори пари V_0 і V_1, а також всі такі, що задовольняють умову (b) наведеного означення.

Теорема 2.1. *Нехай U — правильний проміжний банахів простір для пари банахових просторів $\big\{V_0; V_1\big\}$. Тоді для будь-якого оператора $A \in \mathcal{A}$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх операторів $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$, для яких*

$$\big\|X\big\|_{\mathcal{L}(U;V_0)} < \delta,$$

виконуються умови

$$A + X\big|_{V_1} \in \mathcal{A}, \qquad \Lambda \subset \varrho\,(A) \bigcap \varrho\,(A + X)$$

та справджується нерівність

$$\big\|R(\lambda, A + X)\big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le 2\,\big\|R(\lambda, A)\big\|_{\mathcal{L}(V_0)}, \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda. \tag{2.18}$$

Операторнозначна функція

$$u(t) = e^{t(A + X|_{V_1})} u_0, \quad t \ge 0,$$

задана формулою (2.9), *є єдиним розв'язком збуреної задачі Коші*

$$\frac{du}{dt} = (A + X)u, \qquad u(0) = u_0 \in V_1.$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $U = V_1$. Нехай $\lambda \in \Lambda$ та $A, X \in \mathcal{A}$. З тотожності

$$\lambda E_{10} - A - X = \Big[E_{00} - X\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big]\big(\lambda E_{10} - A\big),$$

отримуємо

$$\big(\lambda E_{10} - A - X\big)^{-1} = \big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big[E_{00} - X\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big]^{-1}. \tag{2.19}$$

З означення класу $\mathcal{A}$ та нерівності

$$\Big\|X\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \|X\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}\Big\|\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}$$

випливає, що при

$$\|X\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)} \le \frac{1}{2K(A)}, \qquad K(A) := \sup_{\lambda\in\Lambda}\Big\|\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}, \tag{2.20}$$

в банаховій алгебрі $\mathcal{L}(V_0)$ збігається операторний ряд

$$\Big[E_{00} - X\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\big[X(\lambda E_{10} - A)^{-1}\big]^k.$$

Справді,

$$\Big\|\Big[E_{00} - X\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big]^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \sum_{k=0}^{\infty}\Big\|X\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|^k_{\mathcal{L}(V_0)} \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2.$$

Звідси та з тотожності (2.19)

$$\begin{aligned}
&\Big\|\big(\lambda E_{10} - A - X\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} \le \\
&\Big\|\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}\Big\|\Big[E_{00} - X\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big]^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \\
&2\Big\|\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

для всіх $\lambda \in \Lambda$ та всіх $X \in \mathcal{A}$ з околу (2.20). Отже,

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\Big\|\big(\lambda E_{10} - A - X\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} \le 2K(A),$$

тобто, для будь-якого оператора $A \in \mathcal{A}$ його окіл

$$\left\{X \in \mathcal{L}(V_1; V_0) : \ \|X\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)} \leq \delta(A) = \frac{1}{2K(A)}\right\}$$

міститься в $\mathcal{A}$. Зокрема, звідси випливає відкритість множини $\mathcal{A}$ в нормі простору $\mathcal{L}(V_0; V_1)$.

Домножуючи зліва тотожність (2.19) на оператор вкладення E_{10} і оцінюючи вище замість резольвенти $\big(\lambda E_{10} - A - X\big)^{-1}$ функцію $R(\lambda, A + X) = E_{10}\big(\lambda E_{10} - A - X\big)^{-1}$ бачимо, що нерівність (2.21) набуває вигляду (2.18).

Нехай тепер простір U задовольняє умову (b) означення 2.2. Зафіксуємо довільне число $a > 0$ і розглянемо оператор вкладення $E_{1U} : V_1 \longmapsto U$. Для будь-яких чисел $\varepsilon > 0$ та всіх елементів $x \in V_0$ за лемою 2.1 існує така стала $C > 0$, що

$$\Big\|E_{1U}\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}x\Big\|_U \leq \varepsilon\Big\|\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}x\Big\|_1 + C_\varepsilon\Big\|R(\lambda, A)x\Big\|_0 \leq$$

$$C\left(\varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|}\right)\|x\|_0 \leq C\left(\varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{a}\right)\|x\|_0\,,$$

або

$$\Big\|E_{1U}\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0,U)} \leq C\left(\varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{a}\right), \quad \forall\, \lambda \in \Lambda\backslash\Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leq a\Big\}.$$

З іншого боку, очевидно, маємо

$$\Big\|E_{1U}\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0,U)} \leq \big\|E_{1U}\big\|_{\mathcal{L}(V_1,U)}\Big\|\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0,V_1)} \leq$$

$$\leq K(A)\big\|E_{1U}\big\|_{\mathcal{L}(V_1,U)}\,, \quad \forall\, \lambda \in \Lambda \bigcap \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leq a\Big\},$$

тобто існує така стала

$$K'(A) := \max\left\{K(A)\big\|E_{1U}\big\|_{\mathcal{L}(V_1,U)}; \quad C\left(\varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{a}\right)\right\},$$

що

$$\Big\|E_{1U}\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0,U)} \leq K'(A), \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda.$$

Повторимо тепер основні фрагменти першої частини доведення, замінюючи в них функцію $X\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}$ на $XE_{1U}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}$. Із нерівності

$$\Big\|XE_{1U}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)}\le\big\|X\big\|_{\mathcal{L}(U;V_0)}\Big\|E_{1U}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;U)}$$

випливає, що при $\big\|X\big\|_{\mathcal{L}(U;V_0)}\le\frac{1}{2K'(A)}$ в банаховій алгебрі $\mathcal{L}(V_0)$ збігається ряд

$$\Big[E_{00}-XE_{1U}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\Big]^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\big[XE_{1U}(\lambda E_{10}-A)^{-1}\big]^k,$$

при цьому правильна оцінка $\Big\|\Big[E_{00}-XE_{1U}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\Big]^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)}\le 2$ для всіх $\lambda\in\Lambda$. Звідси та з тотожності

$$\big(\lambda E_{10}-A-XE_{1U}\big)^{-1}=\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\Big[E_{00}-XE_{1U}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\Big]^{-1}$$

випливає нерівність

$$\Big\|\big(\lambda E_{10}-A-XE_{1U}\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;U)}\le 2\Big\|\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}$$

для всіх $\lambda\in\Lambda$ та всіх $X\in\mathcal{L}(U;V_0)$ з околу $\big\|X\big\|_{\mathcal{L}(U;V_0)}\le\frac{1}{2K'(A)}$.

Застосовуючи тепер лему 3.3, отримуємо останнє твердження теореми. □

Із доведення теореми зокрема випливає, що множина $\mathcal{A}$ відкрита в просторі лінійних неперервних операторів $\mathcal{L}(V_1,V_0)$ відносно топології, породженої рівномірною операторною нормою.

2.5 Дробові степені секторіальних операторів

Розглядаємо пару банахових просторів $V=\big\{V_0;V_1\big\}$ і визначений над ними клас $\mathcal{A}$ секторіальних операторів від'ємного типу, заданий кутом $\omega_0:\frac{\pi}{2}<\omega_0<\pi$. Зафіксуємо деякий оператор $J\in\mathcal{A}$.

Для будь-яких чисел $\vartheta>0$ та $c:\frac{\pi}{2}<\omega_0-c<\pi$ функція

$$\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)\ni\lambda\longmapsto\frac{1}{(-\lambda)^{\vartheta}}=e^{-\vartheta\ln(-\lambda)},$$

де вибрана гілка функції $\ln(-\lambda)$ задовольняє умову $\ln(1) = 0$, належить алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda^c)$ (див. приклад 1). Тому згідно з лемою 2.3 можемо визначати дробові степені оператора

$$(-J)^{-\vartheta} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{R(\lambda, J)}{(-\lambda)^{\vartheta}} \, d\lambda \in \mathcal{L}(V), \tag{2.22}$$

де інтеграл не залежить від вибору числа $a : 0 < a < r(A)$ та кута $\omega : \omega_0 - c \leq \omega \leq \omega_0$.

Родина операторів $(-J)^{-\vartheta}$ володіє півгруповою властивістю

$$(-J)^{-\vartheta}(-J)^{-\vartheta'} = (-J)^{-\vartheta-\vartheta'}, \qquad \forall\, \vartheta, \vartheta' > 0. \tag{2.23}$$

Справді, для будь-яких $0 < a' < a < r(A)$ та $\omega_0 - c \leq \omega < \omega' \leq \omega_0$

$$\begin{aligned}
(-J)^{-\vartheta}(-J)^{-\vartheta'} = \; & \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}} \frac{R(\lambda, J)\, R(\mu, J)}{(-\lambda)^{\vartheta}(-\mu)^{\vartheta'}} \, d\lambda \, d\mu = \\
& \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{R(\lambda, J)}{(-\lambda)^{\vartheta}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}} \frac{d\mu}{(-\mu)^{\vartheta'}(\mu - \lambda)} \right] d\lambda - \\
& \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}} \frac{R(\mu, J)}{(-\mu)^{\vartheta'}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{d\lambda}{(-\lambda)^{\vartheta'}(\mu - \lambda)} \right] d\mu = \\
& \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{R(\lambda, J)}{(-\lambda)^{\vartheta+\vartheta'}} \, d\lambda = (-J)^{-\vartheta-\vartheta'}.
\end{aligned}$$

Врахували, що за теоремою Коші

$$(-\lambda)^{\vartheta'} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}} \frac{d\mu}{(-\mu)^{\vartheta'}(\mu - \lambda)}, \quad \text{а також} \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{d\lambda}{(-\lambda)^{\vartheta'}(\mu - \lambda)} = 0,$$

бо контур $\Gamma_{a,\omega}$ міститься всередині контура $\Gamma_{a',\omega'}$, а тому для всіх $\mu \in \Gamma_{a',\omega'}$ підінтегральна функція є аналітична і прямує до нуля на безмежності всередині $\Gamma_{a,\omega}$.

Оператор $(-J)^{-\vartheta}$ оборотний. Справді, якщо $(-J)^{-\vartheta}x = 0$ для деякого елемента $x \in V_0$, то покладаючи в отриманій рівності $\vartheta' = n \in \mathbb{N}$, для всіх $n > \vartheta$ будемо мати

$$(-J)^{-n}x = (-J)^{-(n-\vartheta)}(-J)^{-\vartheta}x = 0.$$

Звідси випливає, що $x = 0$. Таким чином, побудований оператор $(-J)^{-\vartheta} \in \mathcal{L}(V_0)$ має нульове ядро, а тому існує замкнений обернений

$$(-J)^{\vartheta} := \left[(-J)^{-\vartheta}\right]^{-1} : V_{\vartheta} \longmapsto V_0 \,,$$

де через V_{ϑ} тут і всюди далі позначено його область визначення, наділену нормою графіка

$$\|x\|_{\theta} := \left\|(-J)^{\vartheta} x\right\|_0 \,, \qquad \forall\, x \in V_{\vartheta} \,.$$

Із замкненості $(-J)^{\vartheta}$, за теоремою про замкнений графік, отриманий простір $\Big(V_{\vartheta},\, \|\cdot\|_{\theta}\Big)$ — банахів і вкладення $V_{\vartheta} \subset V_0$ неперервні. З того, що ядро оператора $(-J)^{-\vartheta}$ нульове, випливає щільність вкладення $V_{\vartheta} \subset V_0$. При $\vartheta = 1$, за теоремою про обернений оператор, норма $\|x\|_1 = \left\|(-J)x\right\|_0$, $x \in V_1$, породжена оператором J на просторі V_1, еквівалентна заданій. Очевидно,

Крім того, оскільки функціональне числення визначає обмежені оператори над банаховою парою $V = \big\{V_0; V_1\big\}$ (лема 2.3), то звуження оператора $(-J)^{-\vartheta}$ на підпростір V_1 належить алгебрі $\mathcal{L}(V_1)$. Дослівно застосовуючи до підпростору V_1 попередні міркування переконуємося, що звужений оператор $(-J)^{-\vartheta}\big|_{V_1}$ також має нульове ядро, а тому існують замкнений обернений і його композиція з $(-J)$, відповідно

$$\left[(-J)^{-\vartheta}\big|_{V_1}\right]^{-1} : V_{\vartheta+1} \longmapsto V_1 \,,$$

$$(-J)^{\vartheta+1} := (-J)\left[(-J)^{-\vartheta}\big|_{V_1}\right]^{-1} : V_{\vartheta+1} \longmapsto V_0 \,.$$

Вище через $V_{\vartheta+1}$ позначено область визначення оператора $(-J)^{\vartheta+1}$, наділену нормою графіка

$$\|x\|_{\vartheta+1} := \left\|(-J)^{\vartheta+1} x\right\|_0 \,, \qquad \forall\, x \in V_{\vartheta+1} \,.$$

Продовжуючи рекурентно дану конструкцію, можемо визначити замкнені оператори $(-J)^{\vartheta+n}$ та банахові простори $V_{\vartheta+n}$ для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$(-J)^{\vartheta+n} := (-J)^{n}\left[(-J)^{-\vartheta}\big|_{V_1}\right]^{-1} : V_{\vartheta+n} \longmapsto V_0 \,,$$

$$\|x\|_{\vartheta+n} := \left\|(-J)^{\vartheta+n} x\right\|_0 \,, \qquad \forall\, x \in V_{\vartheta+n} \,.$$

У випадку $\vartheta = 1$, отримуємо банахові простори V_{1+n} для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.2. *Нехай клас $\mathcal{A}$, а також клас $\mathcal{A}_0$, визначені одним і тим самим кутом $\omega_0 : \frac{\pi}{2} < \omega_0 < \pi$. Нехай задано оператори $J, A \in \mathcal{A}$ і простір $V_\vartheta : 0 < \vartheta \leq 1$ визначений оператором $(-J)^\vartheta$.*

(a) Якщо $0 < \alpha < \beta \leq 1$, то існує стала $C_0 > 0$ така, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ справджується нерівність

$$\|x\|_\alpha \leq \varepsilon \|x\|_\beta + C_0 \, \varepsilon^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \|x\|_0 , \qquad \forall \, x \in V_\beta . \tag{2.24}$$

Правильні неперервні та щільні вкладення

$$V_1 \subset V_\beta \subset V_\alpha \subset V_0 , \tag{2.25}$$

де проміжні простори V_α для пари $\{V_\beta; V_0\}$ є правильними і

$$\|x\|_\alpha \leq C' \|x\|_\beta^{\frac{\alpha}{\beta}} \|x\|_0^{1-\frac{\alpha}{\beta}} , \qquad \forall \, x \in V_\beta \tag{2.26}$$

з деякою сталою $C' > 0$ (залежною від α, β), тобто V_α для пари $\{V_\beta; V_0\}$ є інтерполяційними з показниками $\frac{\alpha}{\beta}$.

(b) Нехай $0 \leq \alpha < 1$. Тоді існує стала $C'' > 0$ така, що

$$\left\| \left(\lambda E_{10} - \frac{A}{s} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_\alpha)} \leq \frac{C'' \, s^\alpha}{|\lambda|^{1-\alpha}} , \quad \forall \, \lambda \in \Lambda_0 , \quad \forall \, s > 0. \tag{2.27}$$

(c) Нехай $0 < \vartheta < 1$. Тоді для довільних оператора $X \in \mathcal{L}(V_\vartheta; V_0)$ та числа $s > 0$

$$A + sX \in \mathcal{A}_0 , \qquad \Lambda_0 \subset \varrho\,(A) \bigcap \varrho\,(A + sX)$$

і для всіх чисел $\lambda \in \Lambda_0$ та $s > 0$ справджується нерівність

$$\left\| R\left(\lambda, \frac{A}{s} + X \right) \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq 2 \left\| R\left(\lambda, \frac{A}{s} \right) \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} . \tag{2.28}$$

(d) Якщо $A \in \mathcal{A}$, $\theta \in (0,1)$, $X \in \mathcal{L}(V_\theta; V_0)$, то операторнозначна функція

$$u(t) = e^{t(A+X)} u_0, \quad t \geq 0,$$

задана формулою (2.9), є єдиним розв'язком збуреної задачі Коші

$$\frac{du}{dt} = (A + X)u, \qquad u(0) = u_0 \in V_1.$$

Доведення. Перевіримо спочатку вкладення (2.25). Якщо $x \in V_\beta$, то з (2.23) випливає

$$x = (-J)^{-\beta}(-J)^{\beta}x = (-J)^{-\alpha-(\beta-\alpha)}(-J)^{\beta}x = \\ (-J)^{-\alpha}(-J)^{-(\beta-\alpha)}(-J)^{\beta}x \in V_\alpha\,.$$

Зауважимо, що формула (2.22) для всіх чисел $0 < \vartheta \le 1$ фактично не залежить від зміни кута ω у ширшому проміжку $\omega : 0 < \omega \le \omega_0$, ніж це одержуємо з леми 2.1. Це випливає з аналітичності підінтегральної функції в комплексній площині з розрізом $\mathbb{C} \setminus \big[0, +\infty\big)$ та нерівності

$$\left\| \frac{R(\lambda, J))}{(-\lambda)^{\vartheta}} \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{C}{|\lambda|^{1+\vartheta}}\,, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \big[0, +\infty\big)\,, \tag{2.29}$$

у якій стала $C > 0$ взята з нерівності в лемі 2.1. Справді, з оцінки (2.29) випливає абсолютна збіжність інтегралу у формулі (2.22) по будь-якому з контурів $\Gamma_{a,\omega} \in \mathbb{C} \setminus \big[0, +\infty\big)$ і можливість застосувати теорему Коші, згідно з якою

$$\Bigg(\int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}} - \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \Bigg) \frac{R(\lambda, J)}{(-\lambda)^{\vartheta}}\, d\lambda = 0, \qquad 0 < a \le a', \quad \omega \le \omega'.$$

Користуючись цією незалежністю, можна перейти в формулі (2.22) до границі при $\omega \to +0$ та $a \to +0$. А саме, інтегруючи по граничному контуру $\big(+\infty, a\big] \bigcup \big\{ae^{i\tau} : 0 < \tau < 2\pi\big\} \bigcup \big[a, +\infty\big)$, де $a \to +0$, приходимо до еквівалентного зображення Като [39] для дробових степенів оператора

$$(-J)^{-\vartheta} = \frac{\sin \pi\vartheta}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{R(r, J)}{r^{\vartheta}}\, dr \in \mathcal{L}(V), \qquad 0 < \vartheta < 1. \tag{2.30}$$

Із (2.29) випливає, що при $0 < \vartheta = \alpha < 1$ для $x \in V_1$

$$\big\|(-J)^{\alpha}x\big\|_0 = \big\|(-J)^{\alpha-1}(-J)x\big\|_0 = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left\| \int\limits_0^{+\infty} \frac{R(r, J)Jx}{r^{1-\alpha}}\, dr \right\|_0 \le$$

$$\frac{\sin \pi\vartheta}{\pi} \left[\int\limits_0^{\delta} \frac{\big\|JR(r, J)x\big\|_0}{r^{1-\alpha}}\, dr + \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{\big\|(-J)^{1-\beta}R(r, J)(-J)^{\beta}x\big\|_0}{r^{1-\alpha}}\, dr \right].$$

Для чисел $\beta:\ \alpha<\beta\le 1$, згідно з нерівністю (2.30), маємо

$$\left\|(-J)^{1-\beta}R(r,J)\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left\|\int\limits_0^{+\infty}\frac{R(s,J)R(r,J)}{s^{1-\beta}}\,ds\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}\le$$

$$\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[\int\limits_0^{r}\frac{\left\|R(s,J)\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}\left\|R(r,J)\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}}{s^{1-\beta}}\,ds+\right.$$

$$\left.\int\limits_r^{+\infty}\frac{\left\|R(s,J)\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}\left\|R(r,J)\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}}{s^{1-\beta}}\,ds\right]\le$$

$$\frac{C^2\sin\pi\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{r}\int\limits_0^{r}\frac{ds}{s^{1-\beta}}+\int\limits_r^{+\infty}\frac{ds}{s^{2-\beta}}\right]=\frac{C^2\sin\pi\alpha}{\pi r^{\beta}\beta(1-\beta)}.$$

Крім цього, за тотожністю $JR(r,J)=rR(r,J)-E_{00}$, маємо

$$\left\|JR(r,J)\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}\le 1+K(J),$$

де стала $K(J)$ взята з означення класу $\mathcal{A}$. Підставляючи останні дві нерівності вище, приходимо до оцінки

$$\left\|(-J)^{\alpha}x\right\|_0\le\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[\big(1+K(J)\big)\left\|x\right\|_0\int\limits_0^{\delta}\frac{dr}{r^{1-\alpha}}+\right.$$

$$\left.\frac{C^2\left\|(-J)^{\beta}x\right\|_0}{\beta(1-\beta)}\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{dr}{r^{1-\alpha+\beta}}\right]=$$

$$\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[\big(1+K(J)\big)\left\|x\right\|_0\frac{\delta^{\alpha}}{\alpha}+\frac{C^2\left\|(-J)^{\beta}x\right\|_0}{\beta(1-\beta)}\frac{\delta^{\alpha-\beta}}{\beta-\alpha}\right].$$

Звідси отримуємо нерівність (2.24) для всіх елементів $x\in V_1$, якщо в останній нерівності взяти

$$\varepsilon=\delta^{\alpha-\beta}\left[\frac{C^2\sin\pi\alpha}{\pi\beta(1-\beta)(\beta-\alpha)}\right],$$

$$C_0=\frac{1+K(J)}{\alpha}\left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}\left[\frac{c^2}{\beta(1-\beta)(\beta-\alpha)}\right]^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

Відзначимо, що довільність у виборі чисел $\varepsilon > 0$ досягається за рахунок довільного вибору $\delta > 0$, а також, що стала C_0 не залежить від ε.

З нерівності (2.24) для елементів $x \in V_1$ та неперервності вкладення $V_1 \subset V_0$ випливає неперервність вкладення $V_1 \subset V_\alpha$. Справді, якщо $V_1 \ni x_n \xrightarrow{V_1} x \in V_1$, то з неперервності вкладення $V_1 \subset V_0$ випливає $V_0 \ni x_n \xrightarrow{V_0} x \in V_0$. Тоді з (2.24) при $\beta = 1$, маємо $V_\alpha \ni x_n \xrightarrow{V_\alpha} x \in V_\alpha$ і вкладення $V_1 \subset V_\alpha$ неперервне. Неперервність вкладення $V_\beta \subset V_\alpha$ випливає з (2.24) та простих міркувань: якщо $V_\beta \ni x_n \xrightarrow{V_\beta} x \in V_\beta$, то з неперервнсті вкладення $V_\beta \subset V_0$, маємо $V_0 \ni x_n \xrightarrow{V_0} x \in V_0$ і, згідно з (2.24), $V_\alpha \ni x_n \xrightarrow{V_\alpha} x \in V_\alpha$.

Припустимо, що елемент спряженого простору $x^* \in V_\alpha^*$ є ортогональним до V_β. З неперервності вкладення $V_\alpha \subset V_0$ випливає, що $x^* \in V_0^*$. Але вкладення $V_\alpha \subset V_0$ щільне, тому $x^* = 0$. Отже, за теоремою Хана-Банаха, вкладення $V_\beta \subset V_\alpha$ є щільним.

Зокрема, щільним буде вкладення $V_1 \subset V_\beta$. Тому нерівність (2.24) у випадку $\alpha > 0$ для всіх елементів $x \in V_\beta$ отримується шляхом її неперервного розширення із щільної підмножини V_1.

Зауважимо, що з нерівності (2.24) відразу випливає правильність проміжного простору V_α для пари $\{V_\beta; V_0\}$.

Нарешті, нерівність (2.26) випливає з нерівності (2.24), якщо в останній підставити значення змінної ε, в якому для елемента $x \in V_\beta$ досягається $\min\limits_{\varepsilon>0}$ в нерівності (2.24), а саме взяти

$$\varepsilon = \left(\frac{C\,\alpha}{\beta-\alpha}\,\frac{\|x\|_0}{\|x\|_\beta}\right)^{1-\frac{\alpha}{\beta}}, \qquad C' = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{C\,\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{1-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Доведемо твердження (b). Випадок $\alpha = 0$ розглянуто у лемі 2.1. Нехай $0 < \alpha < 1$. З нерівності (2.26) при $\beta = 1$ отримуємо

$$V_1 \subset V_\alpha \subset V_0\,, \qquad \|x\|_\alpha \le C'\,\|x\|_1^\alpha\,\|x\|_0^{1-\alpha}\,, \qquad \forall\, x \in V_1\,.$$

Підставляючи сюди $x = \Big(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\Big)^{-1} y$, де $y \in V_0$, $s > 0$ та $\lambda \in \Lambda_0$, маємо

$$\Big\|\Big(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\Big)^{-1} y\Big\|_\alpha = \Big\|(-J)^\alpha \Big(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\Big)^{-1} y\Big\|_0 \leq$$

$$C' \Big\|J\Big(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\Big)^{-1} y\Big\|_0^\alpha \Big\|E_{10}\Big(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\Big)^{-1} y\Big\|_0^{1-\alpha} \leq$$

$$C' \Big\|J\Big(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\Big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)}^\alpha \|y\|_0^\alpha \Big\|E_{10}\Big(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\Big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)}^{1-\alpha} \|y\|_0^{1-\alpha} =$$

$$C'\, s^\alpha \Big\|J\big(s\lambda E_{10} - J\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)}^\alpha \Big\|R\Big(\lambda, \frac{J}{s}\Big)\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)}^{1-\alpha} \|y\|_0.$$

Оскільки $J \in \mathcal{A}$, то згідно з лемою 2.1, існують сталі

$$C_1 = \sup_{s\lambda \in \Lambda_0} \Big\|J\big(s\lambda E_{10} - J\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)}, \quad C_2 = \sup_{s\lambda \in \Lambda_0} \Big\|\lambda\, R\Big(\lambda, \frac{J}{s}\Big)\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)}.$$

Тоді попередня нерівність набуває вигляду

$$\Big\|\Big(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\Big)^{-1} y\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_\alpha)} := \sup_{\|y\|_0 = 1} \Big\|\Big(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\Big)^{-1} y\Big\|_\alpha \leq$$

$$\leq C'\, C_1^\alpha\, s^\alpha \Big\|R\Big(\lambda, \frac{J}{s}\Big)\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)}^{1-\alpha} \leq \frac{C'\, C_1^\alpha\, C_2^{1-\alpha}\, s^\alpha}{\big|\lambda\big|^{1-\alpha}} = \frac{C''\, s^\alpha}{\big|\lambda\big|^{1-\alpha}}.$$

Отже, у випадку оператора $A = J$ нерівність (2.27) доведено.

Для довільного оператора $A \in \mathcal{A}$, використаємо другу резольвентну тотожність

$$\big(s\lambda E_{10} - A\big)^{-1} = \big(s\lambda E_{10} - J\big)^{-1} - \big(s\lambda E_{10} - A\big)^{-1}(J - A)\big(s\lambda E_{10} - J\big)^{-1},$$

з якої

$$(-J)^\alpha \big(s\lambda E_{10} - A\big)^{-1} = \tag{2.31}$$

$$\Big[E_{00} - (-J)^\alpha \big(s\lambda E_{10} - A\big)^{-1}(J - A)(-J)^{-\alpha}{}_{|V_1}\Big] (-J)^\alpha \big(s\lambda E_{10} - J\big)^{-1}.$$

Тут оператор $(-J)^{-\alpha}{}_{|V_1}$ розглядаємо в алгебрі $\mathcal{L}(V_1)$, а тому його обернений $(-J)^{\alpha}$ є визначеним над підпростором V_1, тобто має вигляд $\left[(-J)^{-\vartheta}{}_{|V_1}\right]^{-1} \in \mathcal{L}(V_{\alpha+1};V_1)$. Звідси та леми 2.1 одержуємо існування сталих

$$\sup_{s\lambda\in\Lambda_0}\left\|(-J)^{\alpha}\big(s\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le K(A)\left\|\left[(-J)^{-\alpha}{}_{|V_1}\right]^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_{\alpha+1};V_1)} := C'_{\alpha}$$

$$\left\|(J-A)(-J)^{-\alpha}{}_{|V_1}\right\|_{\mathcal{L}(V_1)} \le \|J-A\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}\left\|(-J)^{-\alpha}{}_{|V_1}\right\|_{\mathcal{L}(V_1)} := C''_{\alpha}.$$

А тоді

$$\left\|E_{00}-(-J)^{\alpha}\big(s\lambda E_{10}-A\big)^{-1}(J-A)(-J)^{-\alpha}{}_{|V_1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le 1+C'_{\alpha}\,C''_{\alpha} := C_3,$$

$$\left\|(-J)^{\alpha}\big(s\lambda E_{10}-A\big)^{-1}y\right\|_0 \le C_3\left\|(-J)^{\alpha}\big(s\lambda E_{10}-J\big)^{-1}y\right\|_0,$$

або

$$\left\|\Big(\lambda E_{10}-\frac{A}{s}\Big)^{-1}y\right\|_{\alpha} \le C_3\left\|\Big(\lambda E_{10}-\frac{J}{s}\Big)^{-1}y\right\|_{\alpha} \qquad \forall y\in V_0.$$

В результаті одержуємо

$$\left\|\Big(\lambda E_{10}-\frac{A}{s}\Big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_{\alpha})} := \sup_{\|y\|_0=1}\left\|\Big(\lambda E_{10}-\frac{A}{s}\Big)^{-1}y\right\|_{\alpha} \le$$

$$C_3\left\|\Big(\lambda E_{10}-\frac{J}{s}\Big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_{\alpha})} \le \frac{C'\,C_1^{\alpha}\,C_2^{1-\alpha}\,C_3\,s^{\alpha}}{\big|\lambda\big|^{1-\alpha}} = \frac{C''\,s^{\alpha}}{\big|\lambda\big|^{1-\alpha}}$$

для всіх $\lambda\in\Lambda_0$ та $s>0$, тобто нерівність (2.27) при $0<\alpha<1$.

Доведемо твердження (c). Нехай задані будь-які число $0<\vartheta<1$ та оператор $X\in\mathcal{L}(V_{\vartheta};V_1)$, $a=\Big(2\,C''\,s_0^{\vartheta}\,\|X\|_{\mathcal{L}(V_{\vartheta};V_1)}\Big)^{\frac{1}{1-\vartheta}}$ для довільного числа $s_0>0$. Тоді з нерівності (2.27) випливають оцінки

$$\left\|X\Big(\lambda E_{10}-\frac{A}{s}\Big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \|X\|_{\mathcal{L}(V_{\vartheta};V_1)}\left\|\Big(\lambda E_{10}-\frac{A}{s}\Big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_{\alpha})} \le$$

$$\frac{C''\,s^{\alpha}\,\|X\|_{\mathcal{L}(V_{\vartheta};V_1)}}{|\lambda|^{1-\alpha}} \le \frac{C''\,s_0^{\alpha}\,\|X\|_{\mathcal{L}(V_{\vartheta};V_1)}}{a^{1-\alpha}} = \frac{1}{2} \tag{2.32}$$

для всіх чисел $\lambda\in\Lambda_{-a}$ та чисел $s:\ 0<s\le s_0$. Для таких λ і s

$$\left[E_{00}-X\Big(\lambda E_{10}-\frac{A}{s}\Big)^{-1}\right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[X\Big(\lambda E_{10}-\frac{A}{s}\Big)^{-1}\right]^{k},$$

де ряд справа, згідно з оцінкою (2.32), збігається абсолютно в алгебрі $\mathcal{L}(V_0)$. З другої резольвентної тотожності, записаної у вигляді

$$\Big(\lambda E_{10} - \frac{A}{s} - X\Big)^{-1} = \Big(\lambda E_{10} - \frac{A}{s}\Big)^{-1}\Big[E_{00} - X\Big(\lambda E_{10} - \frac{A}{s}\Big)^{-1}\Big]^{-1}, \qquad (2.33)$$

отримуємо нерівності

$$\Big\|\Big(\lambda E_{10} - \frac{A}{s} - X\Big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} \leq$$

$$\Big\|\Big(\lambda E_{10} - \frac{A}{s}\Big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}\Big\|\Big[E_{00} - X\Big(\lambda E_{10} - \frac{A}{s}\Big)^{-1}\Big]^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq$$

$$\Big\|\Big(\lambda E_{10} - \frac{A}{s}\Big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} \sum_{k=0}^{\infty}\Big\|X\Big(\lambda E_{10} - \frac{A}{s}\Big)^{-1}\Big\|^{k}_{\mathcal{L}(V_0)} \leq 2\Big\|\Big(\lambda E_{10} - \frac{A}{s}\Big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)},$$

або еквівалентну нерівність

$$\Big\|\big(s\lambda E_{10} - A - sX\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} \leq 2\Big\|\big(s\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}, \qquad (2.34)$$

правильну для всіх чисел $\lambda \in \Lambda_{-a}$ та чисел $s:\ 0 < s \leq s_0$. Із сюр'єктивності відображення

$$\Lambda_{-a} \times \big(0, s_0\big] \ni \big\{\lambda, s\big\} \longmapsto s\lambda := \xi \in \Lambda_0$$

та умови $A \in \mathcal{A}$, за якою $\sup\limits_{\xi\in\Lambda}\Big\|\big(\xi E_{10} - A\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} = K(A) < \infty$, з нерівності (2.34), отримуємо

$$\Big\|\big(\xi E_{10} - A - sX\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} \leq K(A) < \infty, \quad \forall\, \xi \in \Lambda_0\,, \quad 0 < s \leq s_0\,.$$

Звідси, за довільністю s_0, маємо $A + sX \in \mathcal{A}_0$ для всіх $s > 0$.

Домножуючи тотожність (2.33) зліва на оператор вкладення E_{10} і оцінюючи отримані вирази так само як вище, замість нерівності (2.34) отримаємо нерівність (2.28), яка так само буде правильною для всіх чисел $s\lambda := \xi \in \Lambda_0$ та $s > 0$.

Доведення твердження (d) випливає з лем 2.2(c), 2.1 та встановленої вище властивості генератора $A + X$ півгрупи, заданої формулою (2.9). Теорему доведено. $\square$

Наслідок 2.1. *Нехай* $0 < \eta < \vartheta < 1$. *Простір* $V_{1+\eta}$ *є правильним проміжним для пари* $\{V_\vartheta; V_{1+\vartheta}\}$, *а саме: для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *існує стала* $C > 0$ *така, що*

$$\|y\|_{1+\eta} \le \varepsilon \|y\|_{1+\vartheta} + C\,\varepsilon^{\frac{1+\eta-\vartheta}{\eta-\vartheta}} \|y\|_\vartheta, \qquad \forall\, y \in V_{1+\vartheta}. \tag{2.35}$$

Справді, в нерівності (2.24) досить взяти $\beta = 1$, $\alpha = 1+\eta-\vartheta$, $x = \big(-J\big)^\vartheta y$ і використати півгрупову властивістю степенів оператора.

Наслідок 2.2. *Оператор* $(-J)$ *є позитивним у сенсі означення 1.14.1 із [140]. Тому дробові степені операторів* $(-J)^\theta$, *означені вище формулою Като (2.30), породжують інтерполяційну шкалу просторів* V_θ *із властивостями*

$$[V_0, V_1]_\theta = V_\theta, \qquad [V_1, V_2]_\theta = V_{1+\theta},$$

де через $[\cdot,\cdot]_\theta$ *позначено проміжний простір відповідної пари, породжений комплексним методом інтерполяції Ліонса-Кальдерона ([140], теорема 1.15.3).*

2.6 Секторіальні оператори на алгебрах Вінера аналітичних функцій

Вивчено оператори, що діють на апроксимовній алгебрі Вінера аналітичних функцій нескінченної кількості змінних. Для таких операторів встановлена достатня умова секторіальності і побудовано голоморфне числення.

Алгебра Вінера абсолютно збіжних рядів Тейлора комплексної змінної

$$x(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \xi^n \qquad \text{із} \qquad \|x\|_W = \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| < \infty$$

вперше з'являється в праці Вінера [276] і тепер має широке застосування в теорії операторів (див., наприклад, [258]). Її нескінченновимірний гільбертовий аналог було досліджено в [230], де автори використовували однорідні поліноми Гільберта-Шмідта замість степеневих доданків $c_n\xi^n$. Ми будуємо

деяке банахове нескінченновимірне узагальнення, назване апроксимовною алгеброю Вінера. А саме, замість поліномів Гільберта-Шмідта за доданки в рядах Тейлора використовуємо апроксимовні поліноми.

Секторіальні оператори, що діють на алгебрі Вінера, є основним об'єктом цього дослідження. Ми досліджуємо наступні проблеми. По-перше, чи є секторіальним оператор на такій алгебрі, якщо секторіальним є вихідний оператор? Позитивну відповідь подано в теоремі 2.3. В теоремі 2.4 показано застосування до побудови голосорфного числення секторіальних операторів.

Використовуємо також означення та результати із [157, 165, 187, 190, 230, 215-236].

2.6.1 Апроксимовна алгебра Вінера аналітичних функцій

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ банахів простір із нормованим спряженим $(X', \|\cdot\|)$, і через $\langle X \mid X' \rangle = \{\langle x \mid \xi \rangle \colon x \in X, \xi \in X'\}$ позначимо їх дуальну форму. Нехай $B_{X'} = \{\xi \in X' \colon \|\xi\| < 1\}$ та $\bar{B}_{X'} = \{\xi \in X' \colon \|\xi\| \leq 1\}$ – відкрита й замкнена одиничні дуальні кулі, відповідно. Розглядаємо тільки комплексні простори.

Алгебричний тензорний добуток n просторів Банаха $\otimes^n X := X \otimes \ldots \otimes X$ складається з усіх скінченних сум

$$u = \sum_j x_{1j} \otimes \cdots \otimes x_{nj}, \qquad x_{ij} \in X, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j \in \mathbb{N} \tag{2.36}$$

зі звичайними алгебричними операціями.

Аналогічно, через $\otimes^n X'$ позначаємо n-кратний тензорний добуток просторів X'. Він є лінійною оболонкою всіх елементів $\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n$ із $\xi_i \in X'$.

Симетричний тензорний добуток, який є лінійною оболонкою всіх елементів

$$\xi_1 \odot \ldots \odot \xi_n := \frac{1}{n!} \sum_s \xi_{s(1)} \otimes \ldots \otimes \xi_{s(n)},$$

де $s \colon \{1, \ldots, n\} \longmapsto \{s(1), \ldots, s(n)\}$ пробігають усі n-елементні перестановки, позначаємо через $\odot^n X'$. Із поляризаційної формули випливає, що лінійна оболонка тензорних степенів елементів $\operatorname{span}\{\otimes^n \xi \colon \xi \in X'\}$ співпадає із $\odot^n X'$. Можемо ствердити те саме для просторів $\otimes^n X$ та $\odot^n X$.

Через $\otimes_\pi^n X$ позначаємо алгебричний тензорний добуток $\otimes^n X$ з проективною нормою

$$\|u\|_\pi = \inf \sum_j \|x_{1j}\| \cdots \|x_{nj}\|,$$

де інфімум береться за всіма скінченими зображеннями (2.36).

Доведено [188], що проективна норма має властивість

$$\|x_1 \otimes \cdots \otimes x_n\|_\pi = \|x_1\| \cdots \|x_n\|, \quad x_1, \ldots, x_n \in X. \tag{2.37}$$

Аналогічно, якщо $\otimes^n X'$ (відповідно, $\odot^n X'$) наділені проективною нормою

$$\|\zeta\|_{\otimes_\pi^n X'} = \inf \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \prod_{i=1}^n \|\xi_{ij}\| \colon \zeta = \sum_j \xi_{1j} \otimes \ldots \otimes \xi_{nj} \in \otimes^n X',\ \xi_{ij} \in X' \Big\}$$

то відповідний добуток $\otimes^n X'$ позначаємо через $\otimes_\pi^n X'$ (відповідно, $\odot_\pi^n X'$). Проекція $s_{X'}^n \colon \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \longmapsto \xi_1 \odot \ldots \odot \xi_n$, що діє з $\otimes_\pi^n X'$ на $\odot_\pi^n X'$ має норму, рівну 1.

Нехай $\Delta_n : X \longrightarrow X^n (x \longmapsto (x, \ldots, x))$. Функціонал $f : X \to \mathbb{C}$ називається n-однорідним, якщо існує обмежений n-лінійний функціонал h на $X^n := X \times \ldots \times X$, такий що $f(x) = (h \circ \Delta_n)(x)$.

Згідно з [181], наявний топологічний ізоморфізм $(\odot_\pi^n X')' \simeq \mathcal{P}^n(X')$ (взагалі кажучи, не ізометричний), де $\mathcal{P}^n(X')$ – простір усіх n-однорідних неперервних комплексних поліномів, наділених рівномірною нормою на $\bar{B}_{X'}$.

Симетричний тензорний добуток $\odot^n X$ просторів X можна наділити ін'єктивною нормою

$$\|x\|_{\odot_\varepsilon^n X} = \sup \Big\{ \Big| \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \langle \xi \mid x_j \rangle^n \Big| \colon \xi \in \bar{B}_{X'} \Big\}, \quad x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j (\otimes^n x_j) \in \odot^n X,$$

де $x_j \in X$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\odot^n x = \otimes^n x = x \otimes \ldots \otimes x$. Нехай $\odot_\varepsilon^n X$ – відповідне поповнення. Простір $\odot_\varepsilon^n X$ збігається з підпростором у $\mathcal{P}^n(X')$ апроксимовних n-однорідних поліномів на X', які *-слабо неперервні на обмежених множинах і вкладення

$$\mathcal{P}_\varepsilon^n(X') = \odot_\varepsilon^n X \hookrightarrow \mathcal{P}^n(X')$$

ізометричне (див., наприклад, [181, с. 112], [186]). Нехай $\mathcal{P}_\varepsilon(X') := \sum\limits_n \mathcal{P}_\varepsilon^n(X')$ – алгебра всіх апроксимовних поліномів на X', які *-слабо неперервні на обмежених підмножинах із X'.

Будь-яка аналітична функція $x\colon B_{X'} \ni \xi \longmapsto x(\xi) \in \mathbb{C}$ обмеженого типу (тобто, обмежена на обмежених множинах) має єдине розвинення Тейлора

$$x(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{d^n x(\xi)}{n!}$$

з похідними Фреше $d^n x := d_0^n x \in \mathcal{P}^n(X')$ в нулі, яке збігається рівномірно на кулі $\lambda \bar{B}_{X'}$ для всіх $\lambda \in (0,1)$. Надалі, для простоти, вважаємо $x(0) = 0$.

Означення 2.3. Подібно до [230] (де розглядався тільки випадок гільбертових просторів X) пряма ℓ_1-сума

$$W_\varepsilon(B_{X'}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_\varepsilon^n(X') = \Big\{ x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d^n x}{n!} \colon d^n x \in \mathcal{P}_\varepsilon^n(X') \Big\}$$

аналітичних комплексних функцій $x\colon B_{X'} \ni \xi \longmapsto x(\xi)$ обмеженого типу на дуальній банаховій кулі $B_{X'}$ із скінченною ℓ_1-нормою

$$\|x\|_W = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|d^n x\|}{n!}, \qquad \|d^n x\| = \sup_{\xi\in\bar{B}_{X'}} |d^n x(\xi)|$$

називається апроксимовною алгеброю Вінера. Очевидно, алгебра $\mathcal{P}_\varepsilon(X')$ щільна в $W_\varepsilon(B_{X'})$.

Перевіримо, що апроксимовна алгебра Вінера добре визначена. По-перше, кожен елемент $x \in W_\varepsilon(B_{X'})$ є аналітичним в кулі $B_{X'}$, так як для його радіуса рівномірної збіжності

$$\Big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|d^n x\|/n!}\Big)^{-1} \geq \Big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x\|_W}\Big)^{-1} = 1.$$

По-друге, $W_\varepsilon(B_{X'})$ є мультиплікативною алгеброю, оскільки для всіх $x, y \in W_\varepsilon(B_{X'})$

$$\begin{aligned} x(\xi)y(\xi) &= \sum_n \sum_{k=0}^n \frac{d^k x(\xi)}{k!} \frac{d^{n-k} y(\xi)}{(n-k)!} = \sum_n \frac{d^n\big(x(\xi)y(\xi)\big)}{n!}, \qquad \xi \in B_{X'}, \\ \|xy\|_W &\leq \sum_n \sum_{k=0}^n \frac{\|d^k x\|}{k!} \frac{\|d^{n-k} y\|}{(n-k)!} = \|x\|_W \|y\|_W. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $W_\varepsilon(B_{X'})$ – банахова алгебра, оскільки ℓ_1-сума банахових просторів $\mathcal{P}^n_\varepsilon(X')$ є повним простором.

2.6.2 Оператори з секторіальною властивістю

Для банахових просторів X, Y простір лінійних обмежених операторів, наділених рівномірною нормою, позначаємо через $\mathcal{L}(X,Y)$ та $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$. За заданими $T_i \in \mathcal{L}(X,Y)$ тензорний добуток $T_1 \otimes \ldots \otimes T_n$ визначаємо як

$$(T_1 \otimes \ldots \otimes T_n)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = T_1 x_1 \otimes \ldots \otimes T_n x_n,$$

де $x_i \in X$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, при цьому покладаємо (див. [186]):

$$(T_1 \otimes \ldots \otimes T_n)(x_1 \odot \ldots \odot x_n) = T_1 x_1 \odot \ldots \odot T_n x_n \in \odot^n Y,$$

тобто, $T_1 \otimes \ldots \otimes T_n \in \mathcal{L}(\odot^n_\varepsilon X, \odot^n_\varepsilon Y)$ і

$$\|T_1 \otimes \ldots \otimes T_n\|_{\mathcal{L}(\odot^n_\varepsilon X, \odot^n_\varepsilon Y)} = \|T_1\| \ldots \|T_n\| \qquad \forall T_i \in \mathcal{L}(X,Y).$$

Якщо кожен $T_i^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, то $(T_1 \otimes \ldots \otimes T_n)^{-1} = T_1^{-1} \otimes \ldots \otimes T_n^{-1}$ в $\mathcal{L}(\odot^n_\varepsilon Y, \odot^n_\varepsilon X)$.

Для будь-яких заданих банахових просторів $\{X_\imath, \|\cdot\|_\imath\}_{\imath=0,1}$ з одиничним відображенням $I_0 \colon X_0 \rightleftarrows X_0$ і щільним стискуючим вкладенням $I_1 := I_0\,|_{X_1} \colon X_1 \looparrowright X_0$ визначаємо пари

$$\mathcal{P}^n_\imath := \mathcal{P}^n_\varepsilon(X'_\imath), \qquad W_\imath := W_\varepsilon(B_{X'_\imath}), \qquad \imath = 0, 1.$$

Тобто, $W_\imath = \sum\limits_n \mathcal{P}^n_\imath$.

Зрозуміло, $I_0 I_1 = I_1$ Розглянемо $\otimes^n I_0$ в $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n_0)$ і щільне вкладення $\otimes^n I_1 \colon \mathcal{P}^n_1 \looparrowright \mathcal{P}^n_0$. За заданим $A \in \mathcal{L}(X_1, X_0)$, у $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n_1, \mathcal{P}^n_0)$ визначаємо оператор

$$\Gamma({}^n A) := \sum_{j=1}^n \Gamma({}^n_j A), \qquad \Gamma({}^n_j A) := \otimes^{j-1} I_1 \otimes A \otimes^{n-j} I_1.$$

Алгебра Вінера $W_\imath$ і вагова пряма ℓ_1-сума

$$W_0^+ = \Big\{ x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d^n x}{n!} \colon d^n x \in \mathcal{P}^n_\varepsilon(X'_0), \;\; \|x\|_{W_0^+} := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|d^n x\|_{\odot^n_\varepsilon X_0}}{(n+1)!} < \infty \Big\}$$

утворюють трійку щільних вкладень

$$W_1 \looparrowright W_0 \looparrowright W_0^+.$$

Позначимо $\mathrm{I}_j := \left[\begin{cases} \otimes^n I_\imath & : n = k \\ 0 & : n \neq k \end{cases}\right]_{n,k\in\mathbb{N}}$, $j = 0, 1$. Очевидно, I_0 є одиничним в обох просторах $\mathcal{L}(W_0)$ і $\mathcal{L}(W_0^+)$, і щільним вкладенням $\mathrm{I}_1\colon W_1 \looparrowright W_0$.

Лема 2.5. *Для довільного оператора* $A \in \mathcal{L}(X_1, X_0)$ *матричний діагональний оператор* $\Gamma(A) := \left[\begin{cases} \Gamma({}^nA) & : n = k \\ 0 & : n \neq k \end{cases}\right]_{n,k\in\mathbb{N}}$ *належить* $\mathcal{L}(W_1, W_0^+)$ *і*

$$\|\Gamma(A)\|_{\mathcal{L}(W_1,W_0^+)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X_1,X_0)}. \tag{2.38}$$

Доведення. На тотальній підмножині елементів $x = \sum_n \otimes^n y/n! \in W_1$ при $y \in X_1$, маємо

$$\Gamma(A)x = \sum_n \Gamma({}^nA)\frac{\otimes^n y}{n!} = \sum_n \sum_{1\leq j\leq n} \frac{\otimes^{j-1} y \otimes Ay \otimes^{n-j} y}{n!}.$$

Звідси випливає, що

$$\|\Gamma({}^nA)(\otimes^n y)\|_{\odot_\varepsilon^n X_0} \leq \sum_{1\leq j\leq n} \|Ay\|_{X_0}\|y\|_{X_1}^{n-1}$$

$$\leq n\|A\|_{\mathcal{L}(X_1,X_0)}\|y\|_{X_1}^n = n\|A\|_{\mathcal{L}(X_1,X_0)}\| \otimes^n y\|_{\odot_\varepsilon^n X_1},$$

$$\|\Gamma(A)x\|_{W_0^+} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X_1,X_0)} \sum_n \frac{n\| \otimes^n y\|_{\odot_\varepsilon^n X_1}}{(n+1)!} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X_1,X_0)}\|x\|_{W_1}.$$

Отож, $\Gamma(A) \in \mathcal{L}(W_1, W_0^+)$ і (2.38) виконується. □

Підсумовуючи, відзначимо, що подібно до випадку просторів Фока [259], оператор $\Gamma(A) \in \mathcal{L}(W_1, W_0^+)$ можна називати *секторіальним* для випадку $A \in \mathcal{L}(X_1, X_0)$ на відповідній алгебрі Вінера.

Примітка. Простори $\mathcal{L}(X_1, X_0)$ можна розглядати як набір необмежених лінійних операторів на X_0 із щільною областю визначення X_1. Подібно можемо трактувати $\mathcal{L}(\mathcal{P}_1^n, \mathcal{P}_0^n)$ і $\mathcal{L}(W_1, W_0^+)$.

Зручно ввести трохи змінені означення секторіальних операторів, наведені в книзі [176,V].

Нехай $\Lambda(\vartheta) = \{re^{i\vartheta} \in \mathbb{C}\colon r \geq 0\}$ – промінь із фіксованим $\vartheta \in [0, 2\pi]$ та $\Theta(\alpha) = \{\Lambda(\vartheta)\colon \vartheta \in [-\alpha, \alpha]\} \subset \mathbb{C}$ – замкнений сектор із фіксованим $\alpha \in (\pi/2, \pi)$. Оператор $A \in \mathcal{L}(X_1, X_0)$ називається *секторіальним*, якщо існує сектор $\Theta(\alpha)$ і такі сталі $\delta = \delta(A)$, $K_\delta = K_\delta(A)$ що

$$\sup_{\lambda \in \Theta_\delta^\alpha} \|(\lambda I_1 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_1)} := K_\delta, \quad \Theta_\delta^\alpha := \Theta(\alpha) \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| < \delta\} \subset \varrho(A).$$

Підмножину в $\mathcal{L}(X_1, X_0)$ секторіальних операторів із кутом Θ_δ^α позначаємо через $\Theta_\delta^\alpha(X_1, X_0)$. Якщо $A \in \Theta_\delta^\alpha(X_1, X_0)$, то $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus \Theta_\delta^\alpha$. Подібно визначаємо множину секторіальних операторів на парах $\mathcal{P}_\imath^n$.

Означення 2.4. Кажемо, що оператор $T \in \mathcal{L}(W_1, W_0^+)$ має (слабо) *секторіальну властивість*, якщо

$$\sup_{\lambda \in \Theta_\delta^\alpha} \|(\lambda \mathrm{I}_1 - T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W_1)} < \infty, \qquad \Theta_\delta^\alpha \subset \varrho(T).$$

Підмножину в $\mathcal{L}(W_1, W_0^+)$ операторів із такою секторіальною властивістю в куті Θ_δ^α позначаємо через $\Theta_\delta^\alpha(W_1)$. Якщо $T \in \Theta_\delta^\alpha(W_1)$, то $\sigma(T) \subset \mathbb{C} \setminus \Theta_\delta^\alpha$.

Відомо [176, т. 5.3], що довільна множина секторіальних операторів $\Theta_\delta^\alpha(X_1, X_0)$ відкрита в $\mathcal{L}(X_1, X_0)$. Подібно можна показати, що $\Theta_\delta^\alpha(W_1)$ відкрита в $\mathcal{L}(W_1, W_0^+)$. Відразу зауважимо, що

$$\varrho[\Gamma(\tbinom{n}{j} A)] = \varrho(A), \qquad [\lambda(\otimes^n I_1) - \Gamma(\tbinom{n}{j} A)]^{-1} = \otimes^{j-1} I_0 \otimes (\lambda I_1 - A)^{-1} \otimes^{n-j} I_0$$

із $1 \leq j \leq n$ для всіх $A \in \mathcal{L}(X_1, X_0)$ та $\lambda \in \varrho(A)$. Тому для кожного $A \in \Theta_\delta^\alpha(X_1, X_0)$ маємо

$$\sup_{\lambda \in \Theta_\delta^\alpha} \|[\lambda(\otimes^n I_1) - \Gamma(\tbinom{n}{j} A)]^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_0^n, \mathcal{P}_1^n)} = \sup_{\lambda \in \Theta_\delta^\alpha} \|(\lambda I_1 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_1)} = K_\delta.$$

В результаті, $\Gamma(\tbinom{n}{j} A) \in \Theta_\delta^\alpha(\mathcal{P}_1^n, \mathcal{P}_0^n)$.

Набагато складнішим є питання: чи для секторіального оператора A оператор $\Gamma(A)$ має секторіальну властивість? Позитивна відповідь подана в наступній теоремі.

Теорема 2.3. *Якщо* $A \in \Theta_\delta^\alpha(X_1, X_0)$, *то* $\Gamma(A) \in \Theta_\gamma^\alpha(W_1)$ *і норми відповідних резольвент мають наступні оцінки*

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda\in\Theta_\delta^\alpha} \|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X_0)} \le 1 + K_\delta \|A\|_{\mathcal{L}(X_1,X_0)} := C_\delta, \\ &\sup_{\lambda\in\Theta_\gamma^\alpha} \|\lambda R[\lambda, \Gamma(A)]\|_{\mathcal{L}(W_1)} \le C_\delta \end{aligned} \tag{2.39}$$

із $\gamma = \max\{\delta,\ 4C_\delta\|A\|_{\mathcal{L}(X_1,X_0)}\}$, *де* $\Theta_\gamma^\alpha \subset \varrho[\Gamma(A)] \bigcap \Theta_\delta^\alpha$.

Доведення. За тотожністю

$$\lambda I_1(\lambda I_1 - A)^{-1} = I_0 + A(\lambda I_1 - A)^{-1}, \quad \lambda \in \varrho(A)$$

і нерівністю

$$\|A(\lambda I_1 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0)} \le \|A\|_{\mathcal{L}(X_1,X_0)} \|(\lambda I_1 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0,X_1)}$$

одержуємо $\|\lambda I_1(\lambda I_1 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0)} \le C_\delta$ зі сталою $C_\delta = 1 + K_\delta\|A\|_{\mathcal{L}(X_1,X_0)}$, яка не залежить від $\lambda \in \Theta_\delta^\alpha$ і заданого $\delta = \delta(A) > 0$. Одержуємо правильність першої нерівності в (2.39) для $A \in \Theta_\delta^\alpha(X_1, X_0)$.

Покажемо, що $\Gamma({}^nA)$ має секторіальну властивість на просторі $\mathcal{P}_1^n$ з кутом Θ_γ^α. Використовуємо зв'язок

$$\Gamma({}^nA) = \otimes^{n-1} I_1 \otimes A + \Gamma({}^{n-1}A) \otimes I_1$$

на $\mathcal{P}_1^n$. Із резольвентної тотожності

$$\begin{aligned} &[\lambda(\otimes^n I_1) \ - \Gamma({}^nA)]^{-1} - [\lambda(\otimes^{n-1} I_1) - \Gamma({}^{n-1}A)]^{-1} \otimes I_0 \\ &= [\lambda(\otimes^n I_1) - \Gamma({}^nA)]^{-1}[\otimes^{n-1} I_0 \otimes A][\lambda(\otimes^{n-1} I_1) - \Gamma({}^{n-1}A)]^{-1} \otimes I_0 \end{aligned}$$

для всіх $\lambda \in \varrho[\Gamma({}^nA)] \bigcap \varrho[\Gamma({}^{n-1}A)]$ випливає, що

$$\begin{aligned} [\lambda(\otimes^n I_1) - \Gamma({}^nA)]^{-1} &= \{[\lambda(\otimes^{n-1} I_1) - \Gamma({}^{n-1}A)]^{-1} \otimes I_0\} M[\lambda, \Gamma({}^nA)], \\ R[\lambda, \Gamma({}^nA)] &= \{R[\lambda, \Gamma({}^{n-1}A)] \otimes I_0\} M[\lambda, \Gamma({}^nA)] \end{aligned} \tag{2.40}$$

де

$$\begin{aligned} &M[\lambda, \Gamma({}^nA)] = \{\otimes^n I_0 - [\otimes^{n-1} I_0 \otimes A][\lambda(\otimes^{n-1} I_1) - \Gamma({}^{n-1}A)]^{-1} \otimes I_0\}^{-1}, \\ &R[\lambda, \Gamma({}^nA)] = (\otimes^n I_1)[\lambda(\otimes^n I_1) - \Gamma({}^nA)]^{-1}. \end{aligned}$$

Покажемо, що правий множник $M[\lambda, \Gamma(^n A)]$ у (2.40) можна розвинути у збіжні ряди. Зауважимо, що

$$\|[\otimes^{n-1} I_0 \otimes A][\lambda(\otimes^{n-1} I_1) \ - \Gamma(^{n-1} A)]^{-1} \otimes I_0\|^k_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_1^n)} \leq$$

$$\leq \|A\|^k_{\mathcal{L}(X_1, X_0)} \|R[\lambda, \Gamma(^{n-1} A)]\|^k_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_1^n)}.$$

Однак, згідно з першою оцінкою (2.39),

$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X_1)} \leq \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X_0)} \leq C_\delta / |\lambda|$ для всіх $\lambda \in \Theta^\alpha_\delta$.

Враховуючи, що $\gamma = \max\{\delta, \ 4C_\delta \|A\|_{\mathcal{L}(X_1, X_0)}\}$ для всіх $\lambda \in \Theta^\alpha_\gamma \subset \Theta^\alpha_\delta$ і $n = 2$, маємо

$\|(I_0 \otimes A)(\lambda I_1 - A)^{-1} \otimes I_0\|^k_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_1^2)} \leq \|A\|^k_{\mathcal{L}(X_1, X_0)} \|R(\lambda, A)\|^k_{\mathcal{L}(X_1)} \leq 1/2^{k+1}$.

Врахували також, що в цьому випадку

$$|\lambda| \geq 4C_\delta \|A\|_{\mathcal{L}(X_1, X_0)}.$$

Отож, $\|M[\lambda, \Gamma(^2 A)]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_1^2)} \leq 1$ та із (2.40) одержуємо

$$\|[\lambda(\otimes^2 I_1) - \Gamma(^2 A)]^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_1^2)} \leq \|(\lambda I_1 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_1)} \leq K_\delta,$$

$$\|\lambda R[\lambda, \Gamma(^2 A)]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_1^2)} \leq \|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X_1)} \leq C_\delta,$$

а також

$$\|[\lambda(\otimes^n I_1) - \Gamma(^n A)]^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_1^n)} \leq \|(\lambda I_1 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_1)} \leq K_\delta,$$

$$\|\lambda R[\lambda, \Gamma(^n A)]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}_1^n)} \leq \|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X_1)} \leq C_\delta \qquad \forall n, \lambda \in \Theta^\alpha_\gamma.$$

Отож, $\Gamma(^n A)$ має секторіальну властивість на просторі $\mathcal{P}_1^n$.

Тепер попередню оцінку застосуємо до операторів

$$[\lambda \mathrm{I}_1 - \Gamma(^n A)]^{-1} = \left[\left\{ \begin{array}{cc} [\lambda(\otimes^n I_1) - \Gamma(^n A)]^{-1} & : n = k \\ 0 & : n \neq k \end{array} \right. \right]$$

та

$$R[\lambda, \Gamma(A)] = \left[\left\{ \begin{array}{cc} R[\lambda, \Gamma(^n A)] & : n = k \\ 0 & : n \neq k \end{array} \right. \right]$$

при $n, k \in \mathbb{N}$, визначених на алгебрах Вінера. На повній у W_1 підмножині елементів $x = \sum_n \otimes^n y / n!$ при $y \in X_1$ маємо

$$\|[\lambda \mathrm{I}_1 - \Gamma(A)]^{-1} x\|_{W_1} \ \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|[\lambda(\otimes^n I_1) - \Gamma(^n A)]^{-1} (\otimes^n y)\|_{\odot^n_\varepsilon X_1}}{n!}$$

$$\leq \|(\lambda I_1 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0,X_1)}\|x\|_{W_1} \leq K_\delta\|x\|_{W_1},$$

$$\|R[\lambda,\Gamma(A)]x\|_{W_1} \leq \|R(\lambda,A)\|_{\mathcal{L}(X_1)}\|x\|_{W_1} \leq C_\delta\|x\|_{W_1}$$

для всіх $\lambda \in \Theta_\gamma^\alpha$, а тому $\Gamma(A) \in \Theta_\gamma^\alpha(W_1)$ і $\Theta_\gamma^\alpha \subset \varrho[\Gamma(A)] \bigcap \varrho(A)$. Отож, друга нерівність у (2.39) одержана. □

Наслідок 2.3. *Якщо* $A \in \Theta_\delta^\alpha(X_1,X_0)$, *то*

$$\sigma[\Gamma(A)] \subset \mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha \quad \textit{із} \quad \gamma = \max\{\delta,\ 4C_\delta\|A\|_{\mathcal{L}(X_1,X_0)}\}.$$

2.6.3 Голоморфне числення

Нехай $A \in \Theta_\gamma^\alpha(X_1,X_0)$ і $\partial\Theta_\gamma^\alpha$ – межа замкненого сектора Θ_γ^α з заданим кутом $\alpha \in (\pi/2,\pi)$. Розглянемо простір скалярних неперервних функцій

$$\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha) = \{\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha \ni \lambda = re^\vartheta \longmapsto f(\lambda) \in \mathbb{C}\},$$

аналітичних у відкритій множині $\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha$ із скінченною нормою

$$\|f\|_\gamma = \frac{1}{\pi}\int_\gamma^\infty M_f(r)\frac{dr}{r} + m_\gamma(f), \qquad m_\gamma(f) = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Theta_\gamma^\alpha}|f(\lambda)|,$$

де $M_f(r) = \max\{|f(re^{i\vartheta})|\colon \vartheta \in [-\alpha,\alpha]\}$. Як при доведенні леми 2.3, враховуючи, що $M_{fg}(r) \leq M_f(r)M_g(r)$ та $M_f(r) \leq m_\gamma(f)$, перевіряємо, що $\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\Theta_\gamma^\alpha)$ – банахова алгебра, для якої

$$\|fg\|_\gamma \leq \frac{m_\gamma(f)}{\pi}\int_\gamma^\infty M_g(r)\frac{dr}{r} + m_\gamma(f)m_\gamma(g) = m_\gamma(f)\|g\|_\gamma \leq \|f\|_\gamma\|g\|_\gamma$$

для всіх $f,g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha)$. Із збіжності невласного інтеграла випливає, що для всіх $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha)$ виконується $\lim\limits_{r\to\infty} M_f(r) = 0$. Отож, $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha)$ не містить одиниці.

Розглянемо контури

$$\Lambda_\gamma(\vartheta) = \{re^{i\vartheta}\colon r \geq \gamma\}, \qquad \Lambda_\gamma^0(\beta) = \{\gamma e^{i\vartheta}\colon \vartheta \in [\beta, 2\pi-\beta]\}$$

з заданими $\beta \in (\pi/2,\alpha]$ і $\gamma > 0$.

Теорема 2.4. *Для довільних* $A \in \Theta_\delta^\alpha(X_1, X_0)$ *і* $\gamma = \max\{\delta,\ 4C_\delta \|A\|_{\mathcal{L}(X_1,X_0)}\}$ *відображення*

$$\begin{aligned} \Phi \ &: \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha) \ni f \longrightarrow f(A) \in \mathcal{L}(X_0), \\ \Gamma(\Phi) \ &: \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha) \ni f \longrightarrow f[\Gamma(A)] \in \mathcal{L}(W_1), \end{aligned}$$

визначені для одної й тої ж функції f *відповідно формулами*

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Theta_\gamma^\alpha} f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda,$$
$$f[\Gamma(A)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Theta_\gamma^\alpha} f(\lambda) R[\lambda, \Gamma(A)] d\lambda,$$

є неперервними гомоморфізмами відповідних алгебр. Контури інтегрування додатно орієнтовані щодо спектрів і інтеграли не залежать від вибору контурів

$$\partial\Theta_\gamma^\beta = \Lambda_\gamma(-\beta) \bigcup \Lambda_\gamma(\beta) \bigcup \Lambda_\gamma^0(\beta) \subset \mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha$$

із довільними $\gamma \geq \delta$ *та* $\beta \in (\pi/2, \alpha]$.

Доведення. Твердження про відображення Φ встановлено в лемі 2.3 (див. також [176, V]). Наш результат полягає в аналогічному твердженні для $\Gamma(\Phi)$. Він випливає з другої оцінки у (2.39). Справді, для кожного $\lambda \in \Theta_\gamma^\alpha$ маємо $\|R[\lambda, \Gamma(A)]\|_{\mathcal{L}(W_1)} \leq C_\delta |\lambda|$. Якщо $\partial\Theta_\gamma^\alpha = \Lambda_\gamma(-\alpha) \bigcup \Lambda_\gamma(\alpha) \bigcup \Lambda_\gamma^0(\alpha)$, то для всіх $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha)$,

$$\begin{aligned} \|f[\Gamma(A)]\|_{\mathcal{L}(W_1)} \ &\leq \frac{C}{2\pi} \Big[\int_\gamma^\infty |f(re^{-i\alpha})| \frac{dr}{r} \\ &+ \int_\gamma^\infty |f(re^{i\alpha})| \frac{dr}{r} + \int_\alpha^{2\pi-\alpha} |f(re^{i\vartheta})| d\vartheta \Big] \\ &\leq \frac{C}{\pi} \Big[\int_\gamma^\infty M_f(r) dr/r + (\pi - \alpha) m_\gamma(f) \Big] \leq C \|f\|_\gamma, \end{aligned}$$

оскільки $(\pi - \alpha)/\pi \leq 1/2$. Інша властивість відображення $\Gamma(\Phi)$ доводиться, як для Φ у лемі 2.6.

Теорема 2.5. *Для довільного* $A \in \Theta_\delta^\alpha(X_1, X_0)$ *на алгебрі Вінера* W_1 *з генератором* $\Gamma(A)$ *визначена аналітична операторна півгрупа*

$$z \longmapsto e^{z\Gamma(A)} \in \mathcal{L}(W_1), \qquad \{z \in \mathbb{C} \colon |\arg(z)| < \alpha - \pi/2\}.$$

Функція $u(t) = e^{t\Gamma(A)}u_0$, $(t \geq 0)$ *є єдиним розв'язком задачі Коші на алгебрі Вінера* W_1 *:*

$$\frac{du}{dt} = \Gamma(A)u, \quad (0) = u_0 \in W_1.$$

Доведення. Експонента $e^{z\lambda} := e_z(\lambda)$ з $|\arg(z)| < \alpha - \pi/2$ належить алгебрі $\mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\Theta_\gamma^\alpha)$ змінної $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Theta_\gamma^\alpha$ для кожного $\gamma > 0$ та $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, оскільки $z(r, \vartheta) := |z\lambda| \cos[\arg(z) + \vartheta] = \mathrm{Re}(z\lambda) < 0$ для таких z та всіх $\vartheta \in (-\alpha, \alpha)$. Отож,

$$\|e_z\|_\gamma \leq 1 + \int\limits_\gamma^\infty e^{z(r,\alpha)} dr/r\pi = 1 + \int\limits_{-z(\gamma,\alpha)}^\infty e^{-s} ds/s\pi < \infty.$$

Крім того, похідна $e_z'(\lambda) = \lambda e_z(\lambda)$ також належить $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha)$, оскільки $\|e_z'\|_\gamma \leq 1 + \int\limits_{-z(\gamma,\alpha)}^\infty e^{-s} ds/\pi < \infty$. Нарешті, застосуємо теорему 2.4 і те, що

$$e_z'[\Gamma(A)] \mid_{z=0} x = \Gamma(A) e_z[\Gamma(A)] \mid_{z=0} x = \Gamma(A)x \qquad \forall x \in W_1.$$

Висновки до розділу 2

У розділі 2 описано відомі та одержано нові властивості секторіальних операторів, які суттєво використовуються у наступних розділах. Виділено спеціальні класи секторіальних операторів. Досліджено властивості аналітичних функцій від таких секторіальних операторів над фіксованою парою банахових просторів.

Показано застосування до дослідження абстрактної задачі Коші з необмеженими збуреннями секторіального оператора.

У підрозділі 2.6 введена апроксимовна алгебра Вінера аналітичних функцій нескінченної кількості змінних, виділено клас операторів із секторіальною властивістю на такій алгебрі. Вони мають вигляд нескінченновимірних матриць. Побудовано голоморфне числення операторів такого класу та показано його застосування.

Результати цього розділу опубліковано в [79–81, 215].

Розділ 3

Максимальна регулярність розв'язку та лінійні збурення задачі Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною

3.1 Максимальна регулярність розв'язку задачі Коші

Розв'язність абстрактної задачі Коші та її аналога для рівнянь із дробовою похідною $\beta \in (0,1)$ досліджувалась у багатьох працях ([14, 44, 163, 161] та бібл.).

У даному підрозділі розглянуто задачу Коші для лінійного абстрактного рівняння з регуляризованою дробовою похідною порядку $\beta \in (0,1)$

$$D^{\beta}u(t) = Au(t) + (f_{1-\beta} * f)(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = h, \tag{3.1}$$

та задачу Коші для лінійного параболічного рівняння

$$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + f(t), \quad t \in \big(0,T\big], \quad v(0) = h\,, \tag{3.2}$$

де оператор A не залежить від змінної $t \in [0,T]$ та є генератором аналітичної півгрупи [43], [140] в деякому банаховому просторі $(V_0, ||\cdot||)$ із щільною областю визначення $V_1 \subset V_0$.

Результати Да Прато та Грівара [192], [193], [194] перенесено на випадок комплексних інтерполяційних шкал – просторів V_θ та на рівняння з дробовою похідною.

3.1.1 Формулювання задачі та допоміжні результати

Нехай A – необмежений замкнений лінійний секторіальний оператор від'ємного типу $r(A)$ в деякому комплексному банаховому просторі $\big(V_0, \|\cdot\|_0\big)$ із щільною областю визначення $V_1 \subset V_0$, що є генератором сильно неперервної півгрупи $\{\Phi_A(t)\}_{t\geq 0}$ на банаховому просторі V_0, g_β – прообраз перетворення Лапласа для $\exp(-\lambda^\beta)$, тобто

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} g_\beta(t)dt = \exp(-\lambda^\beta) \quad \Big(\Longrightarrow \quad \int_0^\infty g_\beta(t)dt = 1 \Big),$$

$$S_{\beta,A}(t) = \int_0^\infty \frac{t}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta\left(\frac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}}\right) \Phi_A(s)ds = \int_0^\infty \Phi_A\Big(\Big(\frac{t}{s}\Big)^\beta\Big) g_\beta(s)ds$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t}\lambda^{\beta-1}(\lambda^\beta - A)^{-1}\, d\lambda, \quad t \geq 0$$

з довільно вибраним контуром $\gamma \in r(A) + \Lambda$ [177].

У [160] з використанням результатів [156] показано, що для секторіального оператора A від'ємного типу в $V_1 = V_0$ сім'я лінійних операторів $\{S_{\beta,A}(t)\}_{t\geq 0}$ сильно неперервна на V_1, сильно аналітична в куті, що містить піввісь $t > 0$, функція

$$v(t) = S_{\beta,A}(t)h\,, \quad t > 0$$

задовольняє задачу

$$v^{(\beta)}(t) = Av(t) + f_{1-\beta}(t)v(0), \qquad v(0) = h, \tag{3.3}$$

тобто задачу

$$D_t^\beta v(t) = Av(t), \quad v(0) = h, \quad h \in V_1. \tag{3.4}$$

У [161, теорема 1] показано, що при $f \in L_1\big([0,T); V_1\big)$, $h \in V_1$ існує єдиний розв'язок рівняння

$$u(t) = A\big(f_\beta * u\big)(t) + h + \int_0^t f(s)ds, \tag{3.5}$$

а отже, єдиний розв'язок задачі

$$u^{(\beta)}(t) = Au(t) + (f_{1-\beta} * f)(t) + f_{1-\beta}(t)h, \quad t \in (0,T], \quad u(0) = h, \tag{3.6}$$

заданий формулою

$$u(t) = S_{\beta,A}(t)h + \int_0^t S_{\beta,A}(t-s)f(s)ds. \tag{3.7}$$

Зауважимо, що $\int\limits_0^t f(s)ds = f_1(t) * f(t)$, звідки $f_{-\beta}(t) * \big(\int\limits_0^t f(s)ds\big) = f_{-\beta}(t) * \big(f_1(t) * f(t)\big) = \big(f_{-\beta}(t) * f_1(t)\big) * f(t) = f_{1-\beta}(t) * f(t)$, $(f_\beta * u)(0) = 0$, а з замкненості оператора $A \in \mathcal{A}$ маємо $\big(f_\beta * Au\big)(t) = A(f_\beta * u)(t)$, тому, діючи на обидві частини рівняння (3.5) оператором $f_{-\beta}*$, одержуємо задачу (3.6), а діючи на обидві частини задачі (3.6) оператором $f_\beta*$ та враховуючи початкову умову, матимемо рівняння (3.5) .

Зафіксуємо довільний оператор $J \in \mathcal{A}$. Через V_ϑ, як у розділі 2, позначаємо область визначення дробового степеня J^ϑ $(0 < \vartheta < 1)$ із нормою графіка $\|x\|_\vartheta := \|J^\vartheta x\|_0$. Простір $V_\vartheta = \big[\cdot,\cdot\big]_\vartheta$ — проміжний для інтерполяційної пари $\big\{V_0; V_1\big\}$, породжений комплексним методом інтерполяції [140, теорема 1.15.3].

Оскільки J є секторіальним оператором від'ємного типу з тим самим кутом ω_0 над парою просторів $\big\{V_0; V_1\big\}$, то, згідно з [43, с. 170-171], півгрупа $\Phi_J(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{t\lambda} R(\lambda, J)\, d\lambda \in \mathcal{L}(V_0) \bigcap \mathcal{L}(V_1)$, $t \geq 0$ відображає простір V_0 у простір V_1 та є рівномірно обмежена і сильно неперервна над кожним із просторів V_0, V_1. Також $\Phi_A(t) \in \mathcal{L}(V_0) \bigcap \mathcal{L}(V_1)$.

Припущення: $A \in \mathcal{A}$, $\beta \in (0,1]$, $0 \leq \eta < \theta \leq 1$, $h \in V_\theta$, $f \in C\big([0,T]; V_\theta\big)$.

Означення 3.1. Розв'язком задачі (3.1) називаємо функцію $u(t)$ класу

$$C^{\beta,\eta} := \Big\{ v \in C\big([0,T]; V_{1+\eta}\big) \colon D_t^\beta v \in C_b\big((0,T]; V_\eta\big),$$
$$||u||_{C^{\beta,\eta}} = \max\{\max_{t\in[0,T]} \big\|u(t)\big\|_{1+\eta}, \sup_{t\in(0,T]} \big\|D^\beta u(t)\big\|_\eta\} < +\infty \Big\},$$

що задовольняє рівняння задачі в V_η та початкову умову.

Лема 3.1. *Якщо $f \in C\big([0,T]; V_1\big)$, $h \in V_1$, то функція (3.7) належить класу $C^{\beta,0}$ та є єдиним розв'язком задачі (3.1).*

Доведення. При $f \in C\big([0,T];V_1\big)$ існує інтеграл $\int\limits_0^t f(s)ds$ ($t \in [0,T]$) в сенсі Бохнера, який належить простору $C\big([0,T];V_1\big)$. Тоді за властивістю півгрупи Φ_A та згаданих вище результатів [160, 161] функція (3.7) належить $C\big([0,T];V_1\big)$ та є єдиним розв'язком задачі (3.1).

Зауважимо, що для функції $v \in C\big([0,T];V_1\big)$ (а отже й для розв'язку задачі (3.1)) існує $f_\beta * u \in C\big([0,T];V_1\big)$. Справді,

$$\begin{aligned}\|f_\beta * v\|_{C\big([0,T];V_1\big)} &= \Big\| \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} v(\tau)d\tau \Big\|_{C\big([0,T];V_1\big)} \\ &\le \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau \cdot \|v\|_{C\big([0,T];V_1\big)} \\ &= \frac{t^\beta}{\beta\Gamma(\beta)}\|v\|_{C\big([0,T];V_1\big)} = \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|v\|_{C\big([0,T];V_1\big)}.\end{aligned}$$

Так само одержуємо, що $f_{1-\beta} * f \in C\big([0,T];V_1\big)$ при $f \in C\big([0,T];V_1\big)$.

Підставляючи функцію (3.7) (класу $C\big([0,T];V_1\big)$) у рівняння (3.1) та використовуючи вищенаведені властивості півгрупи $S_{\beta,A}(t)$, одержуємо існування $D_t^\beta u \in C_b\big((0,T];V_0\big)$:

$$\begin{gathered}D^\beta u = f_{-\beta}(t) * u - f_{1-\beta}(t)u(0) = \\ = f_{-\beta}(t) * \big[S_{\beta,A}(t)h + \int\limits_0^t S_{\beta,A}(t-s)f(s)ds\big] - f_{1-\beta}(t)S_{\beta,A}(0)h = \\ = f_{-\beta}(t) * S_{\beta,A}(t)h + f_{-\beta}(t) * \int\limits_0^t S_{\beta,A}(t-s)f(s)ds - f_{1-\beta}(t)S_{\beta,A}(0)h = \\ = AS_{\beta,A}(t)h + f_{1-\beta}(t)S_{\beta,A}(0)h + \\ +A\int\limits_0^t S_{\beta,A}(t-s)f(s)ds + (f_{1-\beta} * f)(t) - f_{1-\beta}(t)S_{\beta,A}(0)h = \\ = A\big[S_{\beta,A}(t) + \int\limits_0^t S_{\beta,A}(t-s)f(s)ds\big] + (f_{1-\beta} * f)(t) = \\ = Au(t) + (f_{1-\beta} * f)(t), \quad t \in (0,T].\end{gathered}$$

Отож, $u \in C^{\beta,0}$ та u задовольняє задачу (3.1).

Лема 3.2. *Нехай $J \in \mathcal{A}$. Звуження $J_{|V_\vartheta}$ залишається секторіальним оператором від'ємного типу з кутом ω_0 над парою $\big\{V_\vartheta; V_{1+\vartheta}\big\}$.*

Доведення. Для всіх чисел $\lambda \in \varrho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ маємо $(\lambda E_{10} - J)^{-1} : V_1 \longmapsto V_1$ та

$$\|(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_1;V_2)} = \sup_{\|(-J)^{-1}y\|_0 \le 1} \|(-J)(\lambda E_{10} - J)^{-1}(-J)^{-1}y\|_1 \le$$

$$\|(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} \|J\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)} \le K(J)\|J\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)},$$

де $K(J)$ – стала з означення класу $\mathcal{A}$.

Звідси при $0 < b < \min\{-r(J); \frac{1}{2K(J)}\}$ отримуємо оцінку

$$\left\| \left[E_{00} - b(\lambda E_{10} - J)^{-1}\right]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \sum_{k=0}^{\infty} \|b(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} \le 2,$$

де E_{00} – одиничний оператор над V_0. Для чисел $a \in [b, -r(J))$, одержуємо $[0, +\infty) \subset \Lambda_a - b$. Зокрема, для чисел $\lambda \ge 0$ правильна тотожність

$$(\lambda + b)R(\lambda + b, J) = E_{00} + J\left[(\lambda + b)E_{10} - J\right]^{-1} \tag{3.8}$$

з якої для сталої $C = 1 + K_a(J)\,\|J\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}$, маємо

$$\|R(\lambda + b, J)\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{C}{\lambda + b}. \tag{3.9}$$

Далі з тотожності

$$R(\lambda, J) = R(\lambda + b, J)\left[E_{00} - b(\lambda E_{10} - J)^{-1}\right]^{-1},$$

для чисел $\lambda \ge 0$ отримуємо наступну оцінку

$$\|R(\lambda, J)\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le 2\|R(\lambda + b, J)\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{2C}{\lambda + b}$$

або, при $\xi = -\lambda$,

$$\|R(\xi, (-J))\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{2C}{|\xi| + b}, \qquad \forall\, \xi \le 0.$$

Тобто, оператор $(-J)$ є позитивний в сенсі означення [140, 1.14.1]. Дробові степені позитивних операторів $(-J)^{\vartheta}$ породжують інтерполяційну шкалу просторів V_{ϑ}, яка володіє властивостями

$$\left[V_0, V_1\right]_{\vartheta} = V_{\vartheta}, \qquad \left[V_1, V_2\right]_{\vartheta} = V_{1+\vartheta},$$

де через $\left[\cdot,\cdot\right]_\vartheta$ позначено проміжний простір відповідної пари, породжений комплексним методом інтерполяції. Згідно з властивостями інтерполяційних шкал, якщо для чисел $\lambda \in \Lambda$

$$(\lambda E_{10} - J)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0; V_1) \quad \text{і} \quad (\lambda E_{10} - J)^{-1}_{|\,V_1} \in \mathcal{L}(V_1; V_2),$$

то $(\lambda E_{10} - J)^{-1}{}_{|\,V_\vartheta} \in \mathcal{L}(V_\vartheta; V_{1+\vartheta})$ та існує стала $C_\vartheta > 0$ така, що

$$\begin{aligned} &\|(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_\vartheta; V_{1+\vartheta})} \leq \\ &C_\vartheta \, \|(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|^{1-\vartheta}_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} \|(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|^{\vartheta}_{\mathcal{L}(V_1;V_2)} \end{aligned}$$

для всіх $\lambda \in \Lambda$. Оцінюючи норми справа, одержуємо

$$\begin{aligned} &\|(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_\vartheta; V_{1+\vartheta})} \leq \\ &C_\vartheta \, K(J)^{1-\vartheta} \, K(J)^{\vartheta} \|J\|^{\vartheta}_{\mathcal{L}(V_1;V_0)} = C_\vartheta \, K(J) \|J\|^{\vartheta}_{\mathcal{L}(V_1;V_0)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

для всіх $\lambda \in \Lambda$. Отож, звуження $J_{|\,V_\vartheta}$ залишається секторіальним оператором від'ємного типу з кутом ω_0 над парою $\left\{V_\vartheta; V_{1+\vartheta}\right\}$. $\square$

3.1.2 Теорема про максимальну регулярність розв'язку

Теорема 3.1. *Нехай задані оператори $A, J \in \mathcal{A}$ та числа $0 \leq \eta < \vartheta \leq 1$, $f(t) \in C\big([0,T]; V_\vartheta\big)$, $h \in V_\vartheta$. Тоді існує єдиний розв'язок $u \in C^{\beta,\eta}$ задачі (3.1). Цей розв'язок має вигляд*

$$u(t) = \int_0^t S_{\beta,A}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + S_{\beta,A}(t) h \tag{3.11}$$

та існують такі сталі $K > 0$, $K_1 > 0$, що виконується нерівність

$$\|u\|_{C^{\beta,\eta}} \leq K \max_{t\in[0,T]} \big\|f(t)\big\|_\vartheta + K_1 \|h\|_\vartheta. \tag{3.12}$$

Доведення. За лемою 3.2 звуження $J_{|\,V_\vartheta}$ залишається секторіальним оператором від'ємного типу з тим самим кутом ω_0 над парою $\left\{V_\vartheta; V_{1+\vartheta}\right\}$ та до оператора $J_{|\,V_\vartheta}$ знову можна застосувати функціональне числення із розділу 2 та [43], зокрема, в просторі $\mathcal{L}(V_\vartheta) \bigcup \mathcal{L}(V_{1+\vartheta})$ визначена півгрупа

$$\Phi_J(t-\tau) = e^{(t-\tau)J} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} e^{(t-\tau)\lambda} \, R(\lambda, J)\, d\lambda\,, \quad t \geq \tau,$$

яка відображає простір V_ϑ в простір $V_{1+\vartheta}$. А так як область визначення $V_{1+\eta-\vartheta}$ оператора $(-J)^{1+\eta-\vartheta}$ містить підпростір $V_{1+\vartheta}$, то визначеним є також добуток операторів

$$(-J)^{1+\eta-\vartheta}e^{(t-\tau)J} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{a,\omega}} e^{(t-\tau)\lambda}\,(-J)^{1+\eta-\vartheta}R(\lambda,J)\,d\lambda.$$

Відомо також [43], що визначена так півгрупа $e^{(t-\tau)J} = \Phi_J(t-\tau)$ є рівномірно обмеженою та сильно неперервною над простором V_ϑ, а тому існують інтеграли

$$v(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)J}f(\tau)\,d\tau, \quad (-J)^{1+\eta-\vartheta}v(t) = \int_0^t \big(-J\big)^{1+\eta-\vartheta}e^{(t-\tau)J}f(\tau)\,d\tau.$$

Нехай

$$w_0(t,J) = \int_0^t S_{\beta,J}(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t \Big[\int_0^\infty \Phi_J\Big(\big(\frac{t-\tau}{s}\big)^\beta\Big)g_\beta(s)ds\Big]f(\tau)d\tau.$$

Тому що

$$\int_0^\infty \Big[\int_0^t \Phi_J\Big(\big(\frac{t-\tau}{s}\big)^\beta\Big)f(\tau)d\tau\Big]g_\beta(s)ds =$$
$$= \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \Big[\int_0^{(t/s)^\beta} \Phi_J(t_1)f(t-t_1^{\frac{1}{\beta}}s)t_1^{\frac{1}{\beta}-1}dt_1\Big]sg_\beta(s)ds,$$

то

$$\|w_0(t,J)\|_{V_\vartheta} \le \frac{\max\limits_{\tau\in[0,T]}\|f(\tau)\|_\theta\|\Phi_J\|_{\mathcal{L}(V_\theta,V_{1+\theta})}}{\beta}\int\limits_0^\infty\Big[\int\limits_0^{(t/s)^\beta} t_1^{\frac{1}{\beta}-1}dt_1\Big]sg_\beta(s)ds =$$

$$= t\max_{\tau\in[0,T]}\|f(\tau)\|_\theta\|\Phi_J\|_{\mathcal{L}(V_\theta,V_{1+\theta})}\int\limits_0^\infty g_\beta(s)ds = t\max_{\tau\in[0,T]}\|f(\tau)\|_\theta\|\Phi_J\|_{\mathcal{L}(V_\theta,V_{1+\theta})}$$

– одержуємо існування в V_ϑ інтегралу $w_0(t,J)$ та подібно існування в $V_{\vartheta+1}$

$$(-J)^{1+\eta-\vartheta}w_0(t,J) = \int_0^t (-J)^{1+\eta-\vartheta}S_{\beta,J}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}}\Big[\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^{(t/s)^\beta} e^{t_1\lambda}(-J)^{1+\eta-\vartheta}R(\lambda,J)f(t-t_1^{\frac{1}{\beta}}s)t_1^{\frac{1}{\beta}-1}dt_1\Big)sg_\beta(s)ds\Big]d\lambda.$$

Остання рівність є наслідком теореми Фубіні, яку можна застосувати при абсолютній збіжності інтегралу. Перевіримо наявність такої збіжності. Для цього до оператора $J_{|V_\vartheta}$ застосуємо відому нерівність [143]

$$\left\|(-J)^{1+\eta-\vartheta}R(\lambda,J)\right\|_{\mathcal{L}(V_\vartheta)} = \|R(\lambda,J)\|_{\mathcal{L}(V_\vartheta;V_{1+\eta})} \le \frac{C'}{|\lambda|^{\vartheta-\eta}}, \qquad \lambda\in\Lambda_0, \quad (3.13)$$

де $C'>0$ – деяка стала. Звідси одержуємо

$$\|R(\lambda,J)\,f(\tau)\|_{1+\eta} \le \|R(\lambda,J)\|_{\mathcal{L}(V_\vartheta;V_{1+\eta})}\,\|f(\tau)\|_\vartheta \le \frac{C'\max\limits_{\tau\in[0,T]}\|f(\tau)\|_\vartheta}{|\lambda|^{\vartheta-\eta}}, \quad \lambda\in\Lambda_0$$

а оскільки $\cos\omega<0$, то матимемо

$$\|w_0(t,J)\|_{1+\eta} = \left\|(-J)^{1+\eta-\vartheta}w_0(t,J)\right\|_\vartheta =$$

$$= \left\|\frac{1}{2\pi i\beta}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}}\Big[\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^{(t/s)^\beta} e^{t_1\lambda}(-J)^{1+\eta-\vartheta}R(\lambda,J)f(t-t_1^{\frac{1}{\beta}}s)t_1^{\frac{1}{\beta}-1}dt_1\Big)sg_\beta(s)ds\Big]d\lambda\right\|_\vartheta$$

$$\le \frac{1}{2\pi\beta}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}}\Big[\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^{(t/s)^\beta}|e^{t_1\lambda}|\left\|R(\lambda,J)\,f(t-t_1^{\frac{1}{\beta}}s)\right\|_{1+\eta}t_1^{\frac{1}{\beta}-1}dt_1\Big)sg_\beta(s)ds\Big]|d\lambda|$$

$$\le \frac{C'\max\limits_{\tau\in[0,T]}\|f(\tau)\|_\vartheta}{2\pi\beta}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}}\Big[\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^{(t/s)^\beta}e^{-t_1|\lambda|\,|\cos\omega|}\,t_1^{\frac{1}{\beta}-1}\,dt_1\Big)\,sg_\beta(s)ds\Big]\frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{\vartheta-\eta}}.$$

Для доведення існування внутрішніх інтегралів розглянемо

$$g(c,t) = \int\limits_0^\infty t_1^{\frac{1}{\beta}-1}e^{-ct_1}dt_1\int\limits_0^{tt_1^{-1/\beta}} sg_\beta(s)ds.$$

Тому що зображенням функції $\int\limits_0^z sg_\beta(s)ds$ є функція $-\frac{\frac{d}{d\lambda}e^{-\lambda^\beta}}{\lambda} = \frac{\beta}{\lambda^{1-\beta}}\cdot\frac{e^{-\lambda^\beta}}{\lambda}$, то $\int\limits_0^z sg_\beta(s)ds = \beta f_{1-\beta}(z)*G_\beta(z)$, де $G_\beta(z)$ – обернене перетворення Лапласа від функції $\frac{e^{-\lambda^\beta}}{\lambda}$, тобто $G_\beta(z)=\int\limits_0^z g_\beta(s)ds\le\theta(z)$. Ми одержали оцінку

$$\int_0^z sg_\beta(s)ds \le \beta f_{1-\beta}(z)*\theta(z) = \beta f_{1-\beta}(z)*f_1(z) = \beta f_{2-\beta}(z) = \frac{\beta z^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$$

і тоді

$$\int\limits_0^{tt_1^{-1/\beta}} sg_\beta(s)ds \le \frac{\beta t^{1-\beta} t_1^{\frac{\beta-1}{\beta}}}{\Gamma(2-\beta)} = \frac{\beta t^{1-\beta} t_1^{1-\frac{1}{\beta}}}{\Gamma(2-\beta)},$$

$$g(c,t) \le \frac{\beta t^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^\infty e^{-ct_1} dt_1 = \frac{\beta t^{1-\beta}}{c\Gamma(2-\beta)}.$$

Отож, існує

$$\int\limits_0^\infty \Big(\int\limits_0^{(t/s)^\beta} e^{-t_1|\lambda|\,|\cos\omega|}\, t_1^{\frac{1}{\beta}-1}\, dt_1 \Big)\, sg_\beta(s)ds \le \frac{\beta t^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)|\lambda|\,(-\cos\omega)}.$$

В результаті одержуємо

$$\begin{aligned} \|w_0(t,J)\|_{1+\eta} &\le \frac{C' t^{1-\beta} \max\limits_{\tau\in[0,T]} \|f(\tau)\|_\vartheta}{2\pi\Gamma(2-\beta)(-\cos\omega)} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{1+\vartheta-\eta}} \\ &= \frac{C' t^{1-\beta} \max\limits_{\tau\in[0,T]} \|f(\tau)\|_\vartheta}{\pi\Gamma(2-\beta)(-\cos\omega)} \Big[\int\limits_a^{+\infty} \frac{dr}{r^{1+\vartheta-\eta}} + \frac{(\pi-\omega)}{a^{1+\vartheta-\eta}} \Big] \end{aligned}$$

– інтеграл збігається абсолютно. Крім того, $w_0(t,J) \in V_{1+\eta}$ для всіх $t \in [0,T]$ і позначаючи $\tilde{K} := \frac{C' T^{1-\beta}}{\pi\Gamma(2-\beta)(-\cos\omega)} \Big[\int\limits_a^{+\infty} \frac{dr}{r^{1+\vartheta-\eta}} + \frac{(\pi-\omega)}{a^{1+\vartheta-\eta}} \Big]$, одержуємо

$\max\limits_{t\in[0,T]} \big\|u(t)\big\|_{1+\eta} \le \tilde{K} \max\limits_{\tau\in[0,T]} \|f(\tau)\|_\vartheta$ в випадку $A = J$.

Нехай

$$w_1(t,J) = S_{\beta,J}(t-\tau)h = \int\limits_0^\infty \Phi_J((\frac{t}{s})^\beta) h g_\beta(s)ds = \int\limits_0^\infty \frac{t}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\frac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}}) \Phi_J(s) h\, ds.$$

Тому що оператор $(-J)^{\eta-\vartheta} = (-J)^{1+\eta-(1+\vartheta)}$ визначено на $V_1 \cup V_0$, V_1 містить підпростір $V_{1+\vartheta}$, то визначеним є добуток

$$(-J)^{\eta-\vartheta} e^{tJ} = (-J)^{1+\eta-(1+\vartheta)} e^{tJ} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} e^{t\lambda}\, (-J)^{1+\eta-(1+\vartheta)} R(\lambda,J)\, d\lambda.$$

Знову ж таки відомо, що визначена так півгрупа e^{tJ} є рівномірно обмеженою і сильно неперервною над простором $V_{1+\vartheta}$, тому існує $(-J)^{1+\eta-(1+\vartheta)} w_1(t)$ і одержуємо

$$\|(-J)^{1+\eta-(1+\vartheta)} R(\lambda,J)\|_{\mathcal{L}(V_{1+\vartheta})} = \|R(\lambda,J)\|_{\mathcal{L}(V_{1+\vartheta};V_{1+\eta})} \le \frac{C"}{|\lambda|^{1+\vartheta-\eta}}, \quad \lambda \in \Lambda_0, \tag{3.14}$$

де $C \gg 0$ – деяка стала. Звідси

$$\|R(\lambda, J)\, h\|_{1+\eta} \leq \|R(\lambda, J)\|_{\mathcal{L}(V_{1+\vartheta};V_{1+\eta})}\, \|h\|_{1+\vartheta} \leq \frac{C"\, \|h\|_{1+\vartheta}}{|\lambda|^{1+\vartheta-\eta}}, \quad \lambda \in \Lambda_0, \quad (3.15)$$

Тому що існує

$$\|w_1(t, J)\|_0 = \Big| \int\limits_0^\infty \Phi_J((\frac{t}{s})^\beta) g_\beta(s) ds \Big|_0 \leq \|\Phi_J\|_{\mathcal{L}(V_{1+\vartheta}, V_{1+\vartheta})} \|h\|_{V_{1+\vartheta}} \int\limits_0^\infty g_\beta(s) ds =$$

$$= \|\Phi_J\|_{\mathcal{L}(V_{1+\vartheta}, V_{1+\vartheta})} \|h\|_{V_{1+\vartheta}},$$

то існує також в V_0

$$(-J)^{1+\eta-(1+\vartheta)} w_1(t, J) = (-J)^{\eta-\vartheta} \int\limits_0^\infty \tfrac{t}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\tfrac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}}) \Phi_J(s) h ds$$

$$= \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} (-J)^{\eta-\vartheta} R(\lambda, J) h \big(\int\limits_0^\infty \tfrac{t e^{s\lambda}}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\tfrac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}}) ds \big) d\lambda.$$

Остання рівність є наслідком теореми Фубіні при абсолютній збіжності інтеграла. Перевіримо наявність такої збіжності. Застосовуючи до оператора $J_{|\, V_{1+\vartheta}}$ нерівність (3.15) та враховуючи, що $\cos\omega < 0$, одержуємо

$$\|w_1(t, J)\|_{1+\eta} = \|\tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \big(\int\limits_0^\infty \tfrac{t e^{s\lambda}}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\tfrac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}}) ds \big) R(\lambda, J) h\|_{1+\eta}$$

$$\leq \tfrac{1}{2\pi\beta} | \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \big(\int\limits_0^\infty \tfrac{t e^{s\lambda}}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\tfrac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}}) ds \big) \|R(\lambda, J) h\|_{1+\eta} d\lambda |$$

$$\leq \tfrac{C' \|h\|_{1+\theta}}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \big(\int\limits_0^\infty \tfrac{t e^{-s|\lambda||cos\omega|}}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\tfrac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}}) ds \big) \tfrac{|d\lambda|}{|\lambda|^{1+\theta-\eta}}.$$

Тому що

$$\int_0^\infty \frac{t e^{-cs}}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\frac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}}) ds = \int_0^\infty e^{-ct^\beta \xi^{-\beta}} g_\beta(\xi) d\xi \leq \int_0^\infty g_\beta(\xi) d\xi = 1,$$

одержуємо

$$\|w_1(t, J)\|_{1+\eta} \leq \frac{C' \|h\|_{1+\theta}}{2\pi} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{1+\theta-\eta}} \leq K_0\, \|h\|_{1+\theta},$$

де $K_0 = \frac{C_0'}{\pi} \Big[\int_a^{+\infty} \frac{dr}{r^{1+\vartheta-\eta}} + \frac{(\pi-\omega)}{a^{1+\vartheta-\eta}} \Big]$, а отже, $w_1 \in C\big([0, T]; V_{1+\eta}\big)$ та для функції $u = w_0 + w_1$ правильна оцінка

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|u(t)\big\|_{1+\eta} \leq \tilde{K} \max_{t\in[0,T]} \big\|f(t)\big\|_\vartheta + K_0 \|h\|_{1+\vartheta}. \quad (3.16)$$

При $h \in V_\theta$ введемо $h_\varepsilon = e^{\varepsilon J} h$. Оскільки півгрупа $e^{\varepsilon J}$ відображає V_ϑ в $V_{1+\vartheta}$, то $h_\varepsilon \in V_{1+\theta}$. За властивостями функціонального числення [43]

$$e^{\varepsilon J}\, J^{-\vartheta} - \, J^{-\vartheta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{e^{\varepsilon\lambda} - 1}{(-\lambda)^\vartheta}\, R(\lambda, J)\, d\lambda \in \mathcal{L}(V_0)\,.$$

За встановленим у розділі 2,

$$\big\| R(\lambda, J) \big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le C/|\lambda| \quad \forall \lambda \in \Lambda_0.$$

Тому на контурі $\Gamma_{a,\omega}$ підінтегральна функція задовольняє нерівність

$$\Big\| \frac{e^{\varepsilon\lambda} - 1}{(-\lambda)^\vartheta}\, R(\lambda, J) \Big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{2C_0\, |e^{r\varepsilon\, \cos\omega} - 1|}{r^{1+\vartheta}}.$$

Знову враховуючи, що $\cos\omega < 0$ при $\lambda = re^{i\omega} \in \Gamma_{a,\omega}$, одержуємо

$$\big\| e^{\varepsilon J}\, J^{-\vartheta} - J^{-\vartheta} \big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{C_0}{\pi} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{|e^{\varepsilon\lambda \cos\omega} - 1|\, |d\lambda|}{r^{1+\vartheta}} := C_1(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} &\big\| h_\varepsilon - h \big\|_\vartheta = \big\| \big(e^{\varepsilon J}\, J^{-\vartheta} - J^{-\vartheta} \big) J^\vartheta h \big\|_\vartheta \\ &\le \big\| h \big\|_\vartheta \, \big\| e^{\varepsilon J}\, J^{-\vartheta} - J^{-\vartheta} \big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \, \big\| J^\vartheta \big\|_{\mathcal{L}(V_\vartheta; V_0)} \le C_1(\varepsilon)\, \big\| h \big\|_\vartheta \, \big\| J^\vartheta \big\|_{\mathcal{L}(V_\vartheta; V_0)}. \end{aligned}$$

Отож, $h_\varepsilon \to h \in V_\vartheta$ при $\varepsilon \to 0$.

Нехай $u_\varepsilon = w_0 + S_{\beta,J}(t) h_\varepsilon$. Тоді $\big\| u_\varepsilon - u \big\|_{1+\eta} = \big\| S_{\beta,J}(t)(h_\varepsilon - h) \big\|_{1+\eta} \le \big\| S_{\beta,J}(t) \big|_{\mathcal{L}(V_\eta, V_{1+\eta})} \big| h_\varepsilon - h \big\|_\eta \le C_1' \big| h_\varepsilon - h \big\|_\vartheta \rightrightarrows 0$ при $\varepsilon \to 0$. Так, переходячи в нерівності (3.16) при u_ε замість u та h_ε замість h до границі при $\varepsilon \to 0$, одержуємо

$$\max_{t \in [0,T]} \big\| u(t) \big\|_{1+\eta} \le \tilde{K} \max_{t \in [0,T]} \big\| f(t) \big\|_\vartheta + \tilde{K}_1 \| h \|_\vartheta \tag{3.17}$$

із деякою додатною сталою $\tilde{K}_1$.

У випадку довільного $A \in \mathcal{A}$ в області визначення степені оператора $\mathcal{D}\big[(-A)^\vartheta\big]$ задамо норму графіка $\|x\|_{\vartheta,A} = \big\| (-A)^\vartheta x \big\|_0$. Оператор $(-J)^{-\vartheta}$ залишає інваріантним підпростір V_1, а оператор $(-A)^\vartheta$ в своїй області визначення містить V_1. Тому на V_1 визначено добуток $(-A)^\vartheta (-J)^{-\vartheta}$ та

$$\|x\|_{\vartheta,A} = \left\|(-A)^{\vartheta}(-J)^{-\vartheta}(-J)^{\vartheta}x\right\|_0 \leq$$
$$\leq \left\|(-A)^{\vartheta}\right\|_{\mathcal{L}\left(\mathcal{D}[(-A)^{\vartheta}];\, V_0\right)} \left\|(-J)^{-\vartheta}\right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_{\vartheta})} \|x\|_{\vartheta} \quad \forall x \in V_1.$$

За щільністю V_1 в V_{ϑ}, наведену рівність можна за неперервністю разширити до відображення $(-A)^{\vartheta}(-J)^{-\vartheta} : V_{\vartheta} \longmapsto \mathcal{D}\big[(-A)^{\vartheta}\big]$. Це відображення ін'єктивне, оскільки є композицією оборотних операторів. Замінюючи в попередніх міркуваннях оператор J на A переконуємось, що оберненій оператор $(-J)^{\vartheta}(-A)^{-\vartheta}$ також здійснює неперервне ін'єктивне відображення $\mathcal{D}\big[(-A)^{\vartheta}\big]$ в V_{ϑ}. Отож, наявний ізморфізм банахових просторів $\mathcal{D}\big[(-A)^{\vartheta}\big] \simeq V_{\vartheta}$ і в наведеному вище доведенні можна замінити оператор J на довільний оператор $A \in \mathcal{A}$.

Ми показали, що за умов теореми функція (3.11) належить $C\big([0,T];\, V_{1+\eta}\big)$. Доведемо, що ця функція є розв'язком задачі класу $C^{\beta,\eta}$ та оцінку (3.12). Припустимо спочатку, що функція $f(t)$ задовольняє сильнішу умову, а саме, що $f(t) \in C\big([0,T];\, V_1\big)$ і $h \in V_{1+\vartheta} \subset V_1$. За лемою 3.1 $u = w_0 + w_1 \in C^{\beta,0}$ та є розв'язком задачі (3.1).

Для довільних функциї $f(t) \in C\big([0,T];\, V_{\vartheta}\big)$ і елемента $h \in V_{\vartheta}$ введемо $f^{\varepsilon}(t) = e^{\varepsilon A} f(t)$, $h_{\varepsilon} = e^{\varepsilon A} h$. Оскільки півгрупа $e^{\varepsilon A}$ відображає V_{ϑ} в $V_{1+\vartheta}$, то $f^{\varepsilon}(t) \in C\big([0,T];\, V_{1+\vartheta}\big)$, $h_{\varepsilon} \in V_{1+\vartheta}$. Тому, вводячи

$$w_{0,\varepsilon} = \int_0^t S_{\beta,A}(t-\tau) f^{\varepsilon}(\tau d\tau, \qquad w_{1,\varepsilon} = S_{\beta,A}(t) h_{\varepsilon}$$

і враховуючи оцінку (3.16) для $\max_{t\in[0,T]} \left\|u_{\varepsilon}(t)\right\|_{1+\eta}$, матимемо

$$u_{\varepsilon}(t) := w_{0,\varepsilon} + w_{1,\varepsilon} \in C\big([0,T];\, V_{1+\eta}\big). \tag{3.18}$$

Далі, за властивостями функціонального числення для оператора A (як вище для J), одержуємо

$$\left\|e^{\varepsilon A} A^{-\vartheta} - A^{-\vartheta}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq \frac{C'}{\pi} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{\left|e^{\varepsilon\lambda\cos\omega} - 1\right| |d\lambda|}{r^{1+\vartheta}} := C_1'(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Звідси випливають рівномірні за всіма $t \in \big[0,T\big]$ нерівності

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|f^{\varepsilon}(t) - f(t)\big\|_{\vartheta} = \max_{t\in[0,T]} \big\|\big(e^{\varepsilon A}\, A^{-\vartheta} - A^{-\vartheta}\big) A^{\vartheta} f(t)\big\|_{\vartheta}$$
$$\leq \max\nolimits_{t\in[0,T]} \big\|f(t)\big\|_{\vartheta} \big\|e^{\varepsilon A}\, A^{-\vartheta} - A^{-\vartheta}\big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \big\|A^{\vartheta}\big\|_{\mathcal{L}(V_{\vartheta};V_0)}$$
$$\leq C_1'(\varepsilon)\, \max\nolimits_{t\in[0,T]} \big\|f(t)\big\|_{\vartheta} \big\|A^{\vartheta}\big\|_{\mathcal{L}(V_{\vartheta};V_0)}.$$

Отож, $C\big([0,T];\, V_1\big) \ni f^{\varepsilon}(t) \rightrightarrows f(t) \in C\big([0,T];\, V_{\vartheta}\big)$ рівномірно за $t \in [0,T]$ при $\varepsilon \to 0$, і так само $h_{\varepsilon} \to h$ в V_{ϑ}.

За нерівністю (3.17) маємо

$$C\big([0,T];\, V_{1+\eta}\big) \ni u_{\varepsilon}(t) \rightrightarrows u(t) \in C\big([0,T];\, V_{1+\eta}\big)$$

рівномірно за всіма $t \in [0,T]$ при $\varepsilon \to 0$. Для довільного $\varepsilon > 0$ рівняння задачі (3.1) задовольняється. Тому при $\varepsilon \to 0$, одержуємо

$$\sup_{t\in(0,T]} \big\|D^{\beta} u_{\varepsilon}(t) - D^{\beta} u(t)\big\|_{\eta}$$
$$\leq \big\|A\big(u_{\varepsilon}(t) - u(t)\big)\big\|_{\eta} + \frac{T^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \max_{t\in[0,T]} \big\|f^{\varepsilon}(t) - f(t)\big\|_{\eta}$$
$$\leq C_2 \big\|u_{\varepsilon}(t) - u(t)\big\|_{1+\eta} + C_3 \max_{t\in[0,T]} \big\|f^{\varepsilon}(t) - f(t)\big\|_{\vartheta} \to 0,$$

де стала C_2 характеризує ізоморфізм $\mathcal{D}\big[(-A)^{1+\theta}\big] \simeq V_{1+\theta}$, а стала C_3 є добутком $\frac{T^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$ на норму неперервного вкладення $V_{\vartheta} \subset V_{\eta}$. Іншими словами, маємо $D^{\beta} u \in C_b\big((0,T];\, V_{\eta}\big)$ і приходимо до висновку, що функція $u(t)$ належить класу $C^{\beta,\eta}$ та є розв'язком задачі (3.1). Враховуючи рівняння задачі та оцінку (3.17), одержуємо (3.12).

Наслідок 3.1. *Нехай задані оператори $A, J \in \mathcal{A}$ та числа $0 \leq \eta < \vartheta \leq 1$, $f(t) \in C\big([0,T];\, V_{\vartheta}\big)$, $h \in V_{\vartheta}$. Тоді існує єдиний розв'язок $u \in C^{1,\eta}$ задачі (3.2). Цей розв'язок має вигляд*

$$u(t) = \int_0^t \Phi_A(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + \Phi_A(t) h \tag{3.19}$$

та існують такі сталі $K > 0$, $K_1 > 0$, що виконується нерівність типу коерцитивності

$$\|u\|_{C^{1,\eta}} \leq K \max_{t\in[0,T]} \big\|f(t)\big\|_{\vartheta} + K_1 \|h\|_{\vartheta}.$$

Цей наслідок може бути доведений і незалежно за схемою доведення теореми 3.1 (див. [57]).

Примітка. Теорема 3.1 та наслідок 3.1 залишаються правильними, якщо $f(t) \in C_b\big((0,T];\, V_\vartheta\big)$ ($\sup\limits_{t\in(0,T]} \big\|f(t)\big\|_\vartheta < +\infty$) і всюди замінити $\max\limits_{t\in[0,T]} \big\|f(t)\big\|_\vartheta$ на $\sup\limits_{t\in(0,T]} \big\|f(t)\big\|_\vartheta$.

3.2 Лінійні збурення задачі Коші

3.2.1 Аналітичність збурень на проміжних просторах

Далі пару комплексних банахових просторів V_0 і V_1 із неперервним та щільним вкладенням $E_{10} : V_1 \longmapsto V_0$ будемо скорочено позначати однією літерою $V := \Big\{V_0\,,\, V_1\Big\}$. Сукупність усіх обмежених лінійних операторів $T : V_0 \to V_0$ таких, що $T(V_1) \subset V_1$, утворює банахову алгебру $\mathcal{L}(V)$ обмежених лінійних операторів над банаховою парою V відносно рівномірної операторної норми $\big\|T\big\|_{\mathcal{L}(V)} := \max_{j=0,1} \big\|T\big\|_{\mathcal{L}(V_j)}$, де $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(V_j)}$ рівномірна норма в алгебрі $\mathcal{L}(V_j)$ обмежених лінійних операторів над банаховим простором V_j та $j = 0\,,\,1$. При цьому слід зауважити, що скінченність норми $\big\|T\big\|_{\mathcal{L}(V_1)}$ випливає з неперервності вкладення E_{10} та теореми про замкнений графік.

Як і раніше, у відкритому секторі Λ^c, визначеному заданним кутом $\omega_0 \in \big(\frac{\pi}{2}, \pi\big)$ та числом $c : \frac{\pi}{2} < \omega_0 - c < \pi$, розглядаємо алгебру аналітичних функцій $\varphi(\lambda) \in \mathcal{H}(\Lambda^c)$. Згідно з лемою 2.3, для будь-якого секторіального оператора від'ємного типу $A \in \mathcal{A}$ існує контур $\Gamma_{a,\omega} \subset \varrho\,(A)$, заданий довільним кутом $\omega : \omega_0 - c \le \omega \le \omega_0$ та довільним числом $a : 0 < a < -r(A)$ такий, що формула

$$\varphi(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \varphi(\lambda)\, R(\lambda, A)\, d\lambda$$

визначає алгебричний гомоморфізм

$$\mathcal{H}(\Lambda^c) \ni \varphi(\lambda) \longmapsto \varphi(A) \in H\big(\mathcal{A}\big)$$

на комутативну алгебру $H\big(\mathcal{A}\big)$ функцій операторного аргументу

$$\varphi : \mathcal{A} \ni A \longmapsto \varphi(A) \in \mathcal{L}(V)$$

зі значеннями в алгебрі лінійних обмежених операторів $\mathcal{L}(V)$ над банаховою парою V. Далі такі функції з операторним аргументом позначаємо такими ж літерами, що й відповідні їм скалярні функції.

З теореми 2.1 випливає, що якщо U — проміжний простір пари V, то для кожного оператора $A \in \mathcal{A}$ існує число $\delta(A) > 0$ таке, що $A + X_1$ належить класу $\mathcal{A}$ для будь-якого оператора $X_1 \in \mathcal{L}(U, V_0)$ з нормою $\big\|X_1\big\|_{\mathcal{L}(U,V_0)} < \delta(A)$. Звідси, зокрема, маємо

$$\varphi(A + X_1) - \varphi(A) \in H\big(\mathcal{A}\big), \qquad \forall\, X_1 \in \mathcal{L}(U, V_0) : \big\|X_1\big\|_{\mathcal{L}(U,V_0)} < \delta(A).$$

Це факт дозволяє запровадити наступне узагальнення похідної для функцій операторного аргументу $\varphi(A) \in H\big(\mathcal{A}\big)$.

Нехай далі $\Big(U, \|\cdot\|_U\Big)$ — проміжний комплексний банахів простір для пари V. Розглянемо банахів простір $\mathcal{L}(U; V_0)$ — обмежених лінійних операторів $X : U \longmapsto V_0$, визначених на цьому проміжному просторі. Побудуємо банахів простір

$$\mathcal{L}^k\Big(\mathcal{L}(U; V_0);\ \mathcal{L}(V_0)\Big) := \mathcal{L}\Big(\mathcal{L}(U; V_0) \times \ldots \times \mathcal{L}(U; V_0);\ \mathcal{L}(V_0)\Big)$$

— обмежених k-лінійних операторів

$$T : \mathcal{L}(U; V_0) \underbrace{\times \ldots \times}_{k} \mathcal{L}(U; V_0) \ni \big[X_1, \ldots, X_k\big] \longmapsto T\big[X_1, \ldots, X_k\big] \in \mathcal{L}(V_0),$$

У просторі k-лінійних операторів $\mathcal{L}^k\Big(\mathcal{L}(U; V_0);\ \mathcal{L}(V_0)\Big)$ задаємо норму

$$\big\|T\big\|_{\mathcal{L}^k\left(\mathcal{L}(U;V_0);\,\mathcal{L}(V_0)\right)} := \sup_{m=1,\ldots,k} \ \sup_{\|X_m\|_{\mathcal{L}(U;V_0)} \le 1} \Big\|T\big[X_1, \ldots, X_k\big]\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)}.$$

Через $\mathcal{L}^k_\sigma\Big(\mathcal{L}(U; V_0);\ \mathcal{L}(V_0)\Big) \subset \mathcal{L}^k\Big(\mathcal{L}(U; V_0);\ \mathcal{L}(V_0)\Big)$ далі позначаємо підпростір симетричних k-лінійних операторів, тобто, таких операторів $T \in$

$\mathcal{L}^k\Big(\mathcal{L}(U;V_0);\ \mathcal{L}(V_0)\Big)$, значення яких $T\left[X_1,\ldots,X_k\right]$ не змінюються при будь-якій перестановці аргументів $X_1,\ldots,X_k$. Відзначимо, що за повнотою простору значень цих операторів $\mathcal{L}(V_0)$, простір k-лінійних обмежених операторів $\mathcal{L}^k\Big(\mathcal{L}(U;V_0);\ \mathcal{L}(V_0)\Big)$, а також його підпростір симетричних k-лінійних операторів $\mathcal{L}^k_\sigma\Big(\mathcal{L}(U;V_0);\ \mathcal{L}(V_0)\Big)$ є банаховими просторами відносно операторної норми $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^k\left(\mathcal{L}(U;V_0);\,\mathcal{L}(V_0)\right)}$. Як відомо [145], правильним є наступний ізометричний ізоморфізм банахових просторів

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^k\Big(\mathcal{L}(U;V_0);\ \mathcal{L}(V_0)\Big)\simeq\\&\mathcal{L}\Big(\mathcal{L}(U;V_0);\ \mathcal{L}\Big(\mathcal{L}(U;V_0);\ldots;\mathcal{L}\Big(\mathcal{L}(U;V_0);\mathcal{L}(V_0)\Big)\Big)\Big).\end{aligned}$$

Означення 3.2. Похідною функції $\varphi(A)\in H\big(\mathcal{A}\big)$ на проміжному просторі U банахової пари V називатимемо функцію

$$\varphi':\ \mathcal{A}\ni A\longrightarrow\varphi'(A)\in\mathcal{L}\Big(\mathcal{L}(U;V_0);\ \mathcal{L}(V_0)\Big),\tag{3.20}$$

визначену для кожного оператора $A\in\mathcal{A}$ і таку, що

$$\lim_{\|X_1\|_{\mathcal{L}(U;V_0)}\to 0}\Big\|\varphi(A+X_1)-\varphi(A)-\varphi'(A)\big[X_1\big]\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)}=0.$$

Відзначимо, що хоч похідна визначається в кожній точці $A\in\mathcal{A}$ локально, тобто, як границя при $\|X_1\|_{\mathcal{L}(U;V_0)}\to 0$ для достатньо малих за нормою елементів $X_1\in\mathcal{L}(U,V_0)$, значення похідної $\varphi'(A)$ в кожній точці $A\in\mathcal{A}$ є лінійним обмеженим оператором

$$\varphi'(A):\ \mathcal{L}(U;V_0)\ni X_1\longmapsto\varphi'(A)\big[X_1\big]\in\mathcal{L}(V_0)$$

і як елемент простору $\mathcal{L}\Big(\mathcal{L}(U;V_0);\ \mathcal{L}(V_0)\Big)$, згідно з поданим означенням 3.2, є вже визначеним на всіх елементах $X_1\in\mathcal{L}(U,V_0)$. Оскільки область визначення функцій операторного аргументу $\varphi(A)\in H\big(\mathcal{A}\big)$ є множиною відкритою в просторі $\mathcal{L}(V_1;V_0)$, то у випадку, коли для проміжного простору виконується рівність $U=V_1$, означення 3.2 є звичайним означенням похідної [147]. І тоді його можна також трактувати як некомутативний аналог похідної в сенсі Лорха над операторними алгебрами.

Оскільки похідна $\varphi'(A)$, згідно з означенням, визначена всюди на множині $\mathcal{A}$, то для кожного оператора $A \in \mathcal{A}$ для всіх достатньо малих за нормою операторів $X_2 \in \mathcal{L}(U, V_0)$ сума $A + X_2\big|_{V_1}$ залишається елементом $\mathcal{A}$ і тому буде визначеною функція

$$\varphi'(A + X_2) - \varphi'(A) \in \mathcal{L}\Big(\mathcal{L}(U; V_0);\, \mathcal{L}(V_0)\Big).$$

та породжені нею лінійні обмежені оператори

$$\varphi'(A + X_2) - \varphi'(A) : \mathcal{L}(U; V_0) \ni X_1 \longmapsto \Big(\varphi'(A + X_2) - \varphi'(A)\Big)\big[X_1\big] \in \mathcal{L}(V_0).$$

Так можна визначити другу похідну як функцію

$$\varphi'' : \mathcal{A} \in A \longmapsto \varphi''(A) \in \mathcal{L}^2\Big(\mathcal{L}(U; V_0);\, \mathcal{L}(V_0)\Big),$$

значення якої $\varphi''(A)$ на кожному елементі $A \in \mathcal{A}$ є білінійними обмеженими операторами, що задовольняють умову

$$\lim_{\|X_2\|_{\mathcal{L}(U;V_0)} \to 0} \left\| \Big(\varphi'(A + X_2) - \varphi'(A)\Big)\big[X_1\big] - \varphi''(A)\big[X_1, X_2\big] \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} = 0.$$

Вищі похідні цілого порядку визначаються за індукцією.

Означення 3.3. Похідною порядку $k \in \mathbb{N}$ функції φ називаємо функцію

$$\varphi^{(k)} : \mathcal{A} \in A \longmapsto \varphi^{(k)}(A) \in \mathcal{L}^k\Big(\mathcal{L}(U; V_0);\, \mathcal{L}(V_0)\Big) \tag{3.21}$$

таку, що

$$\lim_{\|X_k\|_{\mathcal{L}(U;V_0)} \to 0} \Bigg\| \Big(\varphi^{(k-1)}(A + X_k) - \varphi^{(k-1)}(A)\Big)\big[X_1, \ldots, X_{k-1}\big] - \varphi^{(k)}(A)\big[X_1, \ldots, X_{k-1}, X_k\big] \Bigg\|_{\mathcal{L}(V_0)} = 0.$$

Лема 3.3. *[81] Нехай $\varphi(\lambda) \in \mathcal{H}\big(\Lambda^c\big)$, U — правильний проміжний простір банахової пари V, а $E_{1U} : V_1 \longmapsto U$ — відповідний оператор вкладення.*

(a) *Для будь-якого числа $k \in \mathbb{N}$ похідна $\varphi^{(k)}(A)$ в сенсі означеннь 3.2, 3.3 існує, і для кожного оператора $A \in \mathcal{A}$ та довільного набору операторів $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{L}(U; V_0)$ існує контур $\Gamma_{a,\omega} \subset \varrho(A)$ такий, що правильна*

формула

$$\varphi^{(k)}(A)\big[X_1\,,\dots X_k\big] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \varphi(\lambda)R(\lambda,A)\times \tag{3.22}$$

$$\times\sum_{\sigma}\Big[X_{\sigma_1}E_{1U}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\Big]\dots\Big[X_{\sigma_k}E_{1U}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\Big]\,d\lambda,$$

де сумування під інтегралом здійснюється за групою підстановок вигляду $\begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ \sigma_1 & \dots & \sigma_k \end{pmatrix}$. *При цьому, формула не залежить від вибору в контурі* $\Gamma_{a,\omega}$ *числа* $a\,:\,0<a<-r(A)$ *та кута* $\omega\,:\,\omega_0-c\le\omega\le\omega_0$, *для яких* $\Gamma_{a,\omega}\subset\varrho\,(A)$.

Похідна $\varphi^{(k)}(A)$ *належить підпростору симетричних* k*-лінійних обмежених операторів* $\mathcal{L}^k_\sigma\Big(\mathcal{L}(U;V_0);\mathcal{L}(V_0)\Big)$ *і її норма має оцінку*

$$\big\|\varphi^{(k)}(A)\big\|_{\mathcal{L}^k\left(\mathcal{L}(U;V_0);\,\mathcal{L}(V_0)\right)} \le C_a\,\|\varphi\|_a\,K_a^k\,k!\,, \tag{3.23}$$

де норма функції $\|\varphi\|_a$ *має вигляд (2.3) і взято*

$$K_a := \sup_{\lambda\in\Lambda_a}\big\|E_{1U}(\lambda E_{10}-A)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0,U)},\quad C_a := \sup_{\lambda\in\Lambda_a}\big\|\lambda R(\lambda,A)\big\|_{\mathcal{L}(V_0)}.$$

(b) *Існує число* $\delta>0$ *таке, що для всіх операторів* $X\in\mathcal{L}(U;V_0)$: $\big\|X\big\|_{\mathcal{L}(U;V_0)}\le\delta$, *маємо* $A+X\in\mathcal{A}$ *і функція операторного аргументу* $\varphi(A+X)$ *розкладається в абсолютно та рівномірно (за* X *) збіжний ряд*

$$\varphi(A+X)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(A)}{k!}\big[\underbrace{X,\dots,X}_{k}\big]. \tag{3.24}$$

Наслідок 3.2. Сформульовану в лемі 3.3(b) властивість про розклад в абсолютно та рівномірно збіжний ряд за однорідними поліномами цілих степенів від операторів $X\in\mathcal{L}(U;V_0)$, визначених на проміжних просторах U заданої банахової пари $\Big\{V_0;V_1\Big\}$, можна трактувати як певний тип аналітичності функцій на класі секторіальних операторів $\mathcal{A}\ni A\longmapsto\varphi(A)\in\mathcal{L}(V_0)$ в напрямках операторів X. Такий тип аналітичності є розширенням аналітичності в сенсі Фреше, яка отримується при $U=V_1$, і яку описано, наприклад, у [147].

Слідуючи [145], позначимо через $\mathcal{C}^1\Big(\mathcal{A};\, \mathcal{L}(V_0)\Big)$ множину всіх таких функцій $\varphi(A) \in H\big(\mathcal{A}\big)$, для яких похідна φ' існує і здійснює неперервне відображенням вигляду (3.20), або іншими словами, множину всіх один раз неперервно-диференційовних функцій $\varphi(A)$. Далі за індукцією, позначаємо через

$$\mathcal{C}^k\Big(\mathcal{A};\, \mathcal{L}(V_0)\Big) := \Big\{\varphi \in \mathcal{C}^1\Big(\mathcal{A};\, \mathcal{L}(V_0)\Big) \,:\, \varphi' \in \mathcal{C}^{k-1}\Big(\mathcal{A};\, \mathcal{L}(V_0)\Big)\Big\}$$

множину всіх k раз неперервно-диференційовних функцій $\varphi(A)$.

Наслідок 3.3. З леми 3.3 зокрема випливає, що

$$\varphi(A) \in \mathcal{C}^\infty\Big(\mathcal{A};\, \mathcal{L}(V_0)\Big) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k\Big(\mathcal{A};\, \mathcal{L}(V_0)\Big), \quad \forall\, \varphi(A) \in H(\mathcal{A}).$$

Нехай далі в цьому підрозділі U — правильний проміжний простір банахової пари $\Big\{V_0; V_1\Big\}$. Тоді ми знаходимося в умовах леми 3.3, згідно з якою для довільної функції $\varphi(A) \in H(\mathcal{A})$ в кожній точці її області визначення $A \in \mathcal{A}$ існують похідні всіх цілих порядків $\varphi^{(k)}(A) \in \mathcal{L}^k_\sigma\Big(\mathcal{L}(U; V_0); \mathcal{L}(V_0)\Big)$ в напрямках операторів $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$. Спираючись на цей факт, для кожного оператора $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$ можемо визначити відповідний йому оператор диференціювання.

Означення 3.4. Диференціюванням в напрямку заданного оператора $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$ називаємо визначений на алгебрі $H(\mathcal{A})$ лінійний оператор

$$D_X \,:\, H(\mathcal{A}) \ni \varphi(A) \longmapsto \varphi'(A)\big[X\big] \in \mathcal{L}(V_0), \qquad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Цілі степені диференціювання в напрямку $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$ також визначаємо на алгебрі $H(\mathcal{A})$, як лінійні оператори

$$D^k_X \,:\, H(\mathcal{A}) \ni \varphi(A) \longmapsto \varphi^{(k)}(A)\big[\underbrace{X, \ldots, X}_{k}\big] \in \mathcal{L}(V_0), \quad \forall\, A \in \mathcal{A}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лінійність операторів диференціювання D^k_X є безпосереднім наслідком способу їх визначення. Однак виявляється, що ці оператори володіють додатковою властивістю інваріантності відносно операції множення в алгебрі $H(\mathcal{A})$. Це, зокрема, буде доведено у наступному твердженні.

Спираючись на властивість неперервності гомоморфізму з алгебри аналітичних функцій $\mathcal{H}(\Lambda^c)$ на алгебру операторних функцій $H(\mathcal{A})$ із леми 2.3, введемо секвенціальну збіжність в алгебрі $H(\mathcal{A})$ так, щоб вона наслідувала збіжність, породжену заданною топологією в алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda^c)$. А саме, кажемо, що послідовність $\varphi_n(A) \in H(\mathcal{A})$ збігається в алгебрі $H(\mathcal{A})$ до функції $\varphi(A) \in H(\mathcal{A})$ і пишемо $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(A) \overset{H(\mathcal{A})}{=} \varphi(A)$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(A) \overset{\mathcal{L}(V_0)}{=} \varphi(A)$ для кожного оператора $A \in \mathcal{A}$ за нормою операторної алгебри $\mathcal{L}(V_0)$ Іншими словами, це є "поточкова" збіжність операторних функцій в їх області визначення.

Лема 3.4. *Нехай U — правильний проміжний простір банахової пари V та $\varphi(A) \in H(\mathcal{A})$.*

(a) *Для довільних операторів $A \in \mathcal{A}$ та $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$ існує число $\delta_{A,X} > 0$ (залежне від A та X) таке, що за нормою $\mathcal{L}(V_0)$*

$$\varphi(A + tX) \overset{\mathcal{L}(V_0)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{tX}^k}{k!}\, \varphi(A), \qquad \forall\, t \le \delta_{A,X}\,, \tag{3.25}$$

причому, збіжність ряду абсолютна та рівномірна за числами $t:\ 0 \le t \le \delta_{A,X}$. Визначена рядом (3.25) над алгеброю $H(\mathcal{A})$ експонента

$$e^{D_{tX}}:\ \big[0, \delta_{A,X}\big] \ni t \longmapsto e^{D_{tX}}\, \varphi(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{tX}^k}{k!}\, \varphi(A)$$

володіє півгруповою властивістю

$$e^{D_{(t+s)X}} = e^{D_{tX}}\, e^{D_{sX}}, \qquad \forall\, t, s, t+s \in \big[0, \delta_{A,X}\big].$$

(b) *Якщо виконується умова комутації $X\big|_{V_1} A = A\, X\big|_{V_1}$, то експонента $e^{D_{tX}}$ є автоморфізмом алгебри $H(\mathcal{A})$, тобто*

$$e^{D_{tX}} \Big[\varphi(A) \cdot \psi(A)\Big] = \Big[e^{D_{tX}}\, \varphi(A)\Big] \cdot \Big[e^{D_{tX}} \psi(A)\Big], \quad \forall\, \varphi,\, \psi \in H(\mathcal{A}). \tag{3.26}$$

Доведення. Потрібна збіжність ряду (3.25) безпосередньо випливає з леми 3.3(b), якщо взяти $\delta_{A,X} = \frac{\delta}{\|X\|_{\mathcal{L}(U;V_0)}} = \frac{\min\left\{\frac{1}{2K_a};\ \frac{1}{2\delta_a}\right\}}{\|X\|_{\mathcal{L}(U;V_0)}}$. Ця збіжність є абсолютна

за нормою операторної алгебри $\mathcal{L}(V_0)$ та рівномірною за всіма числами t : $0 \le t \le \delta_{A,X}$. За лемою 2.2 $A + tX$, $A + (t+s)X \in \mathcal{A}$ для всіх $t, s, t+s \in \big[0, \delta_{A,X}\big]$. А тому

$$e^{D_{(t+s)X}}\,\varphi(A) = e^{D_{sX}}\,\varphi(A+tX) = e^{D_{sX}}\,e^{D_{tX}}\varphi(A), \qquad \forall\,\varphi(A) \in H(\mathcal{A}).$$

Твердження (a) доведено.

Співвідношення (3.26) є наслідком згаданої абсолютної збіжності рядів та тотожності Лейбніца

$$D^k_{tX}\,(\varphi\cdot\psi) = \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!(k-m)!}\,D^m_{tX}\,\varphi\cdot D^{k-m}_{tX}\,\psi\,. \tag{3.27}$$

Доведемо спочатку формулу (3.27). Згідно з лемою 3.3(a) для випадку $k=1$, маємо

$$D_{tX}\big(\varphi\cdot\psi\big)(A) = t\,\big(\varphi\cdot\psi\big)'(A)\big[X\big] =$$
$$\frac{t}{2\pi i}\int_{\Gamma_{a,\omega}} \varphi(\lambda)\,\psi(\lambda)\,R(\lambda,A)\,X\,E_{1U}\,\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\,d\lambda.$$

Застосовуючи лему 2.3 та ще раз лему 3.3(a), отримуємо

$$\varphi(A)\cdot D_{tX}\psi(A) + D_{tX}\varphi(A)\cdot\psi(A) =$$

$$\tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \varphi(\lambda)R(\lambda,A)\,d\lambda\cdot\tfrac{t}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}} \psi(\mu)R(\mu,A)\,X\,E_{1U}\,\big(\mu E_{10}-A\big)^{-1}\,d\mu +$$

$$\tfrac{t}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \varphi(\lambda)R(\lambda,A)\,X\,E_{1U}\,\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\,d\lambda\cdot\tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}} \psi(\mu)R(\mu,A)\,d\mu =$$

$$\frac{t}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}}\int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}} \varphi(\lambda)\psi(\mu)R(\lambda,A)R(\mu,A)\,X\,E_{1U}\,\big(\mu E_{10}-A\big)^{-1}\,d\lambda\,d\mu +$$
$$\frac{t}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}}\int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}} \varphi(\lambda)\psi(\mu)R(\mu,A)R(\lambda,A)\,X\;E_{1U}\,\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\,d\lambda\,d\mu\,.$$

де кожне з інтегральних зображень згідно зі згаданними лемами, не залежить від вибору параметрів контурів $\Gamma_{a,\omega}$ та $\Gamma_{a',\omega'}$. Враховуючи резольвентну тотожність

$$R(\lambda,A)R(\mu,A) = \frac{R(\lambda,A)-R(\mu,A)}{\mu-\lambda}, \qquad \forall\,\lambda\neq\mu\in\varrho\,(A),$$

підінтегральний вираз подамо у вигляді

$$\varphi(\lambda)\,\psi(\mu)\,R(\lambda,A)\,R(\mu,A)\,X\,E_{1U}\left(\mu E_{10}-A\right)^{-1}+$$
$$+\varphi(\lambda)\,\psi(\mu)\,R(\mu,A)\,R(\lambda,A)\,X\;E_{1U}\left(\lambda E_{10}-A\right)^{-1}=$$

$$\frac{\varphi(\lambda)\psi(\mu)}{\mu-\lambda}R(\lambda,A)\,X\,E_{1U}\left(\mu E_{10}-A\right)^{-1}-$$
$$\frac{\varphi(\lambda)\psi(\mu)}{\mu-\lambda}R(\mu,A)\,X\,E_{1U}\left(\mu E_{10}-A\right)^{-1}+$$

$$\frac{\varphi(\lambda)\psi(\mu)}{\mu-\lambda}R(\lambda,A)\,X\,E_{1U}\left(\lambda E_{10}-A\right)^{-1}-$$
$$\frac{\varphi(\lambda)\psi(\mu)}{\mu-\lambda}R(\mu,A)\,X\,E_{1U}\left(\lambda E_{10}-A\right)^{-1}.$$

За умовою комутації

$$E_{10}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\,X\,E_{1U}\left(\mu E_{10}-A\right)^{-1}=E_{10}\big(\mu E_{10}-A\big)^{-1}\,X\,E_{1U}\left(\lambda E_{10}-A\right)^{-1},$$

а тому підінтегральний вираз перетворюється до вигляду

$$\frac{\varphi(\lambda)\psi(\mu)}{\mu-\lambda}R(\lambda,A)\,X\,E_{1U}\left(\lambda E_{10}-A\right)^{-1}-$$
$$\frac{\varphi(\lambda)\psi(\mu)}{\mu-\lambda}R(\mu,A)\,X\,E_{1U}\left(\mu E_{10}-A\right)^{-1}.$$

В інтегральній формулі для операторів $\psi(A)$ та $\psi'(A)$, де інтегрування ведеться за змінною μ, контур $\Gamma_{a,\omega}$ замінимо на довільний контур $\Gamma_{a',\omega'}\subset\varrho\,(A)$ такий, що $0<a'<a<-r(A)$ та $\omega_0-c\le\omega\le\omega_0$. Тоді

$$\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}}\int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}}\frac{\varphi(\lambda)\psi(\mu)}{\mu-\lambda}R(\mu,A)\,X\,E_{1U}\left(\mu E_{10}-A\right)^{-1}d\lambda\,d\mu=$$
$$\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}}\frac{\varphi(\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\lambda\int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}}\psi(\mu)R(\mu,A)\,X\,E_{1U}\left(\mu E_{10}-A\right)^{-1}d\mu=0,$$

бо підінтегральна функція $\frac{\varphi(\lambda)}{\mu-\lambda}$ всередині контуру $\Gamma_{a,\omega}$ не має особливостей ($\mu\in\Gamma_{a',\omega'}$ лежить поза цим контуром), тому за теоремою Коші є нулем.

Застосовуючи класичну формулу Коші до функції ψ, отримуємо

$$\varphi(A)\cdot D_{tX}\psi(A)+D_{tX}\varphi(A)\cdot\psi(A)= \tag{3.28}$$
$$\frac{t}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}}\frac{\psi(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu\right]\varphi(\lambda)\,R(\lambda,A)\,X\,E_{1U}\,\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\,d\lambda=$$
$$\frac{t}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}}\psi(\mu)\,\varphi(\lambda)\,R(\lambda,A)\,X\,E_{1U}\,\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\,d\lambda=D_{tX}\big(\varphi\cdot\psi\big)(A).$$

Для довільних чисел k формула Лейбніца встановлюється за індукцією, користаючи із співвідношення (3.28), аналогічно до скалярного випадку.

Використовуючи абсолютну збіжність рядів і тотожність (3.27), одержуємо

$$e^{D_{tX}}\Big[\varphi(A)\cdot\psi(A)\Big]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Bigg(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,D_{tX}^{n-k}\varphi(A)\,D_{tX}^{k}\psi(A)\Bigg)=$$
$$\Bigg(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D_{tX}^{l}\varphi(A)}{l!}\Bigg)\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{D_{tX}^{m}\psi(A)}{m!}\Bigg)=\Big[e^{D_{tX}}\,\varphi(A)\Big]\cdot\Big[e^{D_{tX}}\,\psi(A)\Big].$$

3.2.2 Розв'язність збуреної задачі Коші та оцінки наближень

Вивчаємо розв'язність задачі

$$D^{\beta}u(t)=(A+X)u(t)+(f_{1-\beta}*f)(t),\quad t\in[0,T],\quad u(0)=g, \tag{3.29}$$

де $X\in\mathcal{L}(U,V_0)$ – збурюючий оператор для оператора A, U – правильний проміжний простір банахової пари $\{V_0,V_1\}$, зокрема, $U=V_\theta$, $\theta\in(0,1)$. Будуємо наближення розв'язку задачі Коші, збуреної на комплексних інтерполяційних шкалах.

Побудоване функціональне числення секторіальних операторів від'ємного типу та встановлена аналітична залежність розв'язку від збурюючого оператора дає можливість побудувати інші його наближення, ніж, наприклад, у [172], з точнішими оцінками збіжності: одержуємо наближення розв'язку збуреної задачі скінченними ітераціями резольвенти незбуреного оператора, при цьому без обмеження на норму збурюючого оператора, якщо $U=D(X)$ є проміжним простором з показником $\theta\in(0,1)$ для пари $\{V_0,V_1\}$.

Одержані у цьому підрозділі результати поширюють результати автора [73] для диференціального оператора на загальний випадок секторіального оператора від'ємного типу та на рівняння з дробовою похідною.

Нехай U - правильний проміжний простір банахової пари $\{V_0, V_1\}$. При $A \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{L}(U, V_0)$, $f \in C([0,T], V_1)$, $g \in V_0$ розглядаємо спочатку задачу Коші

$$\frac{du}{dt} = (A + X)u + f(t), \qquad u(0) = g. \tag{3.30}$$

Введемо позначення

$$G_{l-1} = \sum_{k=0}^{l-1} e^{tD_X^k} = \sum_{k=0}^{l-1} D_X^k e^{tA}[X, \ldots, X],$$

$$u_l(t) = G_{l-1}(t, X)g + \int_0^t G_{l-1}(t-\tau, X)f(\tau)d\tau. \tag{3.31}$$

Теорема 3.2. *Нехай U - правильний проміжний простір банахової пари $\{V_0, V_1\}$, $A \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{L}(U, V_0)$, $||X||_{\mathcal{L}(U,V_0)} \leq \frac{\delta}{K(A)}$, $f \in C([0,T], V_1)$, $g \in V_0$, $\delta \in (0,1)$. Тоді існує єдиний розв'язок $u \in C((0,T], V_1) \cap C^1((0,T), V_0)$ задачі (3.30),*

$$u(t) = e^{t(A+XE_{1U})}g + \int_0^t e^{(t-\tau)(A+XE_{1U})}f(\tau)d\tau \tag{3.32}$$

та правильна оцінка

$$\sup_{t\in[0,T]} ||u(t) - u_l(t)||_{V_0} \leq \frac{C_0(A)C_\Gamma\delta^l}{1-\delta}\Big[||g||_{V_0} + \int_0^T ||f(t)||_{V_0}dt\Big], \tag{3.33}$$

де $\quad C_0(A) = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda_{T^{-1}}} ||\lambda E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1}||_{L(V_0)}, \quad C_\Gamma = \frac{1}{\pi}[\int\limits_{-\cos\omega}^{\infty} \frac{e^{-s}}{s}ds + \pi - \omega]$.

Доведення. Існування єдиного розв'язку (3.32) задачі (3.30) випливає з теореми 2.1 та наслідку 3.1. Використаємо зображення півгрупи $\Phi_{A+XE_{1U}}(t) = e^{t(A+XE_{1U})}$ за допомогою контурного інтегралу

$$e^{t(A+XE_{1U})} = \int_{\Gamma_{a,\omega}} e^{t\lambda}E_{10}(\lambda E_{10} - A - XE_{1U})^{-1}d\lambda,$$

де контур $\Gamma_{a,\omega} \in \varrho(A + XE_{1U})$. Застосовуючи до тотожності

$$(\lambda E_{10} - (A + XE_{1U}))^{-1} = \sum_{k=0}^{l-1} (\lambda E_{10} - A)^{-1}[XE_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1}]^k +$$

$$(\lambda E_{10} - (A + XE_{1U}))^{-1}[XE_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1}]^l \tag{3.34}$$

інтеграл $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{t\lambda} \dots d\lambda$, одержуємо

$$\|[e^{t(A+XE_{1U})} - G_{l-1}(t, X)]g\|_{V_0} = \tag{3.35}$$

$$= \Big\| [\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{e^{t\lambda}}{2\pi i} E_{10}[\lambda E_{10} - (A + XE_{1U})]^{-1}[XE_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1}]^l d\lambda] \quad g \Big\|_{V_0}.$$

За умови теореми матимемо

$$||XE_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(V_0)} \leq \delta. \tag{3.36}$$

Записуючи

$$[\lambda E_{10} - (A + XE_{1U})]^{-1} = (\lambda E_{10} - A)^{-1}[\lambda E_{00} - XE_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1}]^{-1},$$

одержимо

$$\|E_{10}[\lambda E_{10} - A - XE_{1U}]^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq$$

$$\|E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0)} \sum_{j=0}^{\infty} \|XE_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|^j_{\mathcal{L}(V_0)} \leq \frac{C_a}{|\lambda|} \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j,$$

де $C_a = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda_a} \|\lambda E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0)}$. Використовуючи незалежність контурного інтегралу від вибору числа a, вибираючи $a = t^{-1}$, оцінюємо праву частину (3.34) числом $\frac{C_0(A)C_\Gamma}{1-\delta}\delta^l\|g\|_{V_0}$. Ми використали тотожність

$$\|\lambda E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0)} = \|E_{00} + A(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0)},$$

звідки $C_{t^{-1}} = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda_{t^{-1}}} \|E_{00} + A(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq$

$$\leq \sup_{\lambda \in \Lambda_{T^{-1}}} \|E_{00} + A(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0)} = \sup_{\lambda \in \Lambda_{T^{-1}}} \|\lambda E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0)} = C_0(A).$$

Отже,

$$\|[e^{t(A+XE_{1U})} - G_{l-1}(t, X)]g\|_{V_0} \leq \frac{C_0(A)C_\Gamma\delta^l}{1-\delta}\|g\|_{V_0}. \tag{3.37}$$

З неперервності вкладення $V_1 \subset V_0$ випливає існування інтегралу $\int\limits_0^T \|f(t)\|_{V_0} dt$. Тому

$$\left\| \int_0^t [e^{(t-\tau)(A+XE_{1U})} - G_{l-1}(t-\tau, X)] f(\tau) d\tau \right\|_{V_0}$$
$$\leq \frac{C_0(A) C_\Gamma \delta^l}{1-\delta} \int_0^T ||f(\tau)||_{V_0} d\tau. \tag{3.38}$$

Ця теорема узагальнює відповідний результат автора про наближення розв'язку збуреної мішаної задачі для системи рівнянь параболічного типу з правими частинами із просторів Бєсова, одержаний за допомогою методу дійсної інтерполяції.

Наступна ж теорема уточнює щойно доведену на випадок збурюючого оператора, заданого на комплексних інтерполяційних шкалах. У цьому випадку одержуємо наближення розв'язку задачі та оцінку похибки без додаткового припущення на норму збурюючого оператора.

Теорема 3.3. *Нехай J – довільний оператор класу $\mathcal{A}$, $0 \leq \eta < \theta \leq 1$, $V_\theta = D((-J)^\theta)$ – область визначення оператора $(-J)^\theta$, $D(X) = V_\theta$, $f \in C([0,T], V_\theta)$, $g \in V_\theta$. Тоді існує єдиний розв'язок $u \in C((0,T], V_{1+\eta}) \cap C^1((0,T), V_\eta)$ задачі (3.30) і така додатна стала $C = C(A, X)$, що*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - u_l(t)\|_{V_0} \leq \frac{C}{2^{l-1}} \Big[\|g\|_{V_0} + \int_0^T \|f(t)\|_{V_0} dt \Big], \tag{3.39}$$

$$\lim_{l\to\infty} \|u - u_l\|_{C^{1,\eta}} =$$
$$= \lim_{l\to\infty} \max \left\{ \max_{t\in[0,T]} \|u(t) - u_l(t)\|_{V_{1+\eta}}, \sup_{t\in(0,T]} \|u'(t) - u_l'(t)\|_{V_\eta} \right\} = 0.$$

Доведення. За умов теореми за наслідком 3.1 та теоремою 2.2 існує єдиний розв'язок $u \in C((0,T], V_{1+\eta}) \cap C^1((0,T), V_\eta) \subset C((0,T], V_1) \cap C^1((0,T), V_0)$ задачі (3.30), простори V_θ є правильними проміжними просторами банахової пари $\{V_0, V_1\}$ і для довільного $X \in \mathcal{L}(V_\theta, V_0)$ маємо $A + XE_{1V_\theta}|_{V_1} \in \mathcal{A}$. Тому використаємо одержані при доведенні теореми 3.2 оцінки (3.37) та (3.38), вважаючи спочатку $f \in C([0,T], V_1)$, $g \in V_0$. Залишилось позбутись обмеження (3.36) на норму оператора X.

У випадку $D(X) = V_\theta$ маємо

$$\|XE_{1\theta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \|X\|_{\mathcal{L}(V_\theta,V_1)}\|(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0,V_\theta)} \le$$

$$\le \frac{C'}{|\lambda|^{1-\theta}}\|X\|_{\mathcal{L}(V_\theta,V_1)} \le \frac{C'\|X\|_{\mathcal{L}(V_\theta,V_1)}}{a^{1-\theta}} \quad \forall a > 0.$$

Вибираючи $a^{1-\theta} = 2C'\|X\|_{\mathcal{L}(V_\theta,V_1)}$, одержуємо

$$\|XE_{1\theta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{1}{2} \quad \forall X \in \mathcal{L}(V_\theta, V_0).$$

Позначаючи $C(A, X) = C_a C_\Gamma$ при вибраному a, одержуємо оцінку (3.39) у випадку $f \in C([0,T], V_1)$, $g \in V_0$.

При доведенні теореми 3.1 (та наслідку 3.1 [57]) було показано, що при $f \in C([0,T], V_\theta)$, $g \in V_\theta$, $\varepsilon > 0$ маємо $f^\varepsilon = e^{\varepsilon A} f \in C([0,T], V_1)$, $g^\varepsilon = e^{\varepsilon A} g \in V_{1+\theta} \subset V_0$, визначена за ними формулою (3.32) функція $u^\varepsilon \in C((0,T], V_{1+\eta}) \cap C^1((0,T), V_\eta)$ та $f^\varepsilon(t) \to f(t)$ у просторі $V_\theta \subset V_0$ рівномірно за $t \in [0,T]$, $g^\varepsilon \to g$ у просторі V_θ, $u^\varepsilon(t) \to u(t)$ у просторі $V_{1+\eta} \subset V_0$ рівномірно за $t \in [0,T]$. Отож, записуючи нерівність (3.39) із $f^\varepsilon, g^\varepsilon, u^\varepsilon$ замість f, g, u, відповідно, та переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$, одержуємо оцінку (3.39) за припущень теореми, а враховуючи доведення теореми 3.1 при $\beta = 1$, одержуємо, що $\lim\limits_{l\to\infty} \|u - u_l\|_{C^{1,\eta}} = 0$.

Тепер при $A \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{L}(U, V_0)$, $f \in C([0,T], V_1)$, $g \in V_0$ розглядаємо задачу Коші (3.29).

Введемо позначення

$$G_{\beta,l-1} = \int_0^\infty \frac{t}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\frac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}}) G_{l-1}(s, X) ds$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} S_{\beta,A}(tD_X^k) = \sum_{k=0}^{l-1} \int_0^\infty \frac{t}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\frac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}}) D_X^k e^{sA}[X, \dots, X],$$

$$u_l(t) = G_{\beta,l-1}(t, X)g + \int_0^t G_{\beta,l-1}(t-\tau, X) f(\tau) d\tau. \tag{3.40}$$

Теорема 3.4. *Нехай U - правильний проміжний простір банахової пари $\{V_0, V_1\}$, $A \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{L}(U, V_0)$, $\|X\|_{\mathcal{L}(U,V_0)} \le \frac{\delta}{K(A)}$, $f \in C([0,T], V_1)$, $g \in$*

V_0, $\delta \in (0,1)$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $u \in C^{\beta,0}$ *задачі (3.29), заданий формулою*

$$u(t) = \int_0^t S_{\beta,A+XE_{1U}}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau + S_{\beta,A+XE_{1U}}(t)g, \tag{3.41}$$

та правильна оцінка

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)-u_l(t)\|_{V_0} \le \frac{C_0(A)C_\Gamma\delta^l}{1-\delta}[\|g\|_{V_0} + \int_0^T \|f(t)\|_{V_0}dt], \tag{3.42}$$

де $\quad C_0(A) = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda_{T^{-1}}} \|\lambda E_{10}(\lambda E_{10}-A)^{-1}\|_{L(V_0)}, \quad C_\Gamma = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\cos\omega}^{\infty}\frac{e^{-s}}{s}ds + \pi - \omega\Big].$

Доведення. Існування єдиного розв'язку $u \in C^{\beta,0}$ задачі (3.29) і формула (3.41) випливає з теорем 3.1 та 2.1. Використовуючи формули розв'язків відповідно незбуреної та збуреної задач, матимемо

$$||u(t)-u_l(t)||_{V_0} =$$

$$= \Big\| \int_0^t \Big[S_{\beta,A+XE_{1U}}(t-\tau) - G_{\beta,l-1}(t-\tau,X)\Big]f(\tau)\,d\tau +$$

$$+\big[S_{\beta,A+XE_{1U}} - G_{\beta,l-1}(t,X)\big](t)g\Big\|_{V_0} \le$$

$$\le \Big\| \int_0^t \Big[\int_0^\infty \frac{t}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\frac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}})[e^{(s-\tau)(A+XE_{1U})} - G_{l-1}(s-\tau,X)\,ds]f(\tau)\,d\tau\Big]\Big\|_{V_0} +$$

$$+\left\| \int_0^\infty \frac{t}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\frac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}})[e^{s(A+XE_{1U})} - G_{l-1}(s,X)]g\,ds \right\|_{V_0}.$$

При доведенні теореми 3.1 було показано, що

$$\int_0^\infty \frac{t}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\frac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}})ds = \int_0^\infty g_\beta(z)\,dz = 1.$$

А тому,

$$\|u(t)-u_l(t)\|_{V_0} \le \Big[\int_0^T \|f(\tau)\|_{V_0}\,d\tau + \|g\|_{V_0}\Big] \max_{s\in[[0T]]} \|e^{s(A+XE_{1U})} - G_{l-1}(s,X)\|_{V_0}.$$

Звідси, враховуючи оцінку (3.37), одержуємо оцінку (3.42). Теорема доведена.

Теорема 3.5. *Нехай* J *– довільний оператор класу* $\mathcal{A}$, $0 \le \eta < \theta \le 1$, $V_\theta = D((-J)^\theta)$ *– область визначення оператора* $(-J)^\theta$, $D(X) = V_\theta$, $f \in C([0,T], V_\theta)$, $g \in V_\theta$, u *– розв'язок задачі (3.1) (класу* $C^{\beta,\eta}$*), функції* u_l, $l \in \mathbb{N}$ *визначені формулою (3.40). Тоді існує така додатна стала* $C_\beta = C_\beta(A, X)$, *що*

$$\|u - u_l\|_{C^{\beta,\eta}} = \max\Big\{ \max_{t\in[0,T]} \|u(t) - u_l(t)\|_{V_{1+\eta}}, \sup_{t\in(0,T]} \|D^\beta u(t) - D^\beta u_l(t)\|_{V_\eta} \Big\} \le$$

$$\le \frac{C_\beta}{2^{l-1}} \Big[\|g\|_{V_\theta} + \int_0^T \|f(t)\|_{V_\theta} dt \Big], \quad l \in \mathbb{N}. \tag{3.43}$$

Доведення. Теорема є наслідком теорем 3.4, 3.3 та 3.1. Справді, за теоремою 3.4 правильна оцінка (3.33) при $f \in C([0,T], V_1)$, $g \in V_0$ та певних обмеженнях на збурюючий оператор X ($\|X\|_{\mathcal{L}(U,V_0)} \le \frac{\delta}{K(A)}$), і далі, щоб позбутись цих обмежень та поширити цей результат на випадок $f \in C([0,T], V_\theta)$, $g \in V_\theta$, досить повторити міркування з доведення теорем 3.3 та 3.1.

3.3 Параболічна крайова задача у просторах беселевих потенціалів

У даному підрозділі результати підрозділів 3.1 та 3.2 застосовуються до диференціального оператора A, заданного на дробових шкалах просторів беселевих потенціалів. А саме, розглянуто випадок, коли A є регулярним еліптичним диференціальним оператором у функційному просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) над обмеженою областю $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, який додатково задовольняє умови параболічності Агмона.

3.3.1 Розв'язність задачі

Розглянемо лінійну нормальну крайову задачу з дробовою похідною за часом

$$\begin{aligned} D_t^\beta u = L(x,D)u + f_{1-\beta}(t) * f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \\ B_j u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad j = 1,\dots,m, \qquad u(x,0) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.44}$$

в обмеженій області $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ класу C^∞ за припущень **(A)** та **(Ag)** (див. у підрозділі 1.2) та замкнений оператор

$$(Av)(x) = L(x, D)\, v(x),$$

заданий у просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ на щільному підпросторі $V_1 = H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$. Припустимо далі, що $0 < \vartheta \le 1$, $V_\theta = H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ з нормою простору беселевих потенціалів $H^{2m\vartheta}_p(\Omega)$ порядку $2m\vartheta$. Це щільний в $L_p(\Omega)$ підпростір, замкнений в $H^{2m\vartheta}_p(\Omega)$. Тепер

$$C^{\beta,\eta}\big(H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big) = \Big\{v \in C\Big(\Omega \times [0,T]; H^{2m+2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big) \colon D^\beta v \in C_b\Big(\Omega \times [0,T]; H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega))\Big)\Big\}.$$

Теорема 3.6. *Якщо* $0 \le \eta < \theta \le 1$, *виконуються припущення* **(A)**, **(Ag)**, *нерівності Сілі*

$$k_j < 2m\vartheta - \frac{1}{p}, \quad j = 1, \dots, m, \tag{3.45}$$

$g \in H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$, $f \in C\Big(\Omega \times [0,T]; H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$, *то існує єдиний розв'язок* $u \in C^{\beta,\eta}\big(H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big)$ *задачі* (3.44).

Доведення. Відомо (див. [140], теорема Сілі, с. 400), що якщо для нормальної системи $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ виконуються нерівності (3.45), то реалізується ізоморфізм банахових просторів

$$H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \simeq \big[L_p(\Omega), H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big]_\vartheta,$$

де справа проміжний простір з показником ϑ, породжений методом комплексної інтерполяції пари $V = \big\{L_p(\Omega),\, H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big\}$. При цьому $H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) = \mathcal{D}(J^\vartheta)$ — область визначення дробового степеня оператора

$$J = \big[E_{10} - (-\Delta)^{1/2}\big]^{2m} : \; H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega)$$

(див. [140, 2.5.3]). Це дозволяє до оператора A застосувати попередні результати про інтерполяцію дробовими степенями операторів.

Задачу (3.44) можна записати у вигляді задачі Коші для лінійного абстрактного рівняння

$$\begin{cases} D_t^\beta v(x,t) = A\,v(x,t) + f_{1-\beta}(t) * f(x,t), \\ v(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{3.46}$$

На підставі теореми Агмона ([272] і розділ 1) та припущень теореми оператор A секторіальний, а згідно з результатами розділу 2, існує таке $s \in \mathbb{R}$, що оператор $A_s = A + sE_{10}$ належить класу $\mathcal{A}$. Враховуючи формули

$$L\big[D^\beta v(t)\big] = \xi^\beta L\big[v\big] - \xi^{\beta-1}v(0), \;\; L\big[e^{-st}D^\beta(e^{st}v(t))\big] = (\xi+s)^\beta L\big[v\big] - \xi^{\beta-1}v(0),$$

де $L\big[v\big]$ – перетворення Лапласа функції v, за допомогою заміни $w = ve^{st}$ задача (3.46) зводиться до задачі такого ж вигляду щодо w з оператором A_s замість A та вільним членом $(f_{1-\beta} * f)(t)e^{-st}$ із такими ж властивостями, як $(f_{1-\beta} * f)(t)$. Далі достатньо застосувати теорему 3.1. $\square$

3.3.2 Лінійні збурення та наближення розв'язку

Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = (L(x,D) + L_1)u = f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \\ &B_j u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad j = 1,\ldots,m, \qquad u(x,0) = h(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.47}$$

де $L_1 : \; H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega)$ – заданий замкнений в $L_p(\Omega)$ лінійний оператор. Наприклад, $L_1 = (-\Delta)^{m\vartheta}$, де Δ – оператор Лапласа.

Теорема 3.7. *При* $f \in C\big([0,T]; H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big)$, $g \in H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$, *виконанні умов* (**A**), (**Ag**) *та нерівностей Сілі існує єдиний розв'язок*

$$u \in C\big([0,T]; H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big) \bigcap C^1\big((0,T]; L_p(\Omega)\big) := C^{1,0}$$

задачі (3.47) і така додатна стала C, *що*

$$\sup_{t\in[0,T]} \big\|u(t) - u_l(t)\big\|_{L_p(\Omega)} \le \frac{C}{2^{l-1}}\Big[\|g\|_{L_p(\Omega)} + \int_0^T \|f(t)\|_{L_p(\Omega)}dt\Big], \; l \in \mathbb{N}, \tag{3.48}$$

де

$$u_l(x,t) = \int_\Omega \sum_{k=0}^{l-1} \Gamma_k(x,y,t)g(y)dy + \int_0^t \int_\Omega \sum_{k=0}^{l-1} \Gamma_k(x,y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau,$$

$$l \in \mathbb{N}, \tag{3.49}$$

$\Gamma_0(x,y,t) = \Gamma(x,y,t)$ – *функція Гріна [36] параболічної незбуреної крайової задачі,*

$\Gamma_k(x,y,t) = \displaystyle\int_0^t \int_\Omega \Gamma_{k-1}(x,z,t-\tau)L_{1z}\Gamma(z,y,\tau)\,dz\,d\tau\,,\ k \in \mathbb{N}.$

Доведення. Введемо оператори A та X:

$$D(A) = H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\,, \qquad Au = Lu \ \text{ при } \ u \in H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\,;$$

$$D(X) = H^{2m\theta}_p(\Omega)\,, \qquad \theta \in (0,1)\,, \qquad Xu = L_1 u \qquad \text{при } \ u \in H^{2m\theta}_p(\Omega)\,.$$

Задача (3.47) тепер записується у вигляді задачі Коші для лінійного абстрактного параболічного рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = (A+X)\,v(x,t) \ + f(x,t), \\ v(x,0) = h(x). \end{cases} \tag{3.50}$$

З наслідку 3.1 та теореми 2.2 випливає існування єдиного розв'язку $v \in C^{1,0}$ задачі (3.50), а з теореми 3.3 – оцінка (3.48).

Використовуючи властивості оператора диференціювання, формулу розв'язку задачі Коші (3.50) можна подати у вигляді

$$v(t) = G(t,X)g + \int\limits_0^t G(t-\tau,X)f(\tau)d\tau, \tag{3.51}$$

де

$$G(t,X) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{t\lambda}E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}]^k d\lambda, \tag{3.52}$$

Γ – контур всередині резольвентної множини оператора A, ряд збіжний в $V_0 = L_p(\Omega)$.

Якщо $G_l(t,X)$ має вигляд (3.31), то використовуючи функцію Гріна задачі (3.47), існування та властивості якої встановлено в [36], можна показати, що функції u_l набудуть вигляду (3.49).

Справді, розв'язок задачі (3.47) при $f = 0$ має вигляд

$$u = e^{At}g = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda - s} e^{\lambda t} E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1} g\, d\lambda. \tag{3.53}$$

Зауважимо, що, згідно з [36], розв'язок відповідної (3.47) незбуреної параболічної крайової задачі

$$u(x,t) = \int_{\Omega} \Gamma(x,y,t) g(y)\, dy, \tag{3.54}$$

а також $E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1} h(x) = \int_{\Omega} \tilde{G}_{\lambda}(x,y) g(y)\, dy$, де $\tilde{G}_{\lambda}(x,y)$ – функція Гріна незбуреної еліптичної крайової задачі

$$\lambda u - Lu = 0, \quad x \in \Omega, \qquad B_j u\,|_S = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Відомо [36], що $\tilde{G}_{\lambda}(x,y) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} \Gamma(x,y,\tau)\, d\tau$. Отже,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda - s} e^{\lambda t} E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1} g\, d\lambda = \int_{\Omega} \Gamma(x,y,t) g(y)\, dy. \tag{3.55}$$

Виконуючи перетворення

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda - s} e^{\lambda t} E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1} g\, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda - s} e^{\lambda t} \int_{\Omega} \Big(\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} \Gamma(x,y,\tau)\, d\tau \Big) g(y)\, dy\, d\lambda \\
&= \int_{\Omega} \Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda - s} \Big(\int_0^{\infty} e^{\lambda(t-\tau)} \Gamma(x,y,\tau) d\tau \Big) d\lambda \Big] g(y)\, dy \\
&= \int_{\Omega} \Big[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda - s} \Big(\int_0^{t} e^{\lambda\tau} \Gamma(x,y,t-\tau) d\tau \Big) d\lambda \Big] g(y)\, dy,
\end{aligned}$$

та враховуючи (3.53), (3.55), для всіх $x, y \in \Omega$, $t \in [0,T]$, одержуємо

$$\Gamma(x,y,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda - s} \tilde{G}_{\lambda}(x,y)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda - s} \Big(\int_0^{t} e^{\lambda\tau} \Gamma(x,y,t-\tau)\, d\tau \Big)\, d\lambda. \tag{3.56}$$

Формула (3.55) набуває вигляду

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda - s} e^{\lambda t} E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1} g\, d\lambda = \int_{\Omega} \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda - s} e^{\lambda t} \tilde{G}_{\lambda}(x,y)\, d\lambda \Big) g(y)\, dy. \tag{3.57}$$

Розглянемо тепер і перетворимо, використовуючи формули (3.56), (3.55),

$$\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-s} e^{\lambda t}E_{10}(\lambda E_{10}-A)^{-1}XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}g\,d\lambda\Big]$$
$$=\int_\Omega\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-s} e^{\lambda t}\tilde G_\lambda(x,y)XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}g(y)d\lambda\Big]dy$$
$$=\int_\Omega\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-s}\Big(\int_0^t e^{\lambda\tau}\Gamma(x,z,t-\tau)d\tau\Big)XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}g(z)d\lambda\Big]dz$$
$$=\int_\Omega\Big[\int_0^t\Gamma(x,z,t-\tau)X_zE_{1\theta}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-s}e^{\lambda\tau}(\lambda E_{10}-A)^{-1}g(z)\Big)d\lambda)d\tau\Big]dz$$

$$=\int_\Omega\Big[\int_0^t d\tau\Gamma(x,z,t-\tau)L_{1z}\int_\Omega\Gamma(x,z,\tau)g(y)dy\Big]dz$$
$$=\int_\Omega\Big[\int_0^t d\tau\int_\Omega\Gamma(x,z,t-\tau)L_{1z}\Gamma(x,z,\tau)dz\Big]g(y)dy=\int_\Omega\Gamma_1(x,y,t)g(y)dy,$$

де $\Gamma_1(x,y,t)=\int_0^t\int_\Omega\Gamma(x,z,t-s)\Gamma(z,y,s)dzds$.

Припускаючи за індукцією, що

$$\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-s}e^{\lambda t}(\lambda E_{10}-A)^{-1}(XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1})^k g\,d\lambda\Big](x)=\int_\Omega\Gamma_k(x,y,t)g(y)dy,$$

знаходимо

$$\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-s}e^{\lambda t}(\lambda E_{10}-A)^{-1}(XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1})^{k+1}g\,d\lambda\Big](x)$$
$$=\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-s}e^{\lambda t}(\lambda E_{10}-A)^{-1}(XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A))^kXE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)g\,d\lambda\Big](x)$$
$$=\int_\Omega\Big[\int_0^t\Gamma_k(x,z,t-s)X_zE_{1\theta}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-s}e^{\lambda t}(\lambda E_{10}-A)^{-1}d\lambda\Big)ds)g\Big](z)dz$$
$$=\int_\Omega\Big[\int_0^t\Gamma_k(x,z,t-s)L_{1z}\Big(\int_\Omega\Gamma(z,y,s)g(y)dy\Big)ds\Big]dz$$
$$=\int_\Omega\Big[\int_0^t ds\int_\Omega\Gamma_k(x,z,t-s)L_{1z}\Gamma(z,y,s)dz\Big]g(y)dy=\int_\Omega\Gamma_{k+1}(x,y,t)g(y)dy.$$

Теорему доведено.

Теорема 3.7 поширюється на задачу

$$\begin{aligned}D_t^\beta u=(L(x,D)+L_1)u+f_{1-\beta}(t)*f(x,t),\quad x\in\Omega,\quad t\in(0,T],\\ B_ju|_{\partial\Omega}=0,\qquad j=1,\dots,m,\qquad u(x,0)=g(x),\quad x\in\partial\Omega,\end{aligned}\tag{3.58}$$

але формулу (3.49) треба замінити наступною

$$u_l(x,t) = \int_0^t \int_\Omega \sum_{k=0}^{l-1} G_{0,k}(x,y,t-\tau) f(y,\tau) dy d\tau$$

$$+ \int_\Omega \sum_{k=0}^{l-1} G_{1,k}(x,y,t) g(y) dy, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

де

$G_{0,k}(x,y,t) = \int_0^t \int_\Omega G_{0,k-1}(x,z,t-\tau) L_{1z} G_0(z,y,\tau)\, dz\, d\tau\,,$

$G_{1,k}(x,y,t) = \int_\Omega G_{1,k-1}(x,z,t) L_{1z} G_1(z,y,t)\, dz\, d\tau\,,\ k = 1, 2, \ldots,$ а

$(G_0(x,y,t), G_1(x,y,t))$ – вектор-функція Гріна [183] незбуреної крайової задачі для рівняння з дробовою похідною (за умов її існування).

Як при доведенні теорем 3.3 та 3.5 одержуємо також, що теорема 3.7 буде правильною при $f \in C\big([0,T]; H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big)$, $g \in H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$, $\theta \in (0,1)$ і також $u_l \to u$ $(l \to \infty)$ у просторі $C^{\beta,\eta}\big(H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big)$ для довільного $\eta \in (0,\theta)$.

Висновки до розділу 3

Знайдено умови класичної розв'язності задачі Коші для абстрактного лінійного рівняння з регуляризованою дробовою похідною порядку $\beta \in (0,1)$ з мінімальними припущеннями щодо правих частин при заданому операторі A, який не залежить від змінної t та є необмеженим замкненим секторіальним лінійним оператором від'ємного типу в деякому комплексному банаховому просторі V_0 із щільною областю визначення $\mathcal{D}(A) := V_1 \subset V_0$. Доведено, що якщо значення неоднорідної частини рівняння та початкові дані належать комплексній інтерполяційній шкалі, асоційованій з оператором рівняння, то існує єдиний класичний розв'язок задачі Коші. Цей факт є перенесенням відомого результату Да Прато і Грівара, встановленого для неперервних інтерполяційних шкал, на випадок комплексних інтерполяційних шкал та на випадок рівнянь із дробовою похідною за часом. Зауважимо, що при $\beta = 1$ таке рівняння є звичайним абстрактним параболічним лінійним рівнянням.

Результати поширено на випадок лінійних збурень на правильному проміжному просторі U пари $\{V_0, V_1\}$ та на комплексній інтерполяційній шкалі, асоційованій з оператором рівняння, в останньому випадку без обмеження на норму збурюючого оператора.

Частковий випадок задачі одержимо, коли A є регулярним еліптичним диференціальним оператором у функційному просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ над обмеженою областю $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ і задовольняє умови параболічності Агмона. У цьому випадку відповідна незбурена задача Коші буде крайовою задачею для неоднорідного диференціального параболічного рівняння з регуляризованою дробовою похідною за часом. Рівняння задачі зі збуреним оператором загалом може не бути диференціальним і за просторовими змінними.

Доведено теорему про максимальну регулярність розв'язків нормальних та з дробовою похідною за часом параболічних крайових задач з правими частинами зі значеннями в просторах беселевих потенціалів.

Знайдено точні оцінки наближень розв'язку збуреної на правильному про-

міжному просторі U пари $\{V_0, V_1\}$ задачі Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною скінченними ітераціями резольвенти незбуреного оператора, при цьому без обмеження на норму збурюючого оператора X, якщо $U = D(X)$ є проміжним простором з показником $\theta \in (0,1)$ для пари $\{V_0, V_1\}$.

Знайдено оцінки наближень розв'язків нормальних параболічних крайових задач із псевдо-диференціальними доданками та правими частинами зі значеннями в просторах беселевих потенціалів за допомогою ітерацій функції Гріна відповідної незбуреної крайової задачі.

Результати цього розділу опубліковано у статтях [57, 74, 82, 88] та тезах доповідей на конференціях [75–78, 92, 93, 95, 96, 104].

Розділ 4

Нелінійні операторні та півлінійні параболічні рівняння на комплексних інтерполяційних шкалах

Знайдено достатні умови класичної розв'язності нелінійних операторних інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна з ядрами на комплексних інтерполяційних шкалах, породжених секторіальними операторами. Результати застосовано до абстрактної задачі Коші для півлінійного рівняння з дробовою похідною та крайових задач для півлінійних диференціальних параболічних рівнянь із частинною чи дробовою похідною за часом.

4.1 Існування та регулярність розв'язків нелінійних операторних рівнянь

Зафіксуємо оператор $J \in \mathcal{A}$. Через $V_\vartheta := \mathcal{D}\left[(-J)^\vartheta\right]$, $\vartheta \in (0,1]$, позначаємо область визначення оберненого до $(-J)^{-\vartheta}$ оператора $(-J)^\vartheta$ із нормою графіка $\|x\|_{V_\vartheta} := \left\|(-J)^\vartheta x\right\|_0$. Тоді $V_\vartheta \simeq [V_0, V_1]_\vartheta$ — проміжний простір для інтерполяційної пари $\{V_0; V_1\}$, породжений методом комплексної інтерполяції. Зауважимо, що якщо $A \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{D}\left[(-A)^\vartheta\right] \simeq V_\vartheta$.

Нехай $\beta \in (0,1]$, $0 \le \eta < \vartheta \le 1$ (тоді $V_\vartheta \hookrightarrow V_\eta$), $g_\beta(t)$ – прообраз перетворення Лапласа для $\exp(-\lambda^\beta)$, $S_{\beta,A}(t) = \int\limits_0^\infty \frac{t}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\frac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}}) \Phi_A(s) ds$, $\Phi_A(s) = e^{sA}$.

На $C^{\beta,\eta}$ вивчимо нелінійне інтегро-диференціальне рівняння

$$v(t) = \int_0^t S_{\beta,A}(t-\tau) f(\tau, v(\tau), D^\beta v(\tau))\, d\tau + h(t). \tag{4.1}$$

Нехай $\tilde{V}_\eta := V_{1+\eta} \times V_\eta$, $\|(z,\xi)\|_{\tilde{V}_\eta} = \max\left\{\|z\|_{V_{1+\eta}}, \|\xi\|_{V_\eta}\right\}$,
$\tilde{V}_{\eta,C} = \left\{(z,\xi) \in \tilde{V}_\eta \colon \|(z,\xi)\|_{\tilde{V}_\eta} \le C\right\}$ – замкнена куля в $\tilde{V}_\eta$,
$W_{\beta,\eta,C} = \left\{z \in C^{\beta,\eta} : \|z\|_{\beta,\eta} \le C\right\}$.

Припущення (F1).

- $\beta \in (0,1]$, $0 \le \eta < \vartheta \le 1$;
- $f \in C_b\big((0,T] \times V_{1+\eta} \times V_\eta; V_\vartheta\big) : \sup\limits_{t\in(0,T]} \|f(t,z,\xi)\|_{V_\vartheta} < +\infty \ \ \forall (z,\xi) \in \tilde{V}_\eta$,
- $h(t)$ визначена на $[0,T]$, $h \in C^{\beta,\vartheta}$.

Припущення (F2): Існують такі додатні сталі K_1, M_1, K_2, M_2, q, r, що для довільних $(z,\xi), (z_1,\xi_1), (z_2,\xi_2) \in V_{1+\eta} \times V_\eta$ правильні нерівності:

$$\sup_{t\in(0,T]} \|f(t,z,\xi)\|_{V_\vartheta} \le K_1\|z\|^q_{V_{1+\eta}} + M_1\|\xi\|^r_{V_\eta}$$

$$\sup_{t\in(0,T]} \|f(t,z_1,\xi_1) - f(t,z_2,\xi_2)\|_{V_\vartheta} \le K_2\|z_1 - z_2\|^{q_0}_{V_{1+\eta}} + M_2\|\xi_1 - \xi_2\|^{r_0}_{V_\eta},$$

де $q_0 = \min\{q,1\}$, $r_0 = \min\{r,1\}$.

Зауважимо, що коли функція f не залежить від третього аргументу, $h(t) = S_{\beta,A}(t)h_0$, $h_0 \in V_\theta$, то до рівняння (4.1) зводиться задача Коші для півлінійного рівняння з дробовою похідною

$$D^\beta v(t) = Av(t) + f_{1-\beta}(t) * f(t,v(t)), \qquad v(0) = h_0,$$

а при $\beta = 1$ – задача Коші для відповідного півлінійного абстрактного параболічного рівняння.

Введемо інтегральний оператор

$$H : (Hv)(t) = \int_0^t S_{\beta,A}(t-\tau) f(\tau, v(\tau), D^\beta v(\tau))\, d\tau, \quad v \in C^{\beta,\eta}.$$

Лема 4.1. *За припущення* **(F1)** *інтегральний оператор*

$$H_1 : (H_1 v)(t) = (Hv)(t) + h(t), \quad v \in C^{\beta,\eta}$$

діє з $C^{\beta,\eta}$ *в* $C^{\beta,\eta}$ *та існують такі сталі* $K > 0$, $K_0 > 0$, *що виконується нерівність*

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|(H_1 v)(t)\big\|_{V_{1+\eta}} \le \tag{4.2}$$

$$\leq K \sup_{t\in(0,T]} \left\| f(t, v(t), D^\beta v(t)) \right\|_{V_\theta} + K_0 \max_{t\in[0,T]} ||h||_{V_\vartheta} \quad \forall v \in C^{\beta,\eta}.$$

Зауважимо, що вираз для сталої K (див. доведення леми 3.2) містить множник $\tilde{K}$, а останній – множник $T^{1-\beta}$.

Доведення. Оскільки за умовою леми $F(t) = f(t, v(t), D^\beta v(t)) \in V_\vartheta$ при $v \in C^{\beta,\eta}$, то твердження леми випливає з теореми 3.1 та примітки до неї.

Далі розглядаємо випадки: 1) $q, r \in (0,1)$ при $\beta \in (0,1]$; 2) $q \geq 1$, $r \geq 1$ при $\beta \in (0,1)$.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються припущення* **(F1), (F2)**. *Тоді існує розв'язок* $v \in C^{\beta,\eta}$ *рівняння* (4.1) *(у випадку 2* v *визначено на* $[0, T_0]$ *при деякому* $T_0 \in (0,T]$ *).*

Доведення. За лемою 4.1 інтегральний оператор H_1 діє з $C^{\beta,\eta}$ в $C^{\beta,\eta}$. Для доведення існування його нерухомої точки застосуємо принцип Шаудера у випадку 1 та принцип стисних відображень у випадку 2. Використовуємо виведену при доведенні теореми 3.1 тотожність

$$D^\beta(Hv)(t) = f_{1-\beta}(t) * f(t, v(t), D^\beta v(t)) + A(Hv)(t), \quad t \in (0,T] \tag{4.3}$$

та позначення

$$K_0 \max_{t\in[0,T]} \|h(t)\|_{V_{1+\theta}} = P\,, \; K_0 \sup_{t\in(0,T]} \|D^\beta h(t)\|_{V_\theta} = P_1\,, \; \max\{P, P_1\} = \hat{P}\,.$$

Із оцінки (4.2) для довільної $v \in W_{\beta,\eta,C}$ одержуємо

$$\begin{aligned}
\max_{t\in[0,T]} \left\|(H_1 v)(t)\right\|_{V_{1+\eta}} &\leq K \sup_{t\in(0,T]} \left\| f(t, v(t), D^\beta v(t)))\right\|_{V_\vartheta} + P \\
&\leq K \left[K_1 \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|^q_{V_{1+\eta}} + M_1 \sup_{t\in(0,T]} \|D^\beta v(t)\|^r_{V_\eta} \right] + P \\
&\leq K \left[K_1 \|v\|^q_{\beta,\eta} + M_1 \|v\|^r_{\beta,\eta} \right] + P,
\end{aligned}$$

звідки

$$\max_{t\in[0,T]} \left\|(H_1 v)(t)\right\|_{1+\eta} \leq K\left(K_1 C^q + M_1 C^r\right) + P. \tag{4.4}$$

Із (4.3), (4.4) та оцінки (4.2)

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in(0,T]}\left\|D^\beta(H_1v)(t)\right\|_{V_\eta} = \sup_{t\in(0,T]}\left\|D^\beta(Hv)(t)+D^\beta h(t)))\right\|_{V_\eta}\\
&\le \sup_{t\in(0,T]}\left\|\big(A(Hv)(t)\big)\right\|_{V_\eta} + \sup_{t\in(0,T]}\left\|f_{1-\beta}(t)*f(t,v(t),D^\beta v(t))\right\|_{V_\eta} + P_1\\
&\le C_2\max_{t\in[0,T]}\left\|(Hv)(t)\right\|_{V_{1+\eta}} + C_3\sup_{t\in(0,T]}\left\|f(t,v(t),D^\beta v(t))\right\|_{V_\vartheta} + P_1\\
&\le (C_2K+C_3)\sup_{t\in(0,T]}\left\|f(t,v(t),D^\beta v(t))\right\|_{V_\vartheta} + P_1\\
&\le (C_2K+C_3)\left[K_1\|v\|^q_{\beta,\eta} + M_1\|D^\beta v\|^r_{\beta,\eta}\right] + P_1\\
&\le (C_2K+C_3)\left[K_1C^q + M_1C^r\right] + P_1.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\|H_1v\|_{\beta,\eta} &\le \max\{K, C_2K+C_3\}\left[K_1C^q + M_1C^r\right] + \hat{P}\\
&= b_1C^q + b_2C^r + b_3 \quad \forall v\in W_{\beta,\eta,C},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

де $b_1 = \hat{K}K_1$, $b_2 = \hat{K}M_1$, $b_3 = \hat{P}$, $\hat{K} = \max\{K, C_2K+C_3\}$, стала C_2 характеризує ізоморфізм $D\big[(-A)^{1+\eta}\big] \simeq V_{1+\eta}$, стала C_3 є добутком $\frac{T^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$ на норму неперервного вкладення $V_\vartheta \subset V_\eta$.

За властивостями функції $h(C) = b_1C^q + b_2C^r + b_3$ при $q,r\in(0,1)$, довільних додатних сталих b_1, b_2, b_3 існує така додатна стала C_0, що при всіх $C > C_0$ виконується $b_1C^q + b_2C^r + b_3 < C$, а отже

$$\|H_1v\|_{\beta,\eta} < C \qquad \forall v\in W_{\beta,\eta,C} \tag{4.6}$$

і $H_1\colon W_{\beta,\eta,C} \longrightarrow W_{\beta,\eta,C}$. Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
&b_1C^q + b_2C + b_3 = (b_1+b_2)C + b_3 = b'C + b_3 \quad \text{при} \quad q=r=1,\\
&b_1C^q + b_2C + b_3 \le (b_1+b_2)C^q + b_3 \quad \text{при} \quad C\ge 1, \quad q\ge r\ge 1.
\end{aligned}$$

За властивостями функції $h_1(C) = b'C + b_3$ при довільній додатній сталій b_3 та $b' < 1$ існує така додатна стала C, що $h_1(C) < C$. Враховуючи, що b' пропорційна $\hat{K}$, умова $b' < 1$ виконується на $[0,T^*]$, де $T^*\in(0,T]$. Тоді матимемо (4.6). Далі, у випадку $q\ge r\ge 1$ будемо вибирати $T^*\in(0,T]$ так, щоб $b' < \frac{1}{q} < 1$.

Із нерівності

$$b'C^q + b_3 < \varepsilon C, \qquad C \geq 1 \quad \varepsilon \in (0,1] \tag{4.7}$$

випливає виконання (4.6) у випадку $q \geq r \geq 1$.

Для виконання (4.7) достатньо ([141], с. 320) існування $\min\limits_{C\geq 0} h_2(C) \leq -b_3$, де $h_2(C) = b'C^q - \varepsilon C$. Число $C_0 = \sqrt[q-1]{\frac{\varepsilon}{b'q}}$ є точкою мінімуму функції $h_2(C)$. Знаходимо

$$h_2(C_0) = C_0\left(b'C_0^{q-1} - \varepsilon\right) = C_0\left(b'\frac{\varepsilon}{b'q} - \varepsilon\right) = -C_0\varepsilon\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Звідси отримуємо еквівалентні нерівності

$$-C_0\varepsilon\left(1 - \frac{1}{q}\right) < -b_3 \Longleftrightarrow C_0 > \frac{b_3 q}{\varepsilon(q-1)} \Longleftrightarrow b'b_3^{q-1} < \left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^q (q-1)^{q-1}.$$

Умова $C_0 \geq 1$ виконується при $b' \leq \frac{\varepsilon}{q} < \frac{1}{q}$. Отже, за умов

$$\hat{K}^q(K_1 + M_1)\hat{P}^{q-1} < \left(\frac{1}{q}\right)^q (q-1)^{q-1}, \tag{4.8}$$

$$\hat{K}(K_1 + M_1) < 1, \quad q = r = 1 \tag{4.9}$$

існує така стала $C > 0$, що при $q \geq r \geq 1$ виконується (4.6) та $H_1 \colon W_{\beta,\eta,C} \longrightarrow W_{\beta,\eta,C}$.

Для довільних $v_1, v_2 \in W_{\beta,\eta,C}$

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in[0,T]} \left\|(H_1v_1)(t) - (H_1v_2)(t)\right\|_{V_{1+\eta}} \\
&\leq K \sup_{t\in(0,T]} \left\|f(t, v_1(t), D^\beta v_1(t)) - f(t, v_2(t), D^\beta v_2(t))\right\|_{V_\vartheta} \\
&\leq K\left[K_2 \max_{t\in[0,T]} \|v_1(t) - v_2(t)\|_{V_{1+\eta}}^{q_0} + M_2 \sup_{t\in(0,T]} \|D^\beta v_1(t) - D^\beta v_2(t)\|_{V_\eta}^{r_0}\right],
\end{aligned}$$

а також

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in(0,T]} \left\|D^\beta(H_1v_1)(t) - D^\beta(H_1v_2)(t)\right\|_{V_\eta} \\
&\leq \sup_{t\in(0,T]} \left\|A[(Hv_1)(t) - (Hv_2)(t)]\right\|_{V_\eta} \\
&+ \sup_{t\in(0,T]} \left\|f_{1-\beta}(t) * [f(t, v_1(t), D^\beta v_1(t)) - f(t, v_2(t), D^\beta v_2(t))]\right\|_{V_\eta} \\
&\leq C_2 \max_{t\in[0,T]} \left\|(H_1v_1)(t) - (H_1v_2)(t)\right\|_{V_{1+\eta}}
\end{aligned}$$

$$+C_3 \sup_{t\in(0,T]} \left\| f(t, v_1(t), D^\beta v_1(t)) - f(t, v_2(t), D^\beta v_2(t)) \right\|_{V_\vartheta}$$
$$\leq \hat{K} \left[K_2 \|v_1 - v_2\|_{\beta,\eta}^{q_0} + M_2 \|v_1 - v_2\|_{\beta,\eta}^{r_0} \right].$$

Звідси одержуємо неперервність оператора H_1 на $W_{\beta,\eta,C}$.

За припущення

$$\hat{K}(K_2 + M_2) < 1 \tag{4.10}$$

у випадку 2 при $q \geq r \geq 1$ оператор H_1 стисний на $W_{\beta,\eta,C}$, і за принципом стисних відображень за умов (4.8) (або (4.9) при $q = r = 1$) та (4.10) рівняння (4.1) має розв'язок у $W_{\beta,\eta,C}$.

Враховуючи означення сталих K, $\hat{K}$ та зауваження після леми 4.1 (наявність множників $T^{1-\beta}$), при $\beta \in (0,1)$ одержуємо існування такого $T_0 \in (0, T^*] \subset (0, T]$, що при $t \in [0, T_0]$ умови (4.8), (4.9), (4.10) виконуються.

Випадок $r \geq q \geq 1$ аналогічний.

У випадку $q \in (0,1)$ залишилось довести компактність оператора H_1 на $W_{\beta,\eta,C}$. Вище доведена рівномірна обмеженість $\left\| H_1 v \right\|_{\beta,\eta}$ на $W_{\beta,\eta,C}$. Покажемо одностайну неперервність множини $\{H_1 v : v \in W_{\beta,\eta,C}\}$. Для довільних $v \in W_{\beta,\eta,C}$, $|s| \leq s_1$ за рівномірною обмеженістю та неперервністю півгрупи $S_{\beta,A}(t)$ маємо

$$\begin{aligned}
R(v) &= \max_{t\in[0,T]} \left\| (H_1 v)(t+s) - (H_1 v)(t) \right\|_{V_{1+\eta}} \\
&\leq \max_{t\in[0,T]} \left\| \int_0^t \left[S_{\beta,A}(t+s-\tau) - S_{\beta,A}(t-\tau) \right] f(\tau, v(\tau), D^\beta v(\tau)) d\tau \right. \\
&+ \max_{t\in[0,T]} \left\| \int_t^{t+s} S_{\beta,A}(t-\tau) f(\tau, v(\tau), D^\beta v(\tau)) d\tau + h(t+s) - h(t) \right\|_{V_{1+\eta}} \\
&\leq |s| \left[K_3 \sup_{t\in(0,T]} \left\| f(t, v(t), D^\beta v(t)) \right\|_{V_\vartheta} + K_4 \right],
\end{aligned}$$

де K_3, K_4 – додатні сталі. Враховуючи припущення (F2), матимемо

$$R(v) \leq |s| [K_3(K_1 C^q + M_1 C^r) + K_4].$$

Тоді для довільних $v \in W_{\beta,\eta,C}$, $\varepsilon > 0$ існує таке $s_1 = s_1(\varepsilon, C) > 0$, що при

всіх $|s| < s_1$ матимемо $R(v) < \varepsilon$. Подібно

$$\begin{aligned}
R_1(v) &= \sup_{t\in(0,T]} \left\|D^\beta(H_1v)(t+s) - D^\beta(H_1v)(t)\right\|_{V_\eta} \\
&= \sup_{t\in(0,T]} \Big\|A[(Hv)(t+s) - (Hv)(t)] \\
&+[f_{1-\beta}(t+s) * f(t+s, v(t+s), D^\beta v(t+s)) - f_{1-\beta}(t) * f(t, v(t), D^\beta v(t))] \\
&+[D^\beta h(t+s) - D^\beta h(t)]\Big\|_{V_\eta} \\
&\le C_2 \max_{t\in[0,T]} \left\|(Hv)(t+s) - (Hv)(t)\right\|_{V_{1+\eta}} \\
&+ \sup_{t\in(0,T]} \Big\|f_{1-\beta}(t+s) * f(t+s, v(t+s), D^\beta v(t+s)) \\
&-f_{1-\beta}(t) * f(t, v(t), D^\beta v(t))\Big\|_{V_\eta} \\
&+ \sup_{t\in(0,T]} \left\|D^\beta h(t+s) - D^\beta h(t)\right\|_{V_\eta} \le \hat{K}|s|(K_1C^q + M_1C^r) + K_5|s|.
\end{aligned}$$

Тоді для довільних $v \in W_{\beta,\eta,C}$, $\varepsilon > 0$ існує таке $s_2 = s_2(\varepsilon, C) > 0$, що при всіх $|s| < s_2$ матимемо $R_1(v) < \varepsilon$, а при $|s| < \min\{s_1, s_2\}$ матимемо $\max\{R(v), R_1(v)\} < \varepsilon$. За лемою Арцела оператор H_1 компактний на $W_{\beta,\eta,C}$.

4.2 Регулярність розв'язку задачі Коші для абстрактного півлінійного рівняння з дробовою похідною

Знайдено нові достатні умови класичної розв'язності та максимальної регулярності розв'язку задачі Коші для абстрактного півлінійного рівняння з дробовою похідною порядку $\beta \in (0,1)$.

Припущення 1: $0 \le \eta < \vartheta \le 1$, $A, J \in \mathcal{A}$, $V_\vartheta = D((-J)^\vartheta)$,

$$h \in V_\theta, \qquad f \in C\Big([0,T] \times V_{1+\eta}; V_\vartheta\Big).$$

Розглянемо задачу

$$D^\beta v(t) = Av(t) + f_{1-\beta}(t) * f(t, v(t)), \qquad v(0) = h. \tag{4.11}$$

Її розв'язком називаємо функцію $v \in C^{\beta,\eta}$, що задовольняє рівняння на $(0,T]$ та початкову умову.

Лема 4.2. *Нехай виконується припущення 1,* $v \in C\big([0,T]; V_{1+\eta}\big)$,

$$H_1(t, v(t)) = \int_0^t S_{\beta,A}(t-\tau) f(\tau, v(\tau))\, d\tau + S_{\beta,A}(t)h, \quad t \in [0,T].$$

Тоді: 1) інтегральний оператор H_1 *належить простору обмежених операторів із* $C\big([0,T]; V_{1+\eta}\big)$ *в себе та існують такі сталі* $K > 0$, $K_0 > 0$, *що виконується нерівність*

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|(H_1 v)(t)\big\|_{1+\eta} \le K \max_{t\in[0,T]} \big\|f(t, v(t))\big\|_{\vartheta} + K_0 ||h||_{\vartheta}; \tag{4.12}$$

2) якщо функція $v \in C\big([0,T]; V_{1+\eta}\big)$ *є розв'язком інтегрального рівняння*

$$v(t) = \int_0^t S_{\beta,A}(t-\tau) f(\tau, v(\tau))\, d\tau + S_{\beta,A}(t)h, \tag{4.13}$$

то вона є розв'язком (класу $C^{\beta,\eta}$ *) задачі (4.11).*

Доведення. Доведення леми випливає з теореми 3.1, оскільки за умовою $F(t) = f(t, v(t)) \in C\big([0,T]; V_{\vartheta}\big)$ при $v(t) \in C\big([0,T]; V_{1+\eta}\big)$.

Введемо позначення: $C_1 = K_0 ||h||_{\vartheta}$, $V_{\eta,C} = \{z \in V_\eta : ||z||_{V_\eta} \le C\}$ – замкнена куля в V_η .

Припущення Б: Існують такі додатні сталі K_1 , M_1 , q , що

$$\max_{t\in[0,T]} ||f(t,z)||_{V_\vartheta} \le K_1 ||z||^q_{V_{1+\eta}} \quad \forall z \in V_{1+\eta},$$

$$\max_{t\in[0,T]} ||f(t,z_1) - f(t,z_2)||_{V_\vartheta} \le M_1 ||z_1 - z_2||^{q_0}_{V_{1+\eta}} \quad \forall z_1, z_2 \in V_{1+\eta}.$$

Розглядаємо випадки: 1) $q \in (0,1)$ при $\beta \in (0,1]$; 2) $q \ge 1$ при $\beta \in (0,1)$.

Теорема 4.2. *За припущень 1, Б (та при певних обмеженнях щодо* T *у випадку 2 припущення Б) існує розв'язок* $v \in C^{\beta,\eta}$ *задачі (4.11).*

Доведення. Враховуючи лему 4.2, достатньо довести розв'язність у $C\big([0,T]; V_{1+\eta}\big)$ інтегрального рівняння (4.13).

Інтегральне рівняння (4.13) є окремим випадком операторного рівняння (4.1). Тому твердження теореми випливає з теореми 4.1.

4.3 Нелінійні рівняння типу Гаммерштейна у просторах беселевих потенціалів

Знайдено достатні умови розв'язності нелінійного рівняння

$$u(x,t) = h(x,t) + \\ + \int_0^t \int_\Omega G(x,t;y,\tau) f\left(y,\tau,u(y,\tau),\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial \tau}\right) dy d\tau \tag{4.14}$$

у класах функцій $\Omega \times [0,T] \ni (x,t) \longmapsto u(x,t)$, неперервно диференційовних за змінною t із значеннями в просторах беселевих потенціалів ([141], с. 79), де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $G(x,t;y,\tau)$ – функція Гріна нормальної крайової задачі для деякого параболічного за Петровським диференціального оператора $\frac{\partial}{\partial t} - L(x,D)$ з крайовими диференціальними виразами $B_j(x,D)$ порядків k_j, $j = \overline{1,m}$. В окремому випадку

$$f\left(y,\tau,u(y,\tau),\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial \tau}\right) = F\big(y,\tau,u(y,\tau)\big),$$

$$h(x,t) = \int_\Omega G(x,t;y,0) g(y) dy$$

до рівняння вигляду (4.14) зводиться нормальна крайова задача для півлінійного параболічного рівняння з однорідними крайовими умовами та заданою в початковій умові функцією $\Omega \ni x \longmapsto g(x)$.

Нехай $V_\theta = H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ з нормою простору беселевих потенціалів $H^{2m\theta}_p(\Omega)$ порядку $2m\theta$, $0 < \theta \le 1$,

$$W_{1,\eta} = C\left([0,T]; H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\right) \bigcap C^1\left((0,T]; H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\right)$$

з нормою

$$\|v\|_{1,\eta} = \max\left\{\max_{t\in[0,T]} \|v(\cdot,t)\|_{2m(\eta+1)}, \sup_{t\in(0,T]} \|v_t(\cdot,t)\|_{2m\eta}\right\},$$

$W_{1,\eta;C} = \{v \in W_{1,\eta} : \|v\|_{1,\eta} \le C\}$ – замкнена куля в $W_{1,\eta}$.

Припущення:

(G) Нехай $0 \le \eta < \vartheta \le 1$, функція $h(x,t)$ належить простору $W_{1,\vartheta}$, для кожного $x \in \Omega$, довільної вектор-функції $v \in W_{1,\eta}$ значення вектор -

функціоналу

$$f:(0,T]\times H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\times H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\ni(t,v,v')\longmapsto$$
$$\longmapsto f\big(\cdot,t,v(\cdot,t),v_t(\cdot,t)\big)$$

за просторовою змінною $x\in\overline{\Omega}$ належать $H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$, до того ж $f\in C\Big(\Omega\times(0,T]\times H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\times H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega);\ H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$ та $\sup_{t\in(0,T]}\big\|f\big(\cdot,t,v(\cdot,t),v_t(\cdot,t)\big)\big\|_{H^{2m\vartheta}_p(\Omega)}<\infty$.

(G1) Існують такі додатні сталі K_1, M_1, K_2, M_2, $q,r\in(0,1)$, що для будь-яких $v,v_1,v_2\in W_{1,\eta}$

$$\sup_{t\in(0,T]}\big\|f\big(\cdot,t,v(\cdot,t),v_t(\cdot,t)\big)\big\|_{H^{2m\vartheta}_p(\Omega)}\le$$
$$\le K_1\max_{t\in[0,T]}\|v(\cdot,t)\|^q_{H^{2m(1+\eta)}_p(\Omega)}+M_1\sup_{t\in(0,T]}\|v_t(\cdot,t)\|^r_{H^{2m\eta}_p(\Omega)},$$

$$\sup_{t\in(0,T]}\big\|f\big(\cdot,t,v_1(\cdot,t),v_{1t}(\cdot,t)\big)-f\big(\cdot,t,v_2(\cdot,t),v_{2t}(\cdot,t)\big)\big\|_{H^{2m\vartheta}_p(\Omega)}$$
$$\le K_2\max_{t\in[0,T]}\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|^q_{H^{2m(1+\eta)}_p(\Omega)}+$$
$$+M_2\sup_{t\in(0,T]}\|v_{1t}(\cdot,t)-v_{2t}(\cdot,t)\|^r_{H^{2m\eta}_p(\Omega)}.$$

Зауважимо, що припущення (G1) є наслідком припущення

(**G1**) існують такі додатні сталі K_1, M_1, K_2, M_2, $q,r\in(0,1)$, що

$$\sup_{t\in(0,T]}\|f(\cdot,t,z,\xi)\|_{H^{2m\theta}_p(\Omega)}\le K_1\|z\|^q_{H^{2m(1+\eta)}_p(\Omega)}+M_1\|\xi\|^r_{H^{2m\eta}_p(\Omega)},$$

$$\sup_{t\in(0,T]}\|f(\cdot,t,z_1,\xi_1)-f(\cdot,t,z_2,\xi_2)\|_{H^{2m\theta}_p(\Omega)}\le$$
$$\le K_2||z_1-z_2||^q_{H^{2m(1+\eta)}_p(\Omega)}+M_2||\xi_1-\xi_2||^r_{H^{2m\eta}_p(\Omega)},$$
$$\forall\, z,z_1,z_2\in H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega),\ \xi,\xi_1,\xi_2\in H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega).$$

Приклад функції f, що задовольняє припущення (**G1**). Нехай $\mathcal{F}[g]=\hat{g}$ – перетворення Фур'є функції g, $\mathcal{F}^{-1}[g]$–обернене перетворення Фур'є від g,

$$l_{2m\vartheta}(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{-m\vartheta}\right],$$
$$f(v)=\left|l_{-2m(1+\eta)}*v\right|^{\varrho}*l_{2m\vartheta},\quad 0<\varrho<p,$$

де через $g_1 * g_2$ позначено згортку функцій g_1, g_2. Вирази для функцій $l_{2m\vartheta}(x)$ одержують із формули (5) у [149, с. 153], також наведені у [7, с. 142], де також відзначено деякі їх властивості. Зокрема маємо

$$l_{s_1} * l_{s_2} = l_{s_1+s_2},$$

$$l_{-2m(1+\eta)} * v = l_{n+2-2\{m\eta\}} * l_{-2m-2[m\eta]-n-2} * v = a * \big(1-\Delta\big)^{m+[m\eta]+\frac{n}{2}+1} v,$$

де $a(x) = l_{n+2-2\{m\eta\}}(x)$ – обмежена функція, Δ – оператор Лапласа, $[s]$– ціла частина дійсного додатного числа s, $\{s\}$– його дробова частина, а отже, функцію f можемо подати як нелінійний інтегральний оператор від v та її похідних за просторовими змінними до порядку $2\left(m+[m\eta]+\frac{n}{2}+1\right)$. Враховуючи, що $g_1 * g_2 = \mathcal{F}^{-1}\big[\hat{g}_1 \cdot \hat{g}_2\big]$, а отже,

$$f(v) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\left|l_{-2m(1+\eta)} * v\right|^{\varrho}\right] \cdot \left(1+|\xi|^2\right)^{-m\vartheta}\right],$$

для довільних $v, v_1, v_2 \in H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)$ матимемо

$$\|f(v)\|_{H_p^{2m\vartheta}(\Omega)} = \left[\int_\Omega \left|\mathcal{F}^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^{m\vartheta} \hat{f}\right]\right|^p dx\right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_\Omega \left|\mathcal{F}^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^{m\vartheta}\left[\mathcal{F}\left[\left|l_{-2m(1+\eta)} * v\right|^{\varrho}\right]\right]\left(1+|\xi|^2\right)^{-m\vartheta}\right.\right|^p dx\right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_\Omega \left|\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\left|l_{-2m(1+\eta)} * v\right|^{\varrho}\right]\right]\right|^p dx\right]^{1/p}$$

$$= \left[\int_\Omega \left|l_{-2m(1+\eta)} * v\right|^{\varrho p} dx\right]^{1/p} \le \tilde{C}\left[\int_\Omega \left|l_{-2m(1+\eta)} * v\right|^p dx\right]^{\frac{\varrho}{p}}$$

$$= \tilde{C}\left[\int_\Omega \left|\mathcal{F}^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^{m(1+\eta)} \hat{v}\right]\right|^p dx\right]^{\frac{\varrho}{p}} = \tilde{C}\left[\|v\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)}\right]^{\frac{\varrho}{p}}.$$

Подібно

$$\big\|f(v_1) - f(v_2)\big\|_{H_p^{2m\vartheta}(\Omega)} =$$

$$= \left[\int_\Omega \left|\left|l_{-2m(1+\eta)} * v_1\right|^{\varrho} - \left|l_{-2m(1+\eta)} * v_2\right|^{\varrho}\right|^p dx\right]^{1/p}$$

$$\le \left[\int_\Omega \left|l_{-2m(1+\eta)} * (v_1 - v_2)\right|^{\varrho p} dx\right]^{1/p}$$

$$\leq \tilde{C}\left[\int_\Omega \left|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{m(1+\eta)}[\hat{v}_1-\hat{v}_2]\right|^p dx\right]^{\frac{\varrho}{p}}$$
$$= \tilde{C}\left[\|v_1-v_2\|_{H_p^{2m(1+\eta)}(\Omega)}\right]^{\frac{\varrho}{p}}.$$

Отже, вибрана функція f задовольняє припущення (**G1**) із $q=\frac{\varrho}{p}\in(0,1)$. Так само показуємо, що

$$f(v,v_t)=\left(\left|l_{-2m(1+\eta)}*v\right|^{\varrho_1}+\left|l_{-2m\eta}*v_t\right|^{\varrho_2}\right)*l_{2m\vartheta}$$

при $\varrho_1,\varrho_2\in(0,p)$ задовольняє припущення (**G1**) із $q=\frac{\varrho_1}{p}$, $r=\frac{\varrho_2}{p}\in(0,1)$.

Теорема 4.3. *Нехай* $0\leq\eta<\vartheta\leq 1$, *виконуються припущення (***A***), (***Ag***), нерівності Сілі*

$$k_j<2m\vartheta-\frac{1}{p},\qquad \forall j=\overline{1,m}, \tag{4.15}$$

та припущення (G), (G1). *Тоді рівняння* (4.14) *розв'язне в класі* $W_{1,\eta}$.

Доведення. Відомо (див. [140], теорема Сілі, с. 400), що якщо для нормальної системи $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ виконуються нерівності Сілі, то реалізується ізоморфізм банахових просторів

$$H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\simeq\left[L_p(\Omega),H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\right]_\vartheta,$$

де справа проміжний простір з показником ϑ, породжений методом комплексної інтерполяції банахової пари $\left\{L_p(\Omega),\,H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\right\}$. Тоді рівняння (4.14) зводиться до абстрактного операторного рівняння

$$v(\cdot,t)=\int_0^t S_{\beta,A}(t-\tau)f\big(\cdot,\tau,v(\cdot,\tau),v_\tau(\cdot,\tau)\big)d\tau+h(\cdot,t),\quad t\in[0,T] \tag{4.16}$$

у класі $W_{1,\eta}$, де A–замкнений секторіальний оператор, породжений нормальною крайовою задачею, заданий у просторі $V_0=L_p(\Omega)$ на щільному підпросторі $V_1=H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$.

Тоді $V_\vartheta=H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ та у випадку припущення (**G1**) достатньо скористатись теоремою 4.1 при $\beta=1$. □

4.4 Нелінійні збурення параболічних крайових задач

Розглядаємо крайову задачу

$$\begin{cases} D_t^\beta v(x,t) = L(x,D)v(x,t) + f_{1-\beta}(t) * f\big(x,t,v(x,t)\big),\ x \in \overline{\Omega}, t \in (0,T], \\ v(x,0) = h(x), \quad x \in \overline{\Omega},\ \ B_j(x,D)v(x,0)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad j = 1,\dots,m \end{cases} \tag{4.17}$$

при $\beta \in (0,1]$ за припущень **(A)**, **(Ag)** та наступних умов.

Припущення (A1). $0 \le \eta < \vartheta \le 1$, $\overline{\Omega} \times [0,T] \times H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \ni (x,t,v) \longmapsto f(x,t,v)$ – заданий комплексний функціонал, а функція $h\colon \overline{\Omega} \ni x \longmapsto h(x)$ належить простору $H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$, також для довільної вектор-функції $v \in C\Big([0,T]; H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$ значення складеного функціоналу (вектор-функціоналу) $f\colon [0,T] \times H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \ni (t,v) \longmapsto f\big(\cdot,t,v(\cdot,t)\big)$ за просторовою змінною $x \in \overline{\Omega}$ належать простору $H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$, до того ж $f \in C\Big(\Omega \times [0,T] \times H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega); H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$.

Нехай $H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\},C}(\Omega) = \Big\{v \in H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\colon \|v\|_{H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)} \le C\Big\}$.

Припущення (A2). Існують такі додатні сталі K_1, M_1, q, що для будь-яких $t \in [0,T]$, $v, v_1, v_2 \in C\Big([0,T]; H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$

$$\big\|f\big(\cdot,t,v(\cdot,t)\big)\big\|_{H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)} \le K_1\|v(\cdot,t)\|^q_{H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)},$$

$$\big\|f\big(\cdot,t,v_1(\cdot,t)\big) - f\big(\cdot,t,v_2(\cdot,t)\big)\big\|_{H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)} \le M_1\|v_1(\cdot,t) - v_2(\cdot,t)\|^{q_0}_{H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)}.$$

Розглядаємо випадки: 1) $q \in (0,1)$ при $\beta \in (0,1]$; 2) $q \ge 1$ при $\beta \in (0,1)$.

Теорема 4.4. *Нехай виконуються припущення* **(A)**, **(Ag)**, *нерівності Сілі (4.15) та припущення* **(A1)**, **(A2)**. *Тоді задача* (4.17) *розв'язна в класі* $W_{\beta,\eta}(T) := \{v \in C\Big([0,T]; H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big) \,|\, D_t^\beta v \in C_b\Big([0,T]; H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)\}$ *(в класі* $W_{\beta,\eta}(T_0)$ *при деякому* $T_0 \in (0,T]$ *у випадку 2 припущення* **(A2)**).

Доведення. Як при доведенні теореми 3.6, задачу (4.17) можна записати у вигляді задачі Коші для півлінійного абстрактного параболічного рівняння

$$D_t^\beta v(x,t) = Av(x,t) + f_{1-\beta}(t) * f\big(x,t,v(x,t)\big),$$

$$v(x,0) = h(x),\ \ x \in \overline{\Omega}, t \in (0,T]. \tag{4.18}$$

Далі досить застосувати до задачі (4.18) теорему 4.2.

4.5 Збурення абстрактної задачі Коші на комплексних інтерполяційних шкалах та нелінійним доданком

Одержано достатні умови розв'язності задачі Коші для збуреного на комплексній інтерполяційній шкалі, асоційованій з оператором задачі, півлінійного абстрактного параболічного рівняння. Результати проілюстровано у випадку оператора A, породженого регулярною еліптичною крайовою задачею, збуреною псевдодиференціальними доданками.

4.5.1 Розв'язність задачі

Вивчаємо задачу Коші

$$\begin{cases} D^{\beta}v(t) = (A + XE_{1\theta})v(t) + f_{1-\beta}(t) * f\big(t, v(t)\big), \quad t \in (0, T] \\ v(0) = h \in V_1, \end{cases} \tag{4.19}$$

за припущень 1, Б та $X \in \mathcal{L}(V_{\vartheta}, V_0)$.

Теорема 4.5. *Нехай виконуються припущення теореми 4.2, $X \in \mathcal{L}(V_{\vartheta}, V_0)$. Тоді (при додатковому обмеженні щодо T у випадку 2 припущення Б) існує розв'язок задачі (4.19) у класі $C^{\beta,\eta}$.*

Доведення. З теорем 2.2 та 3.1 випливає існування єдиного розв'язку $w(t) = S_{\beta,A+XE_{1\theta}}(t)h$ класу $C^{\beta,\eta}$ задачі

$$D^{\beta}w(t) = (A + XE_{1\theta})w(t), \quad t \in [0, T], \qquad w(0) = h. \tag{4.20}$$

Оскільки за теоремою 2.2 оператор $A + XE_{1\theta}$ володіє потрібними властивостями оператора A, то далі достатньо скористатись теоремою 4.2.

4.5.2 Наближення розв'язку

У третьому розділі побудовані наближення розв'язку задачі Коші для лінійного параболічного рівняння з дробовою похідною, збуреного на комплексних інтерполяційних шкалах оператора. Подібні наближення можна побудувати для півлінійного рівняння. Розглядаємо задачу (4.19) за

Припущення (B): $\beta, \vartheta \in (0,1]$, $A, J \in \mathcal{A}$, $V_\vartheta = D((-J)^\vartheta)$, $h \in V_1$, $X \in \mathcal{L}(V_\vartheta; V_0)$, $f \in C\Big([0,T] \times V_1; V_1\Big)$, існують такі додатні сталі K_1, M_1, $q > 1$, що

$$\|f(t,z)\|_{V_1} \le K_1 \|z\|_{V_1}^q \quad \forall t \in [0,T], \quad z \in V_1,$$

$$\|f(t,z_1) - f(t,z_2)\|_{V_1} \le M_1 \|z_1 - z_2\|_{V_1}^{q_0} \quad \forall t \in [0,T], \quad z_1, z_2 \in V_1.$$

Використовуємо введені у 3.2.2 оператори $G_{l-1}(t,X)$ та $G_{\beta,l-1}(t,X)$, і нехай $u_l(t)$ – розв'язок інтегрального рівняння

$$u_l(t) = \int_0^t G_{\beta,l-1}(t-\tau, X) f(\tau, u_l(\tau)) d\tau + G_{\beta,l-1}(t,X)h. \tag{4.21}$$

Теорема 4.6. *Нехай виконується припущення* **(B)** *і* $u(t)$ *є розв'язком класу* $C^{\beta,0}$ *задачі* (4.19). *Тоді існує число* $T_0 \in (0,T]$ *таке, що*

$$\max_{t \in [0,T_0]} \|u(t) - u_l(t)\|_{V_0} \to 0 \quad \textit{при} \quad l \to \infty.$$

Доведення. За теоремою 2.2 $e^{t(A+XE_{1\theta})}h \in V_1$, а за лемою 4.2 при $\eta = 0$ функція $v \in C\big([0,T]; V_1\big)$, що є розв'язком інтегрального рівняння

$$v(t) = \int_0^t S_{\beta,A+XE_{1\theta}}(t-\tau) f(\tau, v(\tau))\, d\tau + S_{\beta,A+XE_{1\theta}}(t)h, \tag{4.22}$$

належить класу $C^{\beta,0}$ і є розв'язком задачі Коші (4.19).

Використовуємо оцінку (3.37):

$$\Big\| \Big[e^{t(A+XE_{1\theta})} - G_{l-1}(t,X)h \Big] \Big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{B(A,X)}{2^{l-1}} ||h||_{V_0}$$

з певною додатною сталою $B(A,X)$, що не залежить від норми збурюючого оператора X. Нехай

$$F(t) = f(t, u(t)), \qquad F_l(t) = f(t, u_l(t)),$$
$$(Hu)(t) = \int_0^t S_{\beta,A+XE_{1\theta}}(t-\tau) f(\tau, u(\tau))\, d\tau + S_{\beta,A+XE_{1\theta}}(t)h,$$
$$(H_l u_l)(t) = \int_0^t G_{\beta,l-1}(t-\tau, X) f(\tau, u_l(\tau)) d\tau + G_{\beta,l-1}(t,X)h.$$

З неперервності вкладення $V_1 \hookrightarrow V_0$ випливає існування інтегралів $\int_0^t \|F(t)\|_{V_0} dt$, $\int_0^t \|F_l(t)\|_{V_0} dt$. Тому

$$\begin{aligned}\|Hu - H_l u_l\|_{V_0} &= \left\| \int_0^t [S_{\beta,A+XE_{1\theta}}(t-\tau)F(\tau) - G_{\beta,l-1}(t-\tau,X)F_l(\tau)]d\tau \right\|_{V_0} \\ &= \Big\| \int_0^t [S_{\beta,A+XE_{1\theta}}(t-\tau) - G_{\beta,l-1}(t-\tau,X)]F(\tau)d\tau \\ &\qquad + \int_0^t G_{\beta,l-1}(t-\tau,X)[F(\tau) - F_l(\tau)]d\tau \Big\|_{V_0} \\ &\le \frac{B(A,X)}{2^{l-1}} \int_0^T \|F(\tau)\|_{V_0} d\tau + K'' \int_0^t \|F(\tau) - F_l(\tau)\|_{V_0} d\tau\end{aligned}$$

з певною додатною сталою K''. Ми використали, що

$$\int\limits_0^\infty \frac{t}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\frac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}}) ds = \int\limits_0^\infty g_\beta(z)\, dz = 1.$$

Позначимо $U_{l-1}(t) := u(t) - u_l(t)$. За лемами 3.1 та 4.1 $Hu = u$, з (4.21) $H_l u_l = u_l$, а тоді $U_{l-1} = Hu - H_l u_l$. Враховуючи припущення **(B)**, матимемо

$$\|U_{l-1}(t)\|_{V_0} \le \frac{B(A,X)K_1}{2^{l-1}} \int_0^T \|u(\tau)\|_{V_0}^q d\tau + K'' M_1 \int_0^t \|U_{l-1}(\tau)\|_{V_0} d\tau.$$

Оскільки за теоремою існування розв'язку u існує така додатна стала C, що $||u||_{V_0} \le C$, то

$$\|U_{l-1}(t)\|_{V_0} \le \frac{B(A,X)K_1 T C^q}{2^{l-1}} + K'' M_1 \int_0^t \|U_{l-1}(\tau)\|_{V_0} d\tau.$$

Розв'язуючи цю нерівність типу Гронуолла-Беллмана

$$v(t) \le A_1 \int_0^t v^q(\tau) d\tau + B_1,$$

одержуємо оцінки

$$\begin{aligned}\|U_{l-1}(t)\|_{V_0} &\le \frac{B(A,X)K_1 T C}{2^{l-1}} e^{K'' M_1 t}, \quad t \in [0,T], \quad q = 1 \\ \|U_{l-1}(t)\|_{V_0} &\le \frac{B(A,X)K_1 T C^q}{2^{l-1}} [1-d]^{-1/q-1}, \quad t \in [0,T], \quad q > 1.\end{aligned}$$

Тут $d = K^q M_1 (q-1) T [B(A,X)K_1 T C^q]^{q-1}$. Вибором числа $T_0 \in (0,T]$ досягаємо нерівності $d < 1$. Звідси випливає, що $\max\limits_{t\in[0,T_0]} ||U_{l-1}(t)||_{V_0} \to 0, \quad l \to +\infty$.

4.5.3 Лінійні збурення крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння

Розглянемо нормальну параболічну крайову задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = (L(x,D) + L_1)u = f(x,t,u(x,t)), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \\ &B_j u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad j = 1,\ldots,m, \qquad u(x,0) = h(x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.23}$$

в обмеженій області $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ класу C^∞ за умов **(A)**. Введемо замкнений оператор

$$(Av)(x) = L(x,D)\, v(x)$$

у просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ на щільному підпросторі $V_1 = H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ і нехай $V_\theta = H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ та задано замкнений в $L_p(\Omega)$ лінійний оператор $L_1 : H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega)$.

Припущення:

(C0) $h \in H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$, $\quad f \in C\Big(\Omega \times [0,T] \times H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega);\, H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$.

(C) Існують такі додатні сталі K_1, M_1, $q \in (0,1)$, що

$$\|f(\cdot,t,z)\|_{H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)} \le K_1 \|z\|^q_{H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega)} \quad \forall t \in [0,T], z \in H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega),$$

$$\|f(\cdot,t,z_1) - f(\cdot,t,z_2)\|_{L_p(\Omega)} \le M_1 \|z_1 - z_2\|^q_{H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)}$$

$$\forall t \in [0,T],\ z_1, z_2 \in H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega).$$

Теорема 4.7. *Якщо виконуються умови* **(A)**, **(Ag)**, *нерівності Сілі (4.15), припущення* **(C0)**, **(C)** *та щодо* $\mathcal{L}_1$, *то існує розв'язок задачі* (4.23) *класу* $C^{1,\eta}$.

Доведення. Як при доведенні теореми 4.4, задачу (4.23) можна записати у вигляді задачі Коші для півлінійного абстрактного параболічного рівняння

$$\frac{dv}{dt} = (A + X)\, v + f(t,v), \quad v(0) = h \tag{4.24}$$

зі збуреним оператором X, заданим псевдодиференціальним виразом $\mathcal{L}_1$. Далі застосовуємо теореми 3.3 та 4.2.

Для розв'язку задачі (4.23) також можна побудувати наближення за допомогою резольвенти незбуреного оператора – за допомогою функції Гріна

нормальної параболічної крайової задачі [36] та її ітерацій, як це було зроблено у випадку задачі Коші для лінійного абстрактного рівняння.

4.6 Узагальнення задачі Коші для півлінійного рівняння з дробовою похідною

У працях [15, 24, 60, 61, 62–63, 114–115] та інших досліджувались узагальнені крайові значення регулярних в області розв'язків гіпоеліптичних рівнянь із частинними похідними. Доведено, що такі розв'язки належать до вагових просторів Лебега з вагами порядків степенів відстані від точки області до межі і розв'язки з певних вагових L_p-просторів набувають на межі узагальнених крайових значень.

У цьому підрозділі знайдено достатні умови існування узагальнених початкових значень регулярних розв'язків півлінійних абстрактних рівнянь зі збуреними дробовими похідними та одержано узагальнення задачі Коші для півлінійних рівнянь із дробовою похідною.

4.6.1 Позначення та допоміжні твердження

Нехай V – банахова алгебра (наприклад, $V = C(\bar{\Omega})$),
$C^0 = C^0(V) = C^0\big([0,T];V\big) = \{\varphi \in C\big([0,T];V\big) : \varphi|_{t=T} = 0\}$,
$D^0 = D^0(V) = D^0\big([0,T];V\big) = \{\varphi \in C^\infty\big([0,T];V\big) : D_t^l\varphi|_{t=T} = 0,\, l \in \mathbb{Z}_+\}$,
$\varepsilon_0 \in (0,T)$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$,
$C_\varepsilon^\beta = C_\varepsilon^\beta(V)$ – клас функцій $v \in C^0\big([\varepsilon,T];V\big)$, для яких існують неперервні на $(\varepsilon,T]$ функції

$$D_\varepsilon^\beta(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int\limits_\varepsilon^t \tfrac{v(\tau)}{(t-\tau)^\beta}d\tau - f_{1-\beta}(t-\varepsilon)v(\varepsilon) \in V\,,$$

$\tilde{C}^\beta = \tilde{C}^\beta(V)$ – клас функцій $v \in C^0\big([0,T];V\big)$, для яких при кожному $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ існують неперервні на $(\varepsilon,T]$ функції $D_\varepsilon^\beta(t)$,
$C^\beta = C^\beta(V)$ – клас функцій $v \in C^0\big([0,T];V\big)$, для яких існують неперервні на $(0,T]$ функції $D^\beta v(t)$.

Введемо оператори

$$\hat{L}_\beta: \quad (\hat{L}_\beta v)(t) \equiv f_{-\beta}(t)\hat{*}v(t) - (Av)(t), \quad v \in D^0(V),$$

$$L^\varepsilon_\beta: \quad (L^\varepsilon_\beta v)(t) \equiv D^\beta_\varepsilon(t) - (Av)(t), \ t \in (\varepsilon, T], \ \ v \in C^\beta_\varepsilon(V), \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

$$L^{reg}_\beta: \quad (L^{reg}_\beta v)(t) \equiv D^\beta v(t) - (Av)(t), \ t \in (\varepsilon, T], \quad v \in C^\beta(V), \quad t \in (0, T].$$

Зауважимо, що для $v \in C^\beta(V)$ визначено $L^0_\beta v = L^{reg}_\beta v$.

Нехай $\rho(t)-$ функція із $D^0[0;T]$, додатна на $(0,T)$, яка має порядок t при $t \to 0$ ($\lim\limits_{t\to 0+} \frac{\rho(t)}{t} = const$) та $0 \le \rho(t) \le 1$, $t \in [0;T]$.

При $k \in \mathbb{Z}_+$ використовуємо функційні простори

$$M_k = M_k(V) = \Big\{u \in L_{1,loc}\big((0,T];V\big) : \|u\|_k = \int\limits_0^T \rho^k(t)\|u(t)\|_V dt < \infty\Big\},$$

$$D_k = D_k(V) = \{\varphi \in D^0(V): \ \rho^{m-k}\varphi^{(m)} \in C\big([0,T];V\big), \quad m \in \mathbb{Z}_+\},$$

$$X_k = X_k(V) = \{\varphi \in D^0(V): \ \hat{L}_\beta\varphi \in D_k(V)\},$$

$$X = X(V) = \{\varphi \in D^0(V): \ \hat{L}_\beta\varphi \in D^0(V)\}.$$

Вважаємо, що $\varphi_l \to 0$, $l \to \infty$ у $D_k(V)$, якщо $\varrho^{m-k}\varphi^{(m)}_l \to 0$, $l \to \infty$ в $C\big([0,T];V\big)$, $\quad m \in \mathbb{Z}_+$. Відповідно визначено збіжність $\varphi_l \to 0$, $l \to \infty$ у X_k: $\varphi^{(m)}_l \to 0$, $l \to \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+$ та $\hat{L}_\beta\varphi_l \to 0$, $l \to \infty$ в $D_k(V)$.

Зауважимо, що $M_0 = L_1\big((0,T);V\big)$.

Непорожність простору X_k випливає з наступної леми 4.4.

Лема 4.3. *Для довільних числа $k \in \mathbb{Z}_+$, елемента $\varphi \in V$ існує така $\psi \in X_k(V)$, що $(f_{1-\beta}\hat{*}\psi)|_{t=0} = \varphi$.*

Доведення. Покажемо, що шуканою є функція

$$\psi(t) = f_{\beta-1}(t)\hat{*}\sum_{i=0}^{k} f_i(t) * \varphi_i(t), \tag{4.25}$$

де $\varphi_0 \in D^0(V)$ – довільна функція, така що $\varphi_0(0) = \varphi$, а $\varphi_i \in D^0(V)$, $i = \overline{1,k}$ та будуть нижче визначені через φ_0. Справді,

$$(\hat{L}_\beta\psi)(t) = f_{-\beta}(t)\hat{*}(f_{\beta-1}(t)\hat{*}\sum_{i=0}^{k} f_i(t) * \varphi_i(t)) - f_{\beta-1}(t)\hat{*}\sum_{i=0}^{k} f_i(t) * (A\varphi_i)(t) =$$

$$= f_{-1}(t)\hat{*}\sum_{i=0}^{k} f_i(t) * \varphi_i(t) - \sum_{i=0}^{k} f_{\beta-1}(t)\hat{*}(f_i(t) * (A\varphi_i)(t)) =$$

$$= \delta'(t)\hat{*}\varphi_0(t) + \sum_{i=1}^{k} \delta'(t)\hat{*}(f_i(t) * \varphi_i(t)) - \sum_{i=0}^{k} f'_\beta(t)\hat{*}\big(f_i(t) * (A\varphi_i)(t)\big) =$$

$$= -\varphi'_0(t) - \sum_{i=1}^{k} f'_i(t) * \varphi_i(t) + \sum_{i=0}^{k} f_i(t) * \big(f_\beta(t)\hat{*}(A\varphi'_i)(t)\big) =$$

$$= -\varphi'_0(t) - \sum_{i=1}^{k} f_{i-1}(t) * \varphi_i(t) + \sum_{i=0}^{k} f_i(t) * \big(f_\beta(t)\hat{*}(A\varphi'_i(t)) =$$

$$= -\varphi'_0(t) - \sum_{j=0}^{k-1} f_j(t) * \varphi_{j+1}(t) + \sum_{j=0}^{k} f_j(t) * \big(f_\beta(t)\hat{*}(A\varphi'_j)(t)\big) =$$

$$= -\varphi'_0(t) + \sum_{j=0}^{k-1} f_j(t) * \big(f_\beta(t)\hat{*}(A\varphi'_j)(t) - \varphi_{j+1}(t)\big) +$$

$$+ f_k(t) * \big(f_\beta(t)\hat{*}(A\varphi'_k)(t)\big) = -\varphi'_0(t) + f_\beta(t)\hat{*}(A\varphi'_0)(t) - \varphi_1(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} f_j(t) * \big(f_\beta(t)\hat{*}(A\varphi'_j)(t) - \varphi_{j+1}(t)\big) + f_k(t) * \big(f_\beta(t)\hat{*}(A\varphi'_k)(t)\big).$$

Вибираємо

$$\varphi_1(t) = f_\beta(t)\hat{*}(A\varphi'_0)(t) - \varphi'_0(t);$$

$$\varphi_{j+1}(t) = f_\beta(t)\hat{*}(A\varphi'_j)(t), \quad j = \overline{1, k-1}.$$

Тоді $(\hat{L}_\beta\psi)(t) = f_k(t) * \big(f_\beta(t)\hat{*}(A\varphi'_k)(t)\big)$.

З того, що функція $\hat{\varphi}_k(t) = f_\beta(t)\hat{*}(A\varphi_k)'(t)$ належить $D^0(V)$ зрозуміло, що $\rho^{-k}(t)\hat{L}_\beta\psi(t) = \rho^{-k}(t)(f_k(t) * \hat{\varphi}_k(t)) = \frac{\rho^{-k}(t)}{k!}\int\limits_0^t (t-\tau)^{k-1}\hat{\varphi}_k(\tau)d\tau$ належить $C\big([0,T];V\big)$, $\rho^{m-k}(\hat{L}_\beta\psi)^{(m)} = \rho^{m-k}(t)(f_k(t) * \hat{\varphi}_k^{(m)}) \in C\big([0,T];V\big)$.

За побудовою $(f_{1-\beta}\hat{*}\psi)|_{t=0} = [(f_{1-\beta}(t)\hat{*}(f_{\beta-1}(t)\hat{*}\sum\limits_{i=0}^{k} f_i(t) * \varphi_i(x,t)))]|_{t=0} =$ $= \sum\limits_{i=0}^{k}(f_i(t) * \varphi_i(t))|_{t=0} = \varphi_0(0) = \varphi$. Лема доведена.

Примітки: 1. З доведення леми випливає, що

$$\varphi_j(t) = f_{j\beta-1}(t)\hat{*}(A^j\varphi_0)(t) - f_{j\beta-1-\beta}(t)\hat{*}(A^{j-1}\varphi_0)(t), \quad j = \overline{1,k}.$$

2. Повторюючи доведення леми 4.3, показуємо, що для довільних числа $k \in \mathbb{Z}_+$, елемента $\varphi \in V$ при $\varphi_i \in D_{k-i}(V)$, $i = \overline{0,k}$ та $(\varrho^{-k}\varphi_0)(0) = \varphi$ функція (4.25) належить $X_k(V)$, та $\lim\limits_{t\to 0}[\varrho^{-k}(t)(f_{1-\beta}\hat{*}\psi)(t)] = \varphi$.

Лема 4.4. *Для довільних* $\varphi \in D_k(V)$, $A \in \mathcal{A}$ *існує така* $\psi \in X_k(V)$, *що*

$$(\hat{L}_\beta\psi)(t) = \varphi(t)\,,\ t \in [0,T]\,.$$

Доведення. Покажемо, що шуканою є функція

$$\psi(t) = (f_{\beta-1} * S_{\beta,A})(t)\hat{*}\varphi(t)\,,\ t \in [0,T]\,.$$

У [160] показано, що для секторіального оператора A від'ємного типу сім'я лінійних операторів $\{S_{\beta,A}(t)\}_{t\geq 0}$ сильно неперервна на V, функція

$$v(t) = S_{\beta,A}(t)h\,, \quad t > 0$$

задовольняє задачу

$$L_\beta v(t) = f_{1-\beta}(t)v(0), \qquad v(0) = h, \quad h \in V \tag{4.26}$$

(тоді $L_\beta S_{\beta,A}(t)h = f_{1-\beta}(t)h$ для всіх $h \in V_0$) і розв'язок неперервно залежить від початкових даних $h \in V$.

Враховуючи властивості згорток, матимемо

$$\hat{L}_\beta\psi = \hat{L}_\beta[(f_{\beta-1} * S_{\beta,A})\hat{*}\varphi] = f_{-\beta}\hat{*}[(f_{\beta-1} * S_{\beta,A})\hat{*}\varphi] - A[(f_{\beta-1} * S_{\beta,A})\hat{*}\varphi] =$$

$$= (f_{-\beta} * f_{\beta-1} * S_{\beta,A})\hat{*}\varphi - (f_{\beta-1} * AS_{\beta,A}))\hat{*}\varphi = (f_{\beta-1} * L_\beta S_{\beta,A})\hat{*}\varphi =$$

$$= (f_{\beta-1} * f_{1-\beta})\hat{*}\varphi = \delta\hat{*}\varphi = \varphi.$$

Із властивостей функції $S_{\beta,A}(t)$ випливає, що $\psi \in X_k(V)$, якщо $\varphi \in D_k(V)$.

Лема 4.5. *Якщо послідовність* $u_\varepsilon \to u$, $\varepsilon \to 0$ *слабо в* V', *тобто* $(u_\varepsilon, \varphi) \to (u, \varphi)$, $\varepsilon \to 0$ *для довільної* $\varphi \in V$, *то для довільної послідовності* φ_ε *такої, що* $\varphi_\varepsilon \to \varphi$, $\varepsilon \to 0$ *в* V, *також* $(u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) \to (u, \varphi)$, $\varepsilon \to 0$.

Доведення проводиться, як у лемі 2.6 [112]. Достатньо розглянути випадок $u_\varepsilon \to 0$ в V' та $\varphi_\varepsilon \to 0$ в V, $\varepsilon \to 0$. Якщо твердження леми неправильне, то

існує така послідовність $\varphi_{\frac{1}{n}}$, що $\varphi_{\frac{1}{n}} \to 0$, $n \to \infty$ в V, але $|(u_{\frac{1}{n}}, \varphi_{\frac{1}{n}})| \geq n$. Тоді для $\psi_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\varphi_{\frac{1}{n}}$ маємо

$$|(u_{\frac{1}{n}}, \psi_{\frac{1}{n}})| \geq 1, \quad n \to +\infty. \tag{4.27}$$

Але $\psi_{\frac{1}{n}} \to 0$, $n \to \infty$ в V, $u_{\frac{1}{n}}$ – неперервний лінійний функціонал на V, а отже, отримали суперечність із (4.27).

Примітка. Подібно одержуємо, що якщо при $u_\varepsilon \in V$ послідовність $u_\varepsilon\varphi \to u\varphi$, $\varepsilon \to 0$ для довільної $\varphi \in V$, то для довільної послідовності φ_ε такої, що $\varphi_\varepsilon \to \varphi$, $\varepsilon \to 0$ в V, також $u_\varepsilon\varphi_\varepsilon \to u\varphi$, $\varepsilon \to 0$.

4.6.2 Узагальнені початкові значення регулярних розв'язків

Лема 4.6. *Для $v \in C^\beta(V)$, $\psi \in X(V)$ правильна формула Гріна*

$$\int_0^T v(t)(\hat{L}_\beta\psi)(t)dt = \int_0^T (L_\beta^{reg}v)(t)\psi(t)dt + \int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt\, v(0). \tag{4.28}$$

Доведення. Перетворимо $\int\limits_0^T (L^{reg}v)(t)\psi(t)dt$, інтегруючи частинами. Маємо

$$\int_0^T D^\beta v(t)\psi(t)dt = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^T \Big(\int_0^t (t-\tau)^{-\beta}v'(\tau)d\tau\Big)\psi(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^T \Big(\int_\tau^T (t-\tau)^{-\beta}\psi(t)dt\Big)v'(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^T \Big(\int_0^{T-\tau} \eta^{-\beta}\psi(\eta+\tau)d\eta\Big)v'(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^T \big(f_{1-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(\tau)\big)v'(\tau)d\tau =$$

$$= \Big(v(\tau)(f_{1-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(\tau))\Big)\Big|_{\tau=0}^{\tau=T} - \int_0^T v(\tau)(f_{1-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(\tau))_\tau d\tau =$$

$$= -v(0)(f_{1-\beta}\hat{*}\psi)(0) + \int_0^T v(\tau)(f_{-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(\tau))d\tau,$$

звідки й випливає потрібна формула.

Теорема 4.8. *Нехай функція* $g(t,z)$ *визначена при* $t \in (0,T]$, $z \in R$, $g \in C\big((0,T] \times \mathbb{R}; V\big)$, *функції* $u^\varepsilon \in C_\varepsilon^\beta(V)$ *та є розв'язками рівнянь*

$$(L_\beta^\varepsilon u)(t) = g(t, u(t)), \quad t \in (0,T], \tag{4.29}$$

існує така функція $u(t)$ *(*$t \in (0,T]$ *), що*

1) $\int_\varepsilon^T u^\varepsilon(t)\varphi(t)dt \to \int_0^T u(t)\varphi(t)dt$ *при* $\varepsilon \to 0 \quad \forall \varphi \in D_k(V)$,

2) $\int_\varepsilon^T g(t, u^\varepsilon(t))\psi(t)dt \to \int_0^T g(t, u(t))\psi(t)dt$ *при* $\varepsilon \to 0 \quad \forall \psi \in X_k(V)$.

Тоді

3) $u^\varepsilon(\varepsilon)$ *набувають при* $\varepsilon = 0$ *деяких узагальнених початкових значень, а саме, існує такий лінійний оператор* u_0 *на* V, *що*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon(\varepsilon)\varphi = u_0\varphi \quad \forall \varphi \in V. \tag{4.30}$$

Доведення. Для довільної $\psi \in X_k(V)$ визначимо $\psi_\varepsilon(t) = \psi(t-\varepsilon)$, $t \in [\varepsilon, T+\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0/2]$. Тоді $\psi_\varepsilon(t) \to \psi(t)$ $(\varepsilon \to 0)$ в $X_k(V)$.

Для $v \in C_\varepsilon^\beta(V)$ та вибраної ψ_ε правильна формула Гріна

$$\int_\varepsilon^T (L_\beta^\varepsilon v)(t)\psi_\varepsilon(t)dt = \int_\varepsilon^T v(t)(\hat{L}_\beta \psi_\varepsilon)(t)dt - v(\varepsilon)\Big[f_{1-\beta}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(t)\Big]|_{t=\varepsilon} \tag{4.31}$$

Зауважимо, що

$$(f_{1-\beta}\hat{*}\psi_\varepsilon)(\varepsilon) = \int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi_\varepsilon(t+\varepsilon)dt = \int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt = (f_{1-\beta}\hat{*}\psi)(0). \tag{4.32}$$

Нехай функція $u^\varepsilon \in C_\varepsilon^\beta(V)$ і є розв'язком рівняння (4.29) на $(\varepsilon, T]$. Із формули Гріна для $v = u^\varepsilon$ та побудованої вище ψ_ε

$$\int_\varepsilon^T u^\varepsilon(t)(\hat{L}_\beta \psi_\varepsilon)(t)dt - \int_\varepsilon^T g(t, u^\varepsilon(t))\psi_\varepsilon(t)dt = u^\varepsilon(\varepsilon)\Big[f_{1-\beta}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(t)\Big]||_{t=\varepsilon}. \tag{4.33}$$

Виберемо тепер для довільної $\varphi \in V$ функцію $\psi(t)$ за лемою 4.3. Тоді за лемою 4.3 та формулою (4.32)

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0}(f_{1-\beta}\hat{*}\psi)(\varepsilon) = \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt = \varphi$,

$(\hat{L}_\beta\psi_\varepsilon)(t) = \varrho^k(t-\varepsilon)\cdot\varrho^{-k}(t-\varepsilon)(\hat{L}_\beta\psi_\varepsilon)(t) = \varrho^k(t-\varepsilon)\cdot\tilde{\varphi}_\varepsilon(t)\,,$ де $\tilde{\varphi}_\varepsilon(t)\in D^0(V)$ і за побудовою $\tilde{\varphi}_\varepsilon\to\tilde{\varphi}$, $\varepsilon\to 0$ у $D^0(V)$.

Оскільки $\varrho^k\tilde{\varphi}\in D_k(V)$, то за умовою 1 теореми послідовність $\int\limits_\varepsilon^T u^\varepsilon(t)\varrho^k(t)\cdot\tilde{\varphi}(t)dt$ обмежена та існує

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^T u^\varepsilon(t)\varrho^k(t)\tilde{\varphi}(t)dt = \int\limits_0^T u(t)\varrho^k(t)\tilde{\varphi}(t)dt.$$

Тоді за властивістю збіжної послідовності $u^\varepsilon(t)$ (лема 4.5) існує $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^T u^\varepsilon(t)\varrho^k(t-\varepsilon)\tilde{\varphi}_\varepsilon(t)dt$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^T u^\varepsilon(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\varrho^k(t-\varepsilon)\tilde{\varphi}_\varepsilon(t)\Big)dt = \int\limits_0^T u(t)\varrho^k(t)\tilde{\varphi}(t)dt\,.$$

З умови 2 теореми так само одержуємо існування

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^T g(t,u^\varepsilon(t))\psi_\varepsilon(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^T g(t,u^\varepsilon(t))(\lim_{\varepsilon\to 0}\psi_\varepsilon(t))dt = \int\limits_0^T g(t,u(t))\psi(t)dt\,.$$

В (4.33) при вибраній за функцією $\psi(t)$ функції $\psi_\varepsilon(t)$ спрямуємо ε до нуля. Зі встановленого вище існування границі при $\varepsilon\to 0$ лівої частини рівності (4.33), а отже, й правої, випливає існування

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u^\varepsilon(\varepsilon)\Big[f_{1-\beta}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(t)\Big]|_{t=\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}u^\varepsilon(\varepsilon)\varphi =$$

$$= \int\limits_0^T u(t)\varrho^k(t)\tilde{\varphi}(t)dt - \int\limits_0^T g(t,u(t))\psi(t)dt.$$

Використали лему 4.3. За побудовою $\tilde{\varphi}(t)$ та $\psi(t)$ (вигляду (4.25)) є лінійними функціями φ та права частина попередньої рівності визначає шуканий лінійний оператор u_0 на V. З формули (4.33)

$$u_0\varphi = \int\limits_0^T u(t)(\hat{L}_\beta\psi)(t)dt - \int\limits_0^T g(t,u(t))\psi(t)dt, \tag{4.34}$$

де $\psi(t)$ має вигляд (4.25).

З доведення леми 4.3 (див. примітки до леми) видно, що вибрана функція $\psi(t)$ є лінійною функцією $(A^l\varphi_0)(t)$, $l=0,\dots,k$, а $\rho^{-k}(t)(\hat{L}_\beta\psi)(t) = \tilde{\varphi}(t)$,

де $\tilde{\varphi}$ лінійно виражається через φ_0 та $(A^l\varphi_0)(t)$, $l = 1, \ldots, k+1$, Функція φ_0 – довільне продовження φ з V до функції з $D^0(V)$, таке що $\varphi_0(0) = \varphi$. Можна вибрати $\varphi_0(t) = \eta(t)\varphi$, де $\eta \in D^0[0,T]$, $\eta(t) = 1$ для $t \in [0, \varepsilon_0/2]$, $\eta(t) = 0$ для $t \in [\varepsilon_0, T]$. Отож, встановлено (4.30). $\square$

Означення 4.1. Скажемо, що оператор u_0 має порядок $s_A(u_0) \le s_0$ щодо оператора A, якщо існує така додатна стала $\hat{C}$, що для довільної $\varphi \in V$

$$\|u_0\varphi\|_V \le \hat{C}\|\varphi\|'_{s_0}, \qquad \text{де } ||\psi||'_{s_0} = \max_{0\le l\le s_0} ||A^l\psi||_V .$$

Наслідок 4.1. *За умов теореми 4.8 оператор u_0 на V має порядок $\le k+1$ щодо A.*

Справді, з (4.34) одержуємо, що для довільного елемента $\varphi \in V$

$$\|u_0\varphi\|_V \le \tilde{C}\|u\|_k \cdot \|\varphi\|'_{k+1} + \tilde{C}\int\limits_0^T ||g(t,u(t))||_V dt \cdot \|\varphi\|'_k \le \hat{C}\|\varphi\|'_{k+1},$$

де $C, \tilde{C}$, $\hat{C} = \hat{C}(u,k)$ – додатні сталі.

Примітки: 1. Функція u в умовах 1 та 2 є регулярною узагальненою функцією з простору $D_k{}'(V)$ – простору узагальнених функцій f із $D'(\mathbb{R};V)$ з носіями в $[0,T]$ (та значеннями в V) із збіжністю: $f_m \to 0$, $m \to +\infty$ в $D_k{}'(V)$, якщо $f_m \to 0$, $m \to +\infty$ в $D'(\mathbb{R};V)$ і носії f_m належать $[0,T]$ ([6, с. 27]). Прикладом регулярної узагальненої функції з $D_k{}'(V)$ є функція з $M_k(V)$.

2. Враховуючи лему 4.4 та примітку 2 до леми 4.3, умову (4.30) можна подати у вигляді: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}[\varrho^k(\varepsilon)u^\varepsilon(\varepsilon)\varphi_0(\varepsilon)] = u_0\varphi$ для довільних $\varphi \in V$, $\varphi_0 \in D_k(V)$ і такої, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}[\varrho^{-k}(\varepsilon)\varphi_0(\varepsilon)] = \varphi$, наприклад, $\varphi_0(\varepsilon) = \varrho^k(\varepsilon)\varphi$.

3. З леми 4.4 випливає, що умова 1 теореми еквівалентна умові $u^\varepsilon \to u$ в $M_k(V)$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 4.9. *Нехай функція $g(t,z)$ визначена при $t \in (0,T]$, $z \in R$, $g \in C\big((0,T] \times \mathbb{R}; V\big)$, функції $u^\varepsilon \in C^\beta_\varepsilon(V)$ є розв'язками рівнянь (4.29)*

та задовольняють умову (4.30). Тоді виконання одного з тверджень 1, 2 теореми 4.8 зумовлює виконання іншого.

Доведення. Застосовуючи лему 4.5 до послідовності u^ε, вибираючи послідовність $\varphi_\varepsilon = (f_{1-\beta}\hat{*}\psi_\varepsilon)(\varepsilon)$, що збігається до φ у V при $\varepsilon \to 0$, за умови (4.30) одержуємо існування границі при $\varepsilon \to 0$ правої частини (4.33), а тому й лівої, тобто існування

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^T [u^\varepsilon(t)(\hat{L}_\beta\psi_\varepsilon)(t) - g(t,u^\varepsilon(t))\psi_\varepsilon(t)]dt.$$

Зауважимо, що $\hat{L}_\beta\psi \in D_k(V)$ при $\psi \in X_k(V)$. Використовуючи лему 4.5, звідси одержуємо твердження теореми.

Припущення (S): $A \in \mathcal{A}$, $\beta \in (0,1)$, $u_0 \in \mathcal{L}(V)$, $s_A(u_0) \le s$, $k \ge s-1$,

$$g \in C\big((0,T]\times\mathbb{R};V\big), \quad \exists \int\limits_0^T g(t,u(t))\psi(t)dt < +\infty \ \ \forall\psi \in X_k(V). \tag{4.35}$$

За припущення (S) розглянемо задачу Коші (задачу K)

$$(L_\beta u)(t) = g(t,u(t)), \quad t \in (0,T], \tag{4.36}$$

$$u(0) = u_0. \tag{4.37}$$

Формулювання 1 задачі: знайти таку функцію $u \in M_k(V)$, що задовольняє тотожність

$$\int\limits_0^T u(t)(\hat{L}_\beta\psi)(t)dt = \int\limits_0^T g(t,u(t))\psi(t)dt + u_0\int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt \quad \forall\psi \in X_k(V). \tag{4.38}$$

Зауважимо, що таке формулювання задачі узгоджується з концепцією узагальненого розв'язання операторних рівнянь у школі Ю. І. Петуніна [116] та крайових задач для диференціальних рівнянь у школі Я.Б. Лопатинського.

Формулювання 2 задачі: знайти функцію $u \in M_k$, що є границею (в M_k) послідовності розв'язків $u^\varepsilon \in C_\varepsilon^\beta$ задач

$$(L_\beta^\varepsilon u)(t) = g(t,u(t)), \quad t \in (\varepsilon,T], \tag{4.39}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u^{\varepsilon}(\varepsilon)\varphi = u_0\varphi \quad \forall\varphi\in V. \tag{4.40}$$

Примітка. З теореми 4.8 випливає можливість виконання умови (4.40) для границі (в M_k) послідовності $u^{\varepsilon}\in C^{\beta}_{\varepsilon}$ розв'язків рівнянь (4.39), якщо виконується (4.35) та для довільної $\psi\in X_k$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T} g(t,u^{\varepsilon}(t))\psi(t)dt \to \int\limits_{0}^{T} g(t,u(t))\psi(t)dt, \quad \varepsilon\to 0. \tag{4.41}$$

З наслідку 4.1 випливає можливість виконання умови (4.40) при $s_A(u_0)\le k+1$ за умови (4.41).

Ясно, що функція $g(\cdot,u(\cdot))\in C\big((0,T];V\big)$ при $u\in\tilde{C}^{\beta}(V)$.

Теорема 4.10. *Функція $u\in M_k\cap\tilde{C}^{\beta}$ є розв'язком задачі Коші у формулюванні 1 тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком цієї задачі у формулюванні 2.*

Доведення. Нехай функція $u\in M_k\cap\tilde{C}^{\beta}$ задовольняє умову (4.35) та є розв'язком задачі Коші (4.36), (4.37) у формулюванні 2, а отже, є границею (в M_k) послідовності розв'язків $u^{\varepsilon}\in C^{\beta}_{\varepsilon}$ задач (4.39), (4.40). Для довільної $\psi\in X_k$ визначимо $\psi_{\varepsilon}(t)=\psi(t-\varepsilon)$, $t\in[\varepsilon,T+\varepsilon]$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0/2]$. З умов теореми та з припущення (4.35) за теоремою 4.8 одержуємо існування границі при $\varepsilon\to 0$ кожного доданку у лівій частині рівності (4.33).

З умови (4.40) та примітки до леми 4.5 випливає існування

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u^{\varepsilon}(\varepsilon)(f_{1-\beta}\hat{*}\psi_{\varepsilon})(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} u^{\varepsilon}(\varepsilon)\int\limits_{0}^{T} f_{1-\beta}(\tau)\psi(\tau)d\tau =$$

$$= u_0\int\limits_{0}^{T} f_{1-\beta}(\tau)\psi(\tau)d\tau \quad \forall\psi\in X_k(V).$$

Так що після переходу в (4.33) до границі при $\varepsilon\to 0$ отримаємо тотожність (4.38). Отже, розв'язок задачі Коші у формулюванні 2 є розв'язком цієї задачі у формулюванні 1.

Тепер нехай $u\in M_k\cap\tilde{C}^{\beta}$ та є розв'язком задачі К у формулюванні 1, а отже, задовольняє тотожність (4.38). Нехай

$D\big((\varepsilon,T);V\big)=\{\varphi\in D^0\big([0,T];V\big); supp\varphi\subset(\varepsilon,T)\}$.

Із (4.38) для $\psi \in D\big((\varepsilon,T);V\big)$ (очевидно, що $D\big((\varepsilon,T);V\big) \subset X_k(V)$ для всіх $k \geq 0$) одержуємо

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T} u(t)(\hat{L}_\beta\psi)(t)dt = \int\limits_{\varepsilon}^{T} g(t,u(t))\psi(t)dt,$$

а з формули Гріна для $v = u \in \tilde{C}^\beta$, $\psi \in D\big((\varepsilon,T);V\big)$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T} u(t)(\hat{L}_\beta\psi)(t)dt = \int\limits_{\varepsilon}^{T} (L_\beta^\varepsilon u)(t)\psi(t)dt \quad \forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_0).$$

Отже,

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T} (L_\beta^\varepsilon u)(t)\psi(t)dt = \int\limits_{\varepsilon}^{T} g(t,u(t))\psi(t)dt \ \ \forall\, \psi \in D\big((\varepsilon,T);V\big).$$

Звідси за лемою Дюбуа-Реймона [6, ст. 28] $(L_\beta^\varepsilon u)(t) = g(t,u(t))$ майже для всіх $t \in (\varepsilon,T]$, а з того, що $u \in C_\varepsilon^\beta$ та з неперервності функції g одержуємо

$$(L_\beta^\varepsilon u)(t) = g(t,u(t)) \text{ для всіх } t \in (\varepsilon,T].$$

Ми показали, що розв'язок $u \in M_k \cap \tilde{C}^\beta$ задачі K у формулюванні 1 задовольняє кожне з рівнянь (4.39). Оскільки $u \in M_k(V) \cap \tilde{C}^\beta$, $g(t,u(t)) \in C\big((0,T];V\big)$ та виконується (4.35), то існує границя при $\varepsilon \to 0$ лівої частини рівності (4.33), яка дорівнює

$$\int\limits_{0}^{T} [u(t)(\hat{L}_\beta\psi)(t) - g(t,u(t))\psi(t)]dt.$$

Тоді існує $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u(\varepsilon)(f_{1-\beta}\hat{*}\psi_\varepsilon)(\varepsilon) =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} u(\varepsilon)\int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt = \int\limits_{0}^{T}[u(t)(\hat{L}_\beta\psi)(t) - g(t,u(t))\psi(t)]dt\,.$$

Із (4.38) та (4.33) для довільних $\psi \in X_k(V)$ та розв'язку $u \in M_k \bigcap \tilde{C}^\beta(V)$ задачі K у формулюванні 1 матимемо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(\varepsilon)\int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt = u_0\int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt. \tag{4.42}$$

За лемою 4.3 для довільної $\varphi \in V$ існує така $\psi \in X_k$, що

$$(f_{1-\beta}\hat{*}\psi)(0) = \int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt = \varphi\,.$$

Тому з (4.42) випливає (4.40) – розв'язок u задачі (4.36), (4.37) у формулюванні 1 задовольняє початкову умову (4.40). Теорема доведена.

4.7 Задача Коші для лінійного рівняння з дробовою похідною у вагових просторах узагальнених функцій

Крайові задачі та задача Коші для гіпоеліптичних рівнянь з частинними похідними у просторах узагальнених функцій досліджені у [3, 60, 19]. Абстрактна задача Коші у просторах узагальнених функцій досліджена в [15, 16].

У цьому підрозділі встановлено розв'язність задачі Коші для абстрактних рівнянь із дробовою похідною при заданих початкових даних із V' та узагальненій функції в правій частині рівняння. Розв'язки такої задачі можуть мати сильні степеневі особливості при $t = 0$. Результати [56] для диференціальних рівнянь із дробовою похідною поширено на абстрактні параболічні рівняння. Зауважимо, що точні оцінки розв'язків загальних диференціальних параболічних задач зі слабими особливостями при $t = 0$ одержані у [136].

Означення 4.2. Подібно до [149, с. 46], кажемо, що узагальнена функція $f \in V'$ має порядок сингулярності $s_A(u_0) \le s_0$ щодо оператора A, якщо існує така додатна стала $\hat{C}$, що для довільної $\varphi \in V$

$$|(u_0, \varphi)| \le \hat{C}\|\varphi\|'_{s_0} = \max_{0\le l\le s_0} ||A^l\varphi||_V\,.$$

Припущення (S')**:** $A \in \mathcal{A}$, $\beta \in (0,1)$,

$$u_0 \in V'\,,\ s_A(u_0) \le s\,, \quad k \ge s\beta\,,\ f \in X'_k(V)\,.$$

За припущення (S') розглянемо задачу Коші

$$(L_\beta u)(t) = f(t), \quad t \in (0,T], \tag{4.43}$$

$$u(0) = u_0. \tag{4.44}$$

Формулювання задачі Коші за припущення (S'): знайти таку функцію $u \in D'_k(V)$, що задовольняє тотожність

$$(u, \hat{L}_\beta \psi) = (f, \psi) + (u_0, \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt) \quad \forall \psi \in X_k(V). \tag{4.45}$$

Означення 4.3. Вектор-функцією Гріна задачі Коші назвемо таку вектор-функцію $(G_0(t), G_1(t))$, що при довільних $h \in V$, $f \in C^\beta(V)$ і такій, що існує $G_0 * f \in C\big([0,T]; V\big)$, функція

$$v(t) = G_1(t)h + (G_0 * f)(t), \quad t \in [0,T] \tag{4.46}$$

є розв'язком (із $C^\beta(V)$) задачі

$$L^{reg}_\beta v(t) = f(t), \quad v(0) = h. \tag{4.47}$$

Лема 4.7. *Правильні співвідношення*

$$\int\limits_0^T G_1(t)(\hat{L}_\beta \psi)(t)dt = \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt,$$

$$\big[G_0 \hat{*} (\hat{L}_\beta \psi)\big](t) = \psi(t), \quad \forall \psi \in C^\beta(V).$$

Доведення. Підставляючи у формулу Гріна (4.28) замість $v(t)$ функцію (4.46)– розв'язок задачі (4.47) при f як у означенні 4.3, матимемо

$$\int\limits_0^T [G_1(t)h + (G_0 * f)(t)](\hat{L}_\beta \psi)(t)dt = \int\limits_0^T \psi(t)f(t)dt - \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt\, h.$$

Враховуючи, що

$$\int\limits_0^T (G_0 * f)(t)(\hat{L}_\beta \psi)(t)dt = \int\limits_0^T \big(\int\limits_0^t G_0(t-\tau)f(\tau)d\tau\big)(\hat{L}_\beta \psi)(t)dt =$$

$$\int\limits_0^T \big(\int\limits_\tau^T (\hat{L}_\beta \psi)(t)G_0(t-\tau)dt\big)f(\tau)d\tau = \int\limits_0^T [G_0 \hat{*} (\hat{L}_\beta \psi)](\tau)f(\tau)d\tau,$$

за довільністю функції f, елемента $h \in V$, із попередньої тотожності одержуємо твердження леми.

Примітка. Для довільної $\varphi \in D_k(V)$ та функції $\psi \in X_k(V)$, визначеної лемою 4.4, матимемо

$$\int\limits_0^T G_1(t)\varphi(t)dt = \int\limits_0^T G_1(t)(\hat{L}_\beta\psi)(t)dt,$$

а тоді за лемою 4.4

$$\int\limits_0^T G_1(t)\varphi(t)dt = \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt = \big[f_{1-\beta}(t)\hat{*}\psi(t)\big]|_{t=0} =$$

$$= \Big[f_{1-\beta}(t)\hat{*}\Big((f_{\beta-1} * S_{\beta,A})\hat{*}\varphi\Big)(t)\Big]|_{t=0} = \Big[S_{\beta,A}(t))\hat{*}\varphi(t)\Big]|_{t=0} =$$

$$= \int\limits_0^T S_{\beta,A}(t)\varphi(t)dt.$$

Отож, $\int\limits_0^T G_1(t)\varphi(t)dt = \int\limits_0^T S_{\beta,A}(t)\varphi(t)dt$ для довільної $\varphi \in D_k(V)$.

Аналогічно, для довільної $\varphi \in D_k(V)$ та функції $\psi \in X_k(V)$, визначеної лемою 4.4, $\big[G_0\hat{*}\varphi\big](t) = \psi(t) = \Big((f_{\beta-1} * S_{\beta,A})\hat{*}\varphi\Big)(t)$, а отже,

$$G_0(t) = f_{\beta-1}(t) * S_{\beta,A}(t).$$

Теорема 4.11. *За припущення (S') існує єдиний розв'язок $u \in D'_k(V)$ задачі (4.43)-(4.44). Він заданий формулою*

$$(u,\varphi) = (f, G_0\hat{*}\varphi) + (u_0, (G_1\hat{*}\varphi)(0)) \quad \forall\varphi \in D_k(V). \tag{4.48}$$

Примітки: 1. Враховуючи попередню примітку та теорему 4.11, єдиний розв'язок (4.48) задачі можна подати у вигляді

$$(u,\varphi) = (f, (f_{\beta-1} * S_{\beta,A}(t))\hat{*}\varphi) + (u_0, \int\limits_0^T S_{\beta,A}(t)\varphi(t)dt) \quad \forall\varphi \in D_k(V). \tag{4.49}$$

2. Із формули (4.49) одержуємо, що за умов

$u_0 \in V$, $f_{\beta-1} * f \in C\big([0,T];V\big) <=> f = f_{1-\beta} * g$, де $g \in C\big([0,T];V\big)$,

єдиний розв'язок задачі (4.43), (4.44) виражається відомою формулою

$$u = f_{\beta-1} * S_{\beta,A}(t) * f + S_{\beta,A}(t)u_0 = S_{\beta,A}(t) * g + S_{\beta,A}(t)u_0 \,.$$

Доведення теореми 4.11. З означення порядку сингулярності

$$|(u_0, S_{\beta,A}(t)h)| \le \hat{C} \max_{0\le l\le k} \sup_{t\in(0,T]} \|A^l S_{\beta,A}(t)h\|_V \,, \quad h \in V \,.$$

Знайдемо оцінки $||A^l S_{\beta,A}(t)h||_V, \quad t \in (0,T], \quad h \in V$.

Було показано, що $f_{-\beta}(t) * S_\beta(t)h = AS_{\beta,A}(t)h + f_{1-\beta}(t)h$ для всіх $h \in V$. Звідси

$$AS_{\beta,A}(t)h = f_{-\beta}(t) * S_{\beta,A}(t)h - f_{1-\beta}(t)h = f_{1-\beta}(t) * S'_{\beta,A}(t)h - f_{1-\beta}(t)h \,,$$

а тоді

$$AS'_{\beta,A}(t)h = f_{1-\beta}(t) * S''_{\beta,A}(t)h - f_{-\beta}(t)h \,,$$

$$\dots \,,$$

$$AS^{(l)}_{\beta,A}(t)h = f_{1-\beta}(t) * S^{(l+1)}_{\beta,A}(t)h - f_{1-\beta-l}(t)h \quad \forall h \in V \,,\ l = 1, 2, \dots, s \,.$$

Звідси

$$A^2 S_{\beta,A}(t)h = A(AS_{\beta,A}(t)h) = A[f_{1-\beta}(t) * S'_{\beta,A}(t)h - f_{1-\beta}(t)h] =$$

$$= f_{1-\beta} * \big(AS'_{\beta,A}(t)h\big) - f_{1-\beta}(t)Ah =$$

$$= f_{1-\beta}(t) * \big(f_{1-\beta}(t) * S''_{\beta,A}(t)h - f_{-\beta}(t)h\big) - f_{1-\beta}(t)Ah =$$

$$= f_{2-2\beta}(t) * S''_{\beta,A}(t)h - f_{1-2\beta}(t)h - f_{1-\beta}(t)Ah \,,$$

$$A^3 S_{\beta,A}(t)h = A(A^2 S_{\beta,A}(t)h) =$$

$$= A[f_{2-2\beta}(t) * S''_{\beta,A}(t)h - f_{1-2\beta}(t)h - f_{1-\beta}(t)Ah] =$$

$$= f_{2-2\beta}(t) * (AS''_{\beta,A}(t)h) - f_{1-2\beta}(t)Ah - f_{1-\beta}(t)A^2h =$$

$$= f_{2-2\beta}(t) * \big(f_{1-\beta}(t) * S^{(3)}_{\beta,A}(t)h - f_{-\beta-1}(t)h\big) - f_{1-2\beta}(t)Ah - f_{1-\beta}(t)A^2h =$$

$$= f_{3-3\beta}(t) * S^{(3)}_{\beta,A}(t)h - f_{1-3\beta}(t)h - f_{1-2\beta}(t)Ah - f_{1-\beta}(t)A^2h \,,$$

$$\dots$$

$$A^l S_{\beta,A}(t)h = f_{l-l\beta}(t) * S^{(l)}_{\beta,A}(t)h - f_{1-l\beta}(t)h - f_{1-(l-1)\beta}(t)Ah - \dots - f_{1-\beta}(t)A^{l-1}h$$

для всіх $h \in V, \quad l = 1, 2, \dots, s$.

Зауважимо, що функції $t^{l\beta}f_{1-l\beta}(t)$ обмежені для всіх $l \in \mathbb{N}$.

У [177] доведено існування таких додатних сталих C', C_m, $m \in \mathbb{N}$, що

$$||S_{\beta,A}(t)||_{\mathcal{L}(V)} \leq \frac{C'}{1+|r(A)|t^{\beta}}, \quad t \geq 0, \tag{4.50}$$

$$||(\frac{d}{dt})^m S_{\beta,A}(t)||_{\mathcal{L}(V)} \leq \frac{C_m}{t^m}, \quad t > 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4.51}$$

Враховуючи оцінки (4.50), (4.51), одержуємо

$$||A^l S_{\beta,A}(t)h||_V \leq \int_0^t f_{l-l\beta}(t-\tau)||S^{(l)}_{\beta,A}(\tau)h||_V d\tau +$$

$$+C^{\beta}\big(t^{-l\beta}||h||_V + \cdots + t^{-\beta}||A^{l-1}h||_V\big), \ l = 1, 2, \ldots, s \text{ для всіх } h \in V,$$

Звідси за умови на число $k: \ k > s\beta$ одержуємо обмеженість усіх інтегралів $\int\limits_0^T \varrho^k(t)\|A^l S_{\beta,A}(t)\|_{\mathcal{L}(V)}dt$, $0 \leq l \leq s$ та скінченність

$$\Big|\Big(u_0, (G_1 \hat{*} \varphi)(0)\Big)\Big| = \Big|\Big(u_0, \int\limits_0^T S_{\beta,A}(t)\varphi(t)dt\Big)\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_0^T (u_0, S_{\beta,A}(t)\varphi(t))dt\Big| \leq \hat{C}\int\limits_0^T \varrho^k(t)\|S_{\beta,A}(t)\|_{\mathcal{L}(V)}dt \quad \forall \varphi \in D_k(V).$$

Згідно з приміткою, функція $G_0 \hat{*} \varphi = \psi \in X_k(V)$ при $\varphi \in D_k(V)$ (ψ визначена лемою 4.4). Отже, формулою (4.48) однозначно визначено $u \in D'_k(V)$.

Покажемо, що функція (4.48) задовольняє тотожність (4.45) для кожної $\psi \in X_k(V)$. Використовуючи лему 4.4, для довільної $\psi \in X_k(V)$ матимемо

$$(u, \hat{L}_\beta \psi) = (f, G_0 \hat{*} (\hat{L}_\beta \psi)) + (u_0, (G_1 \hat{*} \hat{L}_\beta \psi)(0)) =$$

$$= (f, \psi) + \Big(u_0, \int\limits_0^T G_1(t)(\hat{L}_\beta \psi)(t)dt\Big) = (f, \psi) + \Big(u_0, \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt\Big).$$

Ми показали, що функція (4.48) є розв'язком задачі (4.43), (4.44).

Якщо u_1, u_2 – розв'язки задачі (4.43)-(4.44), $u = u_1 - u_2$, то $u \in D'_k(V)$ та задовольняє умову $(u, \hat{L}_\beta \psi) = 0$ для кожної $\psi \in X_k(V)$. Тоді за лемою 4.4 $(u, \varphi) = 0$ для довільної $\varphi \in D_k(V)$, тобто $u = 0$ у $D'_k(V)$. $\square$

Окремо вивчимо властивості розв'язку задачі Коші для лінійного однорідного рівняння з дробовою похідною за часом при узагальненій функції в початковій умові.

Припущення (S_β): $A \in \mathcal{A}$, $\beta \in (0,1)$, $u_0 \in V'$, $s_A(u_0) \le s$, $k \ge s\beta$.

За припущення (S_β) розглянемо задачу Коші

$$(L_\beta u)(t) = 0, \quad t \in (0,T], \tag{4.52}$$

$$u(0) = u_0. \tag{4.53}$$

Теорема 4.12. *За припущення (S_β) існує єдиний розв'язок $u \in C^\beta \cap M_k$ задачі Коші (4.52),(4.53). Він визначений формулою*

$$u(t)h = (u_0, S_{\beta,A}(t)h), \quad t \in (0,T], \quad h \in V. \tag{4.54}$$

Доведення. Оскільки $S_{\beta,A}(t)h \in V$ для довільного елемента $h \in V$, то права частина (4.54) має сенс. З вигляду u та властивостей $S_{\beta,A}(t)$ випливає, що функція (4.54) належить класу C^β. Покажемо, що вона належить простору M_k.

З означення порядку сингулярності

$$|(u_0, S_{\beta,A}(t)h)| \le \hat{C} \max_{0\le l\le s} \sup_{t\in(0,T]} ||A^l S_{\beta,A}(t)h||_V, \quad h \in V.$$

При доведенні теореми 4.11 були знайдені оцінки

$\|A^l S_{\beta,A}(t)h\|_V \le \int_0^t f_{l-l\beta}(t-\tau)\|S^{(l)}_{\beta,A}(\tau)h\|_V d\tau +$

$C_\beta\big(t^{-l\beta}\|h\|_V + \dots + t^{-\beta}\|A^{l-1}h\|_V\big)$, $\quad l = 1,2,\dots,s$ для всіх $h \in V$.

Звідки за умови на число k : $\quad k > s\beta$ одержуємо обмеженість усіх інтегралів $\int\limits_0^T \varrho^k(t)||A^l S_{\beta,A}(t)(t)h||_V dt$, $0 \le l \le s$ та скінченність $||u||_k$.

Покажемо, що функція (4.54) задовольняє тотожність (4.45) при $f = 0$, тобто

$$(u, \hat{L}_\beta \psi) = (u_0, \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt) \quad \forall \psi \in X_k(V). \tag{4.55}$$

Для $v \in C^\beta(V)$ та $\psi \in X_k(V)$ правильна формула Гріна

$$\int\limits_0^T (L^{reg}_\beta v)(t)\psi(t)dt = \int\limits_0^T v(t)(\hat{L}_\beta\psi)(t)dt - \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt \quad v(0).$$

Підставляючи у неї функцію $v(t) = S_{\beta,A}(t)h$ – розв'язок класичної задачі Коші (при $u_0 = h \in V$), для довільних $\psi \in X_k(V)$, $h \in V$ матимемо

$$\int_0^T S_{\beta,A}(t)h(\hat{L}_\beta\psi)(t)dt = \int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dth, \quad t \in (0,T], \quad h \in V, \tag{4.56}$$

а тоді, враховуючи вигляд функції (4.54), її властивості, довільність елемента $h \in V$, аналог теореми Фубіні ([6, с. 59], формула (3.2)) та формулу (4.45), для довільної $\psi \in X_k(V)$ матимемо

$$\int_0^T u \cdot \hat{L}_\beta\psi dt = \int_0^T (u_0, S_{\beta,A}(t))\hat{L}_\beta\psi(t)dt =$$

$$= (u_0, \int_0^T S_{\beta,A}(t)\hat{L}_\beta\psi(t)dt) = (u_0, \int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt).$$

Ми показали, що функція (4.54) є розв'язком задачі (4.52), (4.53).

Доведемо єдиність розв'язку задачі (4.52), (4.53). Якщо u_1, u_2 – два її розв'язки, $u = u_1 - u_2$, то $u \in M_k(V)$ і, згідно з формулюванням 1 задачі, $\int_0^T u\hat{L}_\beta\psi dt = 0$. Тоді за лемою 4.4 $\int_0^T u\varphi dt = 0$ для кожної $\varphi \in D_k(V)$, а отже, $u = 0$ в $M_k(V)$.

Примітка. Так само показуємо, що за припущення (S) при $g = 0$ та $k > \max\{s-1, s\beta\}$ існує єдиний розв'язок $u \in \tilde{C}^\beta \cap M_k$ задачі Коші (4.36), (4.37), тобто задачі Коші для лінійного однорідного рівняння з оператором u_0 порядку $s_A(u_0) \le s$. Розв'язок визначений формулою

$$u(t)h = u_0 S_{\beta,A}(t)h, \quad t \in (0,T], \quad h \in V.$$

Висновки до розділу 4

Знайдено достатні умови класичної розв'язності та максимальної регулярності розв'язків нелінійних операторних рівнянь типу Гаммерштейна з ядрами на комплексних інтерполяційних шкалах, породжених секторіальними операторами. Окремими випадками таких рівнянь є інтегральні рівняння, до яких зводяться задачі Коші для абстрактних півлінійних параболічних рівнянь та абстрактних півлінійних рівнянь із дробовою похідною.

Як окремий випадок звідси одержуємо достатні умови розв'язності та максимальної регулярності розв'язків нормальної крайової задачі для півлінійної параболічної системи рівнянь із дробовою похідною за часом та даними зі значеннями в просторах беселевих потенціалів.

Знайдено нові достатні умови класичної розв'язності задачі Коші для півлінійного абстрактного параболічного рівняння, збуреного на комплексній інтерполяційній шкалі, та достатні умови класичної розв'язності нормальних крайових задач для півлінійних параболічних рівнянь, збурених псевдодиференціальними доданками.

Побудовано наближення розв'язків збурених задач для півлінійних рівнянь розв'язками таких задач із незбуреним оператором.

Знайдено достатні умови існування узагальнених початкових значень розв'язків півлінійних рівнянь з операторами в банаховій алгебрі V та дробовою похідною при збуреннях цієї дробової похідної, а для відповідних лінійних рівнянь встановлено однозначну розв'язність задачі Коші при початкових даних із V' та узагальненій функції в правій частині рівняння з певного вагового функційного простору.

Результати цього розділу опубліковано в [83–88].

Розділ 5

Задача Коші та неоднорідні крайові задачі в просторах узагальнених функцій

Вивчаються задача Коші для диференціальних рівнянь із дробовими похідними як за часовою, так і за просторовими (вже у головній частині) змінними та крайові задачі з неоднорідними крайовими умовами. Доведено теореми існування та єдиності розв'язків у різних просторах узагальнених функцій.

5.1 Задача Коші для рівняння із псевдодиференціальним оператором

У [182] та [155] побудовано відповідно фундаментальний розв'язок $G_0(x,t)$ рівняння

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T] \tag{5.1}$$

з дробовою похідною Рімана-Ліувілля $u_t^{(\beta)}$ та функцію Гріна $G_1(x,t)$ задачі Коші

$$D_t^{\beta}u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = 0, \quad u(x,0) = g_1(x), \quad x \in R^n.$$

Оператор $\mathcal{J}_{-\alpha} = (-\Delta)^{\alpha/2}$ є оберненим до згорткового оператора

$$\mathcal{J}_\alpha = (-\Delta)^{-\alpha/2}: \ (\mathcal{J}_\alpha g)(x) = J_\alpha(x) * g(x) \quad \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

де $J_\alpha(x) = 2^{-\alpha}\pi^{n/2}\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}|x|^{\alpha-n}$, $\Gamma(\lambda)$ – гама-функція. Зауважимо, що

$$(\mathcal{J}_\alpha g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} J_\alpha(x-y)g(y)dy \ \text{ при } \ 0 < \alpha < n\,.$$

За властивістю перетворення Фур'є $\mathcal{F}$ згортки та формулою з [149], с. 156,

$$\mathcal{F}[(-\Delta)^{-\alpha/2}g(x)] = \mathcal{F}[J_\alpha(x)]\mathcal{F}[g(x)] = |\lambda|^{-\alpha}\mathcal{F}[g(x)]\,.$$

Оскільки $\mathcal{J}_{-\alpha}\psi = g <=> \psi = \mathcal{J}_\alpha g <=> \mathcal{F}[\psi] = |\lambda|^{-\alpha}\mathcal{F}[g]$, то

$$\mathcal{F}[\mathcal{J}_{-\alpha}\psi] = \mathcal{F}[g] = |\lambda|^{\alpha}\mathcal{F}[\psi]\,, \text{ а отже, } \mathcal{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}g(x)] = |\lambda|^{\alpha}\mathcal{F}[g(x)]\,.$$

У цьому підрозділі доведено однозначну розв'язність задачі Коші для рівняння (5.1) при $\beta \in (0,1)$ у просторах узагальнених функцій типу D' та вагових просторах узагальнених функцій. Встановлено характер особливостей розв'язку при $t = 0$ залежно від характеру особливостей функцій у правих частинах рівняння та початкової умови.

5.1.1 Формулювання задачі

Позначаємо через $C^{\alpha,\beta}(Q_T)$ клас неперервних обмежених функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$, рівних нулю при $t \geq T$ та з неперервними функціями $(-\Delta v)^{\alpha/2}$, $D_t^\beta v$ в Q_T. Вводимо оператори

$$\hat{L} : (\hat{L}v)(x,t) \equiv f_{-\beta}(t)\hat{*}v(x,t) + (-\Delta)^{\alpha/2}v(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, v \in D(\bar{Q}_T)\,,$$

$$L : (Lv)(x,t) \equiv f_{-\beta}(t) * v(x,t) + (-\Delta)^{\alpha/2}v(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, v \in D'(\bar{Q}_T),$$

$$L^{reg} : (L^{reg}v)(x,t) \equiv D_t^\beta v(x,t) + (-\Delta)^{\alpha/2}v(x,t),\ (x,t) \in Q_T,\ v \in C^{\alpha,\beta}(Q_T)$$

та функційний простір

$$X(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T) : \hat{L}\varphi \in D(\bar{Q}_T)\}\,.$$

З леми 5.3 випливатиме, що $X(\bar{Q}_T)$ непорожній.

Припущення:

$(\mathcal{L}_{\alpha,\beta})$ $\quad \beta \in (0,1), \quad \min\{n,2,\alpha\} > (n-1)/2\,,\ \alpha \neq \beta\,,$

(FU) $\quad F \in X'(\bar{Q}_T)\,,\ u_0 \in \mathcal{E}'(R^n)\,.$

За припущень $(\mathcal{L}_{\alpha,\beta})$ та (FU) вивчаємо задачу Коші

$$(Lu)(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.2}$$

Означення 5.1. Функція $u \in D'(\bar{Q}_T)$, що задовольняє тотожність

$$(u(x,t), (\hat{L}\psi)(x,t)) = (F,\psi) + (u_0(x), \int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt)\ \ \forall\psi \in X(\bar{Q}_T), \tag{5.3}$$

називається розв'язком задачі (5.2).

Зауважимо, що для $u \in C^{\alpha,\beta}(Q_T)$, $\psi \in D(\bar{Q}_T)$ правильна формула Гріна

$$\int\limits_{Q_T} u(x,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt = \tag{5.4}$$

$$\int\limits_{Q_T} (L^{reg}u)(x,t)\psi(x,t)dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,0)dx \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt\,,$$

яка доводиться як лема 4.6. Тому задачу (5.2) можна вважати узагальненням задачі Коші

$$L^{reg}u = g_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{5.5}$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad x \in R^n \tag{5.6}$$

з регулярними даними g_0, g_1. З одержаної нижче теореми 5.1 можна вивести, що при достатньо гладких та фінітних $F = g_0$, $u_0 = g_1$ розв'язки задач (5.2) та (5.5), (5.6) збігаються.

5.1.2 Вектор-функція Гріна.

Означення 5.2. Вектор-функцією Гріна задачі Коші (5.2) називається така пара функцій $(G_0(x,t), G_1(x,t))$, що при достатньо гладких та фінітних g_0, g_1 функція

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)g_0(y,\tau)dy$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(x-y,t)g_1(y)dy, \quad (x,t) \in Q_T \tag{5.7}$$

є класичним (із $C^{\alpha,\beta}(Q_T)$) розв'язком задачі (5.5), (5.6).

З означення $G_1(x,t)$ як ядра Пуассона задачі Коші випливає, що

$$L^{reg}G_1(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \quad G_1(x,0) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.8}$$

Також $LG_0(x,t) = \delta(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$. Тут δ – дельта-функція Дірака.

Якщо підставимо розв'язок (5.7) класичної задачі Коші (5.5), (5.6) в формулу Гріна, то при довільній $\psi \in X(\bar{Q}_T)$ одержимо

$$\int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau) g_0(y,\tau) dy \Big) (\hat{L}\psi)(x,t) dxdt +$$
$$+ \int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(x-y,t) g_1(y) dy \Big) (\hat{L}\psi)(x,t) dxdt =$$
$$= \int\limits_{Q_T} g_0(x,t)\psi(x,t) dxdt + \int\limits_{Q_T} g_1(x) f_{1-\beta}(t) \psi(x,t) dxdt\,,$$

тобто
$$\int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t) dx \Big) g_0(y,\tau) dy d\tau +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{Q_T} G_1(x-y,t)(\hat{L}\psi)(x,t) dxdt \Big) g_1(y) dy =$$
$$= \int\limits_{Q_T} \psi(y,\tau) g_0(y,\tau) dy d\tau + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(y,t) dt \Big) g_1(y) dy.$$

За довільністю g_0, g_1 одержуємо правильність наступної леми.

Лема 5.1. *Для кожної* $\psi \in X(\bar{Q}_T)$

$$\int\limits_\tau^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t) dx = \psi(y,t), \quad (y,t) \in \bar{Q}_T,$$

$$\int\limits_{Q_T} G_1(x-y,t)(\hat{L}\psi)(x,t) dxdt = \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(y,t) dt, \quad (y,t) \in \mathbb{R}^n.$$

Звідси одержуємо, що $\quad G_0(x,t) = f_{\beta-1}(t) * G_1(x,t)\,,\ (x,t) \in Q_T\,.$

Нехай $\quad (\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int\limits_\tau^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t) dx\,,$

$$(\hat{\mathcal{G}}_1\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{Q_T} G_1(x-y,t)\varphi(x,t) dxdt\,, \quad \varphi \in D(\bar{Q}_T)\,.$$

Лема 5.2. $\hat{\mathcal{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)\,, \quad \hat{\mathcal{G}}_1 : D(\bar{Q}_T) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)\,.$

Доведення. Згідно з [182] (формула (13)),

$$G_0(x,t) = \frac{\pi^{n/2} t^{\beta-1}}{|x|^n} H^{2,1}_{2,3} \left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta} \Big| \begin{matrix} (1,1) & (\beta,\beta) & \\ (1,1) & (n/2,\alpha/2) & (1,\alpha/2) \end{matrix} \right), \quad |x| \neq 0, \tag{5.9}$$

а згідно з [155] (формула (33)),

$$G_1(x,t) = \frac{\pi^{n/2}}{|x|^n} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta}\Big|\begin{matrix}(1,1) & (1,\beta) & \\ (1,1) & (n/2,\alpha/2) & (1,\alpha/2)\end{matrix}\right), \quad |x| \neq 0, \quad (5.10)$$

де $H^{m,n}_{p,q}\left(z\Big|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)$–H-функція Фокса [207], і зображення (5.10) правильне принаймні за припущення $(\mathcal{L}_{\alpha,\beta})$.

При $\beta < \alpha$ також функцію $G_1(x,t)$ можна подати рядом [155]

$$G_1(x,t) = \frac{\pi^{n/2}}{|x|^n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta}\right)^{k+1}\frac{\Gamma(n-\alpha-\alpha k/2)}{\Gamma(1-\beta-\beta k/2)\Gamma(\alpha+\alpha k/2)}.$$

Використовуємо позначення із [207] для $H^{m,n}_{p,q}$:

$a^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^m \beta_i - \sum_{i=m+1}^q \beta_i$,

$\Delta^* = \sum_{i=1}^q \beta_i - \sum_{i=1}^p \alpha_i$.

Для обох функцій G_0, G_1 маємо $a^* = 2-\beta$, $\Delta^* = \alpha-\beta$. Тому за теоремою 1.1 [207] при $\beta \neq \alpha$ ($\Delta^* \neq 0$) функції G_0, G_1 існують для всіх $x \neq 0$, $t > 0$.

У [207] побудована асимптотика для H-функцій Фокса. Враховуючи, що виконуються умови (1.6) та (1.3.2) із [207], за теоремою 1.7 із [207] одержуємо оцінки

$$|G_0(x,t)| \leq \frac{C_0}{t^{1-\beta}|x|^n}, \quad |G_1(x,t)| \leq \frac{C_1}{|x|^n} \qquad \text{при } |x|^\alpha > t^\beta.$$

За наслідком з теореми 1.12 [207] одержуємо оцінки при $|x|^\alpha < t^\beta$:

$|G_0(x,t)| \leq \frac{C_0^*}{t|x|^{n-\alpha}} ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}$, якщо $\alpha < n$,

$|G_0(x,t)| \leq \frac{C_0^*}{t^{1-\beta(\frac{\alpha-n}{\alpha})}} ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}$ у випадку $\alpha \geq n$,

$|G_1(x,t)| \leq \frac{C_1^*}{t^\beta|x|^{n-\alpha}} ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}$, якщо $\alpha < n$,

$|G_1(x,t)| \leq \frac{C_1^*}{t^{n\beta/\alpha}} ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}$ для $\alpha \geq n$.

Тут C_0, C_1, C_0^*, C_1^* – певні додатні сталі. У випадку

$$\alpha \neq \frac{n+2l}{\sigma}, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \sigma \in \mathbb{N} \qquad (5.11)$$

правильні такі ж оцінки без логарифмів.

З одержаних вище оцінок випливає інтегровність функцій G_0, G_1 в Q_T, а звідси – неперервність функцій $(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau)$ в Q_T та $(\hat{\mathcal{G}}_1\varphi)(y)$ в $\mathbb{R}^n$ при $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$.

Оскільки $\frac{\partial}{\partial y_i}G_0(x-y,t) = -\frac{\partial}{\partial x_i}G_0(x-y,t)$,
$\frac{\partial}{\partial \tau}G_0(x-y,t-\tau) = -\frac{\partial}{\partial t}G_0(x-y,t-\tau)$
і подібно для похідних вищих порядків, $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$, то для всіх $\bar{\gamma}$

$$D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{Q_T} G_0(x-y,t-\tau)D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)dxdt \quad \text{та} \quad D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,T) = 0$$

за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$v_{\bar{\gamma}}(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)dx\,,\ \varphi \in D(\bar{Q}_T)\,.$$

За цієї умови з попередньої рівності одержимо, що $D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi) \in C(Q_T)$ для довільного мультиіндексу $\bar{\gamma}$, а отже, $\hat{\mathcal{G}}_0\varphi \in C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$ при $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$.

Покажемо рівномірну збіжність інтегралів $v_{\bar{\gamma}}(y,\tau)$ для кожного $\bar{\gamma}$. Розглядаємо для простоти випадок (5.11).

Враховуючи оцінки функції $G_0(x-y,t-\tau)$, фінітність та обмеженість функцій $D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)$ в Q_T, у випадку $\alpha < n$ матимемо

$$|v_{\bar{\gamma}}(y,\tau)| \le \int\limits_{\tau}^{T}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<(t-\tau)^\beta} |G_0(x-y,t-\tau)|\cdot|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|dx +$$

$$+ \int\limits_{x:|x-y|^\alpha>(t-\tau)^\beta} |G_0(x-y,t-\tau)|\cdot|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|dx\Big]dt \le$$

$$\le c_0\int\limits_{\tau}^{T}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<(t-\tau)^\beta} \frac{|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)|x-y|^{n-\alpha}}dx + \int\limits_{x:|x-y|^\alpha>(t-\tau)^\beta} \frac{|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)^{1-\beta}|x-y|^n}dx\Big]dt \le$$

$$\le c_1\Big[\int\limits_{\tau}^{T}\frac{dt}{t-\tau}\int\limits_{0}^{(t-\tau)^{\beta/\alpha}} r^{\alpha-1}dr + \int\limits_{\tau}^{T}\frac{1}{(t-\tau)^{1-\beta}}dt\int\limits_{(t-\tau)^{\beta/\alpha}}^{+\infty}|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|r^{-1}dr\Big] \le$$

$$\le c_2\int\limits_{\tau}^{T}\frac{1}{(t-\tau)^{1-\beta}}[1+|ln(t-\tau)^{\beta/\alpha}|]dt < +\infty\,.$$

Тут і далі c_i, d_i, $i = 0,1,\ldots$ – додатні сталі.

У випадку $\alpha \ge n$ подібно одержуємо

$$|v_{\bar{\gamma}}(y,\tau)| \le c_3\int\limits_{\tau}^{T}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<(t-\tau)^\beta} \frac{|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)^{1-\beta(1-\frac{n}{\alpha})}}dx$$

$$+\int\limits_{x:|x-y|^\alpha>(t-\tau)^\beta}\frac{|D^{\tilde\gamma}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)^{1-\beta}|x-y|^n}dx\Big]dt\le$$

$$\le c_4\int\limits_\tau^T\frac{1}{(t-\tau)^{1-\beta}}[1+|ln(t-\tau)^{\beta/\alpha}|]dt<+\infty\,.$$

Ми довели, що $\hat{\mathcal{G}}_0:D(\bar Q_T)\to C^{\infty,(0)}(\bar Q_T)$.

Враховуючи оцінки функції $G_1(x,t)$, так само показуємо, що $\hat{\mathcal{G}}_1:D(\bar Q_T)\to C^\infty(\mathbb{R}^n)$. При $\varphi\in D(\bar Q_T)$ розглядаємо

$$w_\gamma(y)=\int\limits_0^T dt\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_1(x-y,t)D^\gamma\varphi(x,t)dx=$$

$$\int\limits_0^T dt\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<t^\beta}G_1(x-y,t)D^\gamma\varphi(x,t)dx+\int\limits_0^T dt\int\limits_{x:|x-y|^\alpha>t^\beta}G_1(x-y,t)D^\gamma\varphi(x,t)dx\,.$$

У випадку $\alpha<n$ матимемо

$$|w_\gamma(y)|\le d_0\int\limits_0^T\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<t^\beta}\frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{t^\beta|x-y|^{n-\alpha}}dx+\int\limits_{x:|x-y|^\alpha>t^\beta}\frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Big]dt\le$$

$$\le d_1\Big[\int\limits_0^T\frac{dt}{t^\beta}\int\limits_0^{t^{\beta/\alpha}}r^{\alpha-1}dr+\int\limits_0^T dt\int\limits_{t^{\beta/\alpha}}^{+\infty}|D^\gamma\varphi(x,t)|r^{-1}dr\Big]\le d_2\int\limits_0^T[1+|lnt^{\beta/\alpha}|]dt<+\infty\,.$$

У випадку $\alpha\ge n$

$$|w_\gamma(y)|\le d_3\int\limits_0^T\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<t^\beta}\frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{t^{n\beta/\alpha}}dx+\int\limits_{x:|x-y|^\alpha>t^\beta}\frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Big]dt\le$$

$$\le d_4\int\limits_0^T[1+|lnt^{\beta/\alpha}|]dt<+\infty\,.$$

Лема 5.3. *Для кожної* $\varphi\in D(\bar Q_T)$ *існує така* $\psi\in X(\bar Q_T)$, *що*

$$(\hat L\psi)(x,t)=\varphi(x,t)\,,\ (x,t)\in Q_T\,.$$

Доведення. Показуємо, що шуканою є функція

$$\psi(y,\tau)=\int\limits_\tau^T dt\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dx.$$

Справді, за лемою 5.2 $\psi\in C^{\infty,(0)}(\bar Q_T)$ при $\varphi\in D(\bar Q_T)$,

$$(\hat L\psi)(y,\tau)=\hat L(G_0(x-y,t-\tau),\varphi(x,t))_{Q_T}=\hat L(G_0(x,t),\varphi(x+y,t+\tau))_{Q_T}=$$

$$= (G_0(x,t), (\hat{L}\varphi)(x+y,t+\tau))_{Q_T} = ((LG_0)(x,t), \varphi(x+y,t+\tau))_{Q_T} =$$

$$= (\delta(x,t), \varphi(x+y,t+\tau))_{Q_T} = \varphi(y,\tau)\,,\ (y,\tau) \in Q_T\,.$$

З леми випливає, що $\hat{L}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi) = \varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q}_T)$, а тому що за лемою 5.2 $\hat{\mathcal{G}}_0\varphi \in C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$ при $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q}_T)$, то, об'єднуючи ці результати, одержуємо, що $\hat{\mathcal{G}}_0 : \mathcal{D}(\bar{Q}_T) \to X(\bar{Q}_T)$.

5.1.3 Теореми існування та єдиності.

1.

Теорема 5.1. *За припущень* $(\mathcal{L}_{\alpha,\beta})$, *(FU) існує єдиний розв'язок* $u \in D'(\bar{Q}_T)$ *задачі (5.2). Він визначений формулою*

$$(u,\varphi)_{Q_T} = (F, \hat{\mathcal{G}}_0\varphi)_{Q_T} + (u_0, \hat{\mathcal{G}}_1\varphi)_{Q_T} \quad \forall\varphi \in D(\bar{Q}_T). \tag{5.12}$$

Доведення. На підставі лем 5.2, 5.3 $\hat{\mathcal{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to X(\bar{Q}_T)$, $\hat{\mathcal{G}}_1 : D(\bar{Q}_T) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отож, права частина в формулі (5.12) має сенс і формулою (5.12) визначено $u \in D'(\bar{Q}_T)$.

Підставляючи функцію (5.12) у тотожність (5.3), використовуючи лему 5.1, показуємо, що функція (5.12) є розв'язком задачі (5.2):

$$(u, \hat{L}\psi) = (F, \hat{\mathcal{G}}_0(\hat{L}\psi)) + (u_0, \hat{\mathcal{G}}_1(\hat{L}\psi)) =$$

$$= (F,\psi)_{Q_T} + (u_0(x), \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt) \ \ \forall\psi \in X(\bar{Q}_T)$$

Якщо u_1, u_2 – розв'язки задачі (5.2), то функція $u = u_1 - u_2$ задовольняє умову

$$(u, \hat{L}\psi)_{Q_T} = 0 \quad \forall\psi \in X(\bar{Q}_T)\,.$$

За лемою 5.3 для довільної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ існує така функція $\psi \in X(\bar{Q}_T)$, що $\hat{L}\psi = \varphi$ в Q_T. Тоді з попередньої тотожності $(u,\varphi)_{Q_T} = 0$ для кожної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$, тобто $u = 0$ в $D'(\bar{Q}_T)$. Теорема доведена.

2. Результат теореми 5.1 можна покращити: визначити залежність характеру особливостей розв'язку задачі при $t = 0$ від особливостей правої ча-

стини рівняння та порядку сингулярності узагальненої функції в початковій умові.

Означення 5.3. Узагальнена функція $P \in D'(\mathbb{R}^n)$ має порядок сингулярності $s(P) \le s_0$ ([149] , с. 46), якщо $(P, \varphi) = \sum\limits_{|\gamma| \le s_0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\gamma \varphi(x) P_\gamma(x) dx$ для всіх $\varphi \in D(R^n)$, де $P_\gamma \in L_{1,loc}(R^n)$, $|\gamma| \le s_0$.

Через $\rho(x,t)$ $((x,t) \in \bar{Q}_T)$ позначаємо невід'ємну функцію із $D(\bar{Q}_T)$, додатну в Q_τ, $\tau < T$, що має порядок $t^{\beta/\alpha}$ при $t \to 0$ ($\lim\limits_{t \to 0+} t^{-\frac{\beta}{\alpha}} \rho(x,t) = const$), а також $\rho(x,t) \le 1$ в $\bar{Q}_T$.

Для $k \ge 0$ використовуємо функційні простори:

$$D_k(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C_0^{k,(0)}(\bar{Q}_T)(\varphi \in D(\bar{Q}_T) \text{ при } k \in N \bigcup \{0\} = N_0) : \\ \rho^{|\bar{\gamma}|-k} D^{\bar{\gamma}} \varphi \in C(\bar{Q}_T) \quad \forall \bar{\gamma} : |\bar{\gamma}| \le k\},$$

$$X_k(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C^{\overline{k+\alpha},(0)}(\bar{Q}_T)(\varphi \in C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T) \text{ при } k \in \mathbb{Z}_+) : \hat{L}\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)\},$$

де $\bar{p}$ – найбільше ціле число, менше p,

$D'_k(\bar{Q}_T)$, $X'_k(\bar{Q}_T)$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на $D_k(\bar{Q}_T)$, $X_k(\bar{Q}_T)$.

Кажемо, що $\varphi_l \to 0$, $l \to \infty$ в $D_k(\bar{Q}_T)$, якщо $\rho^{|\bar{\gamma}|-k} D^{\bar{\gamma}} \varphi_l \to 0$, $l \to \infty$ рівномірно в $\bar{Q}_T$ для всіх $|\bar{\gamma}| \le k$, $\varphi_l \to 0$, $l \to \infty$ в $X_k(\bar{Q}_T)$, якщо $\varphi_l \to 0$ в $C^{\overline{k+\alpha}}(\bar{Q}_T)$ та $\hat{L}\varphi_l \to 0$ в $D_k(\bar{Q}_T)$.

Зауважимо, що $X_k(\bar{Q}_T)$ непорожній. Це випливає з леми 5.3: функція ψ в лемі 5.3 належить $X_k(\bar{Q}_T)$ при $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$.

До просторів $D_k(\bar{Q}_T)$ належать, зокрема, множини функцій

$$\{\varphi \in D(\bar{Q}_T) : \varphi = \varrho^k \cdot \psi, \psi \in D(\bar{Q}_T)\},$$

а функції зі степеневими особливостями при $t = 0$ вигляду $v = \varrho^{-k} v_0$, де $v_0 \in L_{1,loc}(Q_T)$, належать до вагових просторів узагальнених функцій $D'_k(\bar{Q}_T)$.

Припущення (Fs): $u_0 \in \mathcal{E}'(R^n)$, $s(u_0) \le s$, $k > s - \frac{\alpha}{\beta}$, $F \in X_k(\bar{Q}_T)$.

За припущення (Fs) вивчаємо задачу Коші (5.2) – задачу знаходження функції $u \in D'_k(\bar{Q}_T)$, що задовольняє тотожність (5.3) для довільної $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$.

Теорема 5.2. *За припущень* $(\mathcal{L}_{\alpha,\beta})$, (Fs) *існує єдиний розв'язок* $u \in D'_k(\bar{Q}_T)$ *задачі (5.2). Він визначений формулою (5.12) для довільної* $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$.

Теорема доводиться за схемою доведення теореми 5.1, але замість леми 5.2 використовується наступна

Лема 5.4. *При* $k \geq 0$

$$\hat{\mathcal{G}}_0 : D_k(\bar{Q}_T) \to X_k(\bar{Q}_T)\,, \qquad \hat{\mathcal{G}}_1 : D_k(\bar{Q}_T) \to C^{\overline{k+\frac{\alpha}{\beta}}}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Доведення леми 5.4. Подібно до доведення леми 5.2, враховуючи, що $D^{\bar{\gamma}}\varphi = \rho^{k-|\bar{\gamma}|}\varphi_{k,\bar{\gamma}}$ при $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$, $|\bar{\gamma}| \leq k$, де $\varphi_{k,\bar{\gamma}}$ – неперервні та фінітні функції в $\bar{Q}_T$, у випадку $\alpha < n$ матимемо

$$|D^{\gamma}(\hat{\mathcal{G}}_1\varphi)(y)| = |\int\limits_{Q_T} D^{\gamma}\varphi(x,t)G_1(x-y,t)dxdt| \leq$$

$$\leq d_5 \int\limits_0^T \Big[\int\limits_{x:|x-y|^{\alpha}<t^{\beta}} \frac{t^{(k-|\gamma|)\frac{\beta}{\alpha}}|\varphi_{k,\gamma}(x,t)|}{t^{\beta}|x-y|^{n-\alpha}}dx + \int\limits_{x:|x-y|^{\alpha}>t^{\beta}} \frac{t^{(k-|\gamma|)\frac{\beta}{\alpha}}|\varphi_{k,\bar{\gamma}}(x,t)|}{|x-y|^{n}}dx \Big] dt \leq$$

$$\leq d_6 \int\limits_0^T t^{(k-|\gamma|)\frac{\beta}{\alpha}}|\psi_{k,\gamma}(t)|[1+|lnt^{\beta/\alpha}|]dt\,, \qquad y \in \mathbb{R}^n\,,$$

де $\psi_{k,\gamma}(t)$ – неперервні функції на $[0,T]$.

У випадку $\alpha \geq n$ подібно одержуємо таку ж оцінку.

Одержані інтеграли збігаються при $(k-|\gamma|)\frac{\beta}{\alpha} - \varepsilon > -1 <=> |\gamma| < k + \frac{\alpha}{\beta}(1-\varepsilon)$ та довільному $\varepsilon > 0$, а отже, при $|\gamma| \leq s \leq \overline{k+\frac{\alpha}{\beta}}$. Ми одержали, що $\hat{\mathcal{G}}_1\varphi \in C^{\overline{k+\frac{\alpha}{\beta}}}(\mathbb{R}^n)$ при $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$. Друга частина леми встановлена.

Подібно при $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$, $|\bar{\gamma}| \leq k$ матимемо

$$|D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau)| = |\int\limits_{Q_T} D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)G_0(x-y,t-\tau)dxdt| \leq$$

$$\leq c_5 \int\limits_{\tau}^T \frac{t^{(k-|\bar{\gamma}|)\frac{\beta}{\alpha}}}{(t-\tau)^{1-\beta}}|\psi_{k,\bar{\gamma}}(t)|[1+|ln(t-\tau)^{\beta/\alpha}|]dt\,.$$

Тут $\tilde{\psi}_{k,\bar{\gamma}}(t)$ – неперервні функції на $[0,T]$.

Одержані інтеграли збігаються при $(k-|\overline{\gamma}|)\frac{\beta}{\alpha} + \beta - \varepsilon\frac{\beta}{\alpha} > 0$ та довільному $\varepsilon > 0$, тобто $|\bar{\gamma}| \leq \overline{k+\alpha}$ для всіх $(y,\tau) \in \bar{Q}_T$, а отже, $\hat{\mathcal{G}}_0\varphi \in C^{\overline{k+\alpha}}(\bar{Q}_T)$ при

$\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$. Крім того, розбиваючи інтеграл за (τ, T) на частини $(\tau, 2\tau)$, $(2\tau, T)$, враховуючи, що при $t \in (\tau, 2\tau)$ матимемо $t^{(k-|\bar{\gamma}|)\frac{\beta}{\alpha}} \le c_6 \tau^{(k-|\bar{\gamma}|)\frac{\beta}{\alpha}}$, при $t \in (2\tau, T)$ матимемо $t - \tau > \tau$, а отже, $(t-\tau)^{\beta-1} < c_7 \tau^{\beta-1}$, одержуємо оцінки

$$|D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau)| \le c_8 \Big[\tau^{(k-|\bar{\gamma}|)\frac{\beta}{\alpha}} \int\limits_{\tau}^{2\tau} (t-\tau)^{\beta-1}[1 + |ln(t-\tau)^{\beta/\alpha}|]dt +$$

$$+\tau^{\beta-1} \int\limits_{2\tau}^{T} t^{(k-|\bar{\gamma}|)\frac{\beta}{\alpha}} |\tilde{\psi}_{k,\bar{\gamma}}(t)|[1 + |ln(t-\tau)^{\beta/\alpha}|]dt\Big] \le c_9 \tau^{(k+\alpha-|\bar{\gamma}|)\frac{\beta}{\alpha} - \varepsilon\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Звідси випливає, що $\tau^{(|\bar{\gamma}|-(\overline{k+\alpha}))\frac{\beta}{\alpha}} D^{\gamma}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi) \in C(\bar{Q}_T)$, тобто $\rho^{|\bar{\gamma}|-\overline{(k+\alpha)}} D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi) \in C(\bar{Q}_T)$ для всіх $|\bar{\gamma}| \le \overline{k+\alpha}$, $(y,\tau) \in \bar{Q}_T$, якщо $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$. З леми 5.3 випливає, що $\hat{L}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi) = \varphi$, а отже, $\hat{\mathcal{G}}_0\varphi \in X_k(\bar{Q}_T)$ при $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$.

3. Розглянемо окремо випадок $F = 0$ та уточнимо характер особливостей при $t = 0$ розв'язку задачі Коші. Використовуємо ваговий функційний простір

$$M_k(Q_T) = \{u \in L_{1,loc}(Q_T) : \ \|u\|_k = \int\limits_{Q_T} \rho^k(x,t)|u(x,t)|dxdt < +\infty\}.$$

Це простір регулярних узагальнених функцій із $D'_k(\bar{Q}_T)$: якщо $f \in M_k(Q_T)$, то $(f,\varphi)_{Q_T} = \int\limits_{Q_T} f\varphi dxdt$ для кожної $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$.

Теорема 5.3. *За припущень* $(\mathcal{L}_{\alpha,\beta})$, (Fs) *та* $F = 0$ *існує єдиний розв'язок* $u \in M_k(Q_T)$ *задачі (5.2). Він визначається формулою*

$$u(x,t) = (u_0(y), G_1(x-y,t)), \quad (x,t) \in Q_T. \tag{5.13}$$

Доведення. З теореми 5.2 випливає однозначна розв'язність задачі в просторі $D'_k(\bar{Q}_T)$ та зображення (5.12) розв'язку для довільної $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$. Треба показати, що цей розв'язок можна подати у вигляді (5.13) та що він належить ваговому L_1-простору $M_k(Q_T)$.

За властивостями H-функцій Фокса ([207], 2.2.2) $G_1(x,t)$ – нескінченно диференційовна функція при $(x,t) \ne (0,0)$, а отже, $G_1(x-y,t)$ нескінченно диференційовна при $(x,t) \in Q_T$ і права частина (5.13) визначена.

Використовуючи аналог теореми Фубіні ([6, с. 59, формула (3.2)]), формулу розв'язку та лему 5.1, для довільної $\psi \in X(\bar{Q}_T)$ матимемо

$$\int\limits_{Q_T} u \cdot \hat{L}\psi dxdt = \int\limits_{Q_T} \Big(u_0(y), G_1(x-y,t)\Big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt =$$

$$= \Big(u_0(y), \int\limits_{Q_T} G_1(x-y,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt\Big) = \Big(u_0(y), \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(y,t)dt\Big).$$

Отже, функція (5.13) задовольняє тотожність (5.3) – є розв'язком задачі (5.2).

Щоб довести, що функція (5.13) належить до $M_k(Q_T)$, достатньо довести скінченність $\int\limits_{Q_T} \varrho^k(x,t)u(x,t)dxdt$. Оскільки $\varrho^k \in D_k(\bar{Q}_T)$, то з леми 5.4 випливає існування таких додатних сталих $\widehat{C}_{k,\gamma}$, що

$$|D_y^\gamma \int\limits_{Q_T} \rho^k(x,t) \cdot G_1(x-y,t)dxdt| \le \widehat{C}_{k,\gamma} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad |\gamma| \le s \le \overline{k + \frac{\alpha}{\beta}}. \quad (5.14)$$

Згідно з означенням порядку сингулярності узагальненої функції,

$$(u_0(y), G_1(x-y,t)) = \sum_{|\gamma| \le s} \int\limits_B D_y^\gamma G_1(x-y,t)F_\gamma(y)dy, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (5.15)$$

де $B = supp u_0$, $F_\gamma \in L_1(B)$, $|\gamma| \le s$.

Тепер, враховуючи (5.14) та (5.15), матимемо

$$|\int\limits_{Q_T} \varrho^k(x,t)u(x,t)dxdt| \le$$

$$\le \sum_{|\gamma| \le s} |D_y^\gamma \int\limits_B \Big(\int\limits_{Q_T} \varrho^k(x,t) \cdot G_1(x-y,t)dxdt\Big)| \cdot |F_\gamma(y)|dy \le$$

$$\le \sum_{|\gamma| \le s} \int\limits_B \widehat{C}_{k,\gamma} \cdot |F_\gamma(y)|dy < +\infty.$$

Розв'язність задачі Коші в окремих підпросторах простору D' узагальнених функцій досліджена в [56, 58, 102]. Ці результати наводимо у наступних підрозділах.

5.2 Розв'язок задачі Коші зі значеннями в просторах беселевих потенціалів

1. Встановлюємо існування розв'язку із класу $C_{\alpha,\beta}$ задачі Коші

$$L^{reg}u \equiv D_t^{\beta}u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F_0(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T],$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in R^n, \tag{5.16}$$

з регуляризованою похідною порядку $\beta \in (0,1)$ за часовою змінною, а саме, існування класичного за часовою змінною зі значеннями в просторах беселевих потенціалів розв'язку задачі. Нагадаємо, що існування вектор-функції Гріна за припущення $(L_{\alpha,\beta})$ встановлено в [155], [182].

Із формули (5.12) випливає, що за припущення існування згорток та при виконанні умови

$$(F_0 * G_0)(x,0) = 0 \tag{5.17}$$

функція

$$u(x,t) = F_0(x,t) * G_0(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{5.18}$$

задовольняє рівняння

$$L^{reg}(F_0 * G_0 + u_0 * G_1) = F_0 \tag{5.19}$$

та є єдиним розв'язком задачі (5.16).

За додаткових умов [183] функція (5.18) належить класу $C^{\alpha,\beta}(Q_T)$.

Із врахуванням формули (5.18) одержуємо розв'язність задачі Коші (5.16) у всій шкалі просторів $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ за просторовими змінними.

Лема 5.5. *Функції*

$$g_j(\xi,t,\varrho) = (1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}}\mathcal{F}[G_j](\xi,t), \quad j=0,1$$

при $\varrho \le \alpha$, *кожному* $t \in (0,T]$ *неперервні та обмежені за змінними* $\xi \in \mathbb{R}^n$. *Існують такі додатні сталі* $c_j = c_j(p)$, *що для всіх* $p > 1$, $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$,

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[g_j(\xi,t,\varrho)\mathcal{F}[\varphi]\right]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c_j w_j(t,\varrho)\left\|\varphi\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad t \in (0,T], \quad j=0,1, \tag{5.20}$$

де $w_0(t,\varrho) = t^{\beta-1}\max\{1, t^{-\frac{\beta\varrho}{\alpha}}\}$, $w_1(t,\varrho) = \max\{1, t^{-\frac{\beta\varrho}{\alpha}}\}$ *для кожного* $t \in (0,T]$.

Доведення. Відомо (наприклад, [155]), що

$$\mathcal{F}[G_1](\xi,t) = E_{\beta,1}\left(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta\right), \qquad \mathcal{F}[G_0](\xi,t) = t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta\right),$$

де $E_{\beta,\mu}(z) = \sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{\Gamma(p\beta+\mu)}$ – функція Міттаг-Леффлера [29].

Функція $E_{\beta,\mu}(-z)$ $(z>0)$ нескінченно диференційовна та компактно монотонна при $\beta \in (0,1)$. При $\mu \geq \beta$: $(-1)^k\left(\frac{d}{dz}\right)^k E_{\beta,\mu}(-z) \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$ і правильна оцінка

$$E_{\beta,\mu}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta) \leq \frac{C}{1+a^2|\xi|^\alpha t^\beta}, \quad C = const > 0.$$

Обмеженість функцій $g_j(\xi,t,\varrho)$, $j=0,1$ за змінними $\xi \in \mathbb{R}^n$ при великих значеннях $|\xi|^\alpha t^\beta$ випливає з обмеженості функції

$$\frac{\left(1+z^2\right)^{\frac{\varrho}{2}}}{1+a^2z^\alpha t^\beta} = \frac{z^\varrho\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{\varrho}{2}}}{1+a^2z^\alpha t^\beta} \leq \frac{M_1 t^{-\frac{\beta\varrho}{\alpha}}v^{\frac{\varrho}{\alpha}}}{1+a^2v} \quad (z=|\xi|, v=z^\alpha t^\beta, \quad M_1 = const > 0).$$

Згідно з [131, с. 24] (а також [138, теорема 1.5 на с. 276]), для доведення правильності оцінок (5.20), тобто, що функції $g_j(\xi,t,\varrho)$, $j=0,1$ є мультиплікаторами в $L_p(\mathbb{R}^n)$ за зміннними $\xi \in \mathbb{R}^n$, достатньо показати, що для кожного мультиіндекса $l=(l_1,\ldots,l_n)$, компоненти l_i якого набувають значень 0 або 1, для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in (0,T]$ правильні оцінки

$$\left|\xi^l D_\xi^l g_j(\xi,t,\varrho)\right| \leq c_{l,j}v_j(t,\varrho), \quad j=0,1, \tag{5.21}$$

де $\xi^l = \xi_1^{l_1}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{l_n}$, $D_\xi^l = \frac{\partial^{|l|}}{\partial\xi_1^{l_1}\ldots\partial\xi_n^{l_n}}$, $|l| = l_1+\cdots+l_n$, $v_j(t,\varrho)$ – деякі функції, $c_{l,j}$ – додатні сталі, $j=0,1$.

Відоме зображення [155, 207]

$$E_{\beta,\mu}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta) = H_{1,2}^{1,1}\left(a^2|\xi|^\alpha t^\beta\middle|\begin{matrix}(0,1)\\(0,1)(1-\mu,\beta)\end{matrix}\right)$$

через H-функції Фокса [207].

Для вказанных мультиіндексів l маємо

$$D_\xi^l H_{p,q}^{m,r}(a^2|\xi|^\alpha t^\beta) = \left(\frac{1}{|\xi|}\frac{d}{d|\xi|}\right)^{|l|} H_{p,q}^{m,r}(a^2|\xi|^\alpha t^\beta)\xi^l.$$

Застосовуючи правило диференціювання H-функцій, знаходимо

$$\left(\frac{1}{|\xi|}\frac{d}{d|\xi|}\right)^k H_{1,2}^{1,1}\left(a^2|\xi|^\alpha t^\beta \Big| \begin{array}{l}(0,1)\\(0,1)(1-\mu,\beta)\end{array}\right) =$$

$$(-1)^k|\xi|^{-2k} H_{k+1,k+2}^{k+1,1}\left(a^2|\xi|^\alpha t^\beta \Big| \begin{array}{l}(0,1)(0,\alpha)(2,\alpha)\dots(2k-2,\alpha)\\(2k+1,\alpha)\dots(1,\alpha)(0,1)(1-\mu,\beta)\end{array}\right).$$

Застосовуючи відому асимптотику H–функції при $|\xi|^\alpha t^\beta \to \infty$ [207, теорема 1.7] та при $|\xi|^\alpha t^\beta \to 0$ [207, теорема 1.11], знаходимо оцінки

$$\left|\xi^l D_\xi^l H_{1,2}^{1,1}(a^2|\xi|^\alpha t^\beta)\right| \le \frac{\hat{C}_l}{1+a^2|\xi|^\alpha t^\beta}, \quad \hat{C}_l = const > 0.$$

Крім того,

$$D_\xi^l\big((1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}} E_{\beta,\mu}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta)\big) = \sum_{k=0}^{l} C_{l,\gamma} D_\xi^{l-\gamma}(1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}} D_\xi^\gamma E_{\beta,\mu}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta),$$

$$\xi_j D_{\xi_j}\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{\varrho}{2}} = \varrho\xi_j^2\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{\varrho}{2}-1} = \frac{\varrho\xi_j^2\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{\varrho}{2}}}{1+|\xi|^2} \le \varrho\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{\varrho}{2}},$$

$$\left|\xi^{l-\gamma} D_\xi^{l-\gamma}(1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}}\right| \le \left|\varrho\left(\frac{\varrho}{2}-1\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{\varrho}{2}-|l-\gamma|\right)\right|\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{\varrho}{2}}$$

для вказанных мультиіндексів l,γ, де $C_{l,\gamma} = const > 0$. В результате одержуємо оцінки

$$\left|\xi^l D_\xi^l\big((1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}} E_{\beta,\mu}(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta)\big)\right| \le \frac{C_l(1+|\xi|^2)^{\frac{\varrho}{2}}}{1+a^2|\xi|^\alpha t^\beta}, \quad C_l = const > 0$$

і переконуємось, що функції g_j, $j=0,1$ задовольяють (5.21) з функціями $v_j(t,\varrho) = w_j(t,\varrho)$, $j=0,1$.

Примітка. Функції $g_0(\xi,t,\varrho)$ для $\varrho<\alpha$, $g_1(\xi,t,\alpha)$ для $\varrho\le\alpha$ при кожному $\xi\in\mathbb{R}^n$ інтегровні на $(0,T)$.

Далі c_i ($i=2,3,\dots$) – додатні сталі.

Лема 5.6. *Нехай виконане припущення* $(L_{\alpha,\beta})$, $1 < p < \frac{1}{\beta}$, $r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$. *Тоді існує згортка*

$$(G_1 * \varphi)(x,t) = \int_0^t G_1(x, t-\tau) * \varphi(x)\, d\tau = \int_0^t G_1(x, t-\tau)\, d\tau * \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

яка належить простору $C\big([0,T]; H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *та задовольняє оцінку*

$$\big\|G_1 * \varphi\big\|_{C\left([0,T]; H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le c_2 \big\|\varphi\big\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.22}$$

Доведення. Оцінимо для кожного $t \in [0,T]$ норму

$$\big\|G_1 * \varphi\big\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \big\|\varphi * G_1\big\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \Big\|\mathcal{F}^{-1}\big[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{r+\alpha}{2}} \mathcal{F}[\varphi * G_1]\big]\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

З цією метою розглянемо

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}} \mathcal{F}\left[\int_0^t \varphi(\cdot) * G_1(\cdot, t-\tau)\, d\tau\right]\right]\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \left\{\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}} \mathcal{F}[\varphi(\cdot) * G_1(\cdot, t-\tau)]\right] d\tau\right|^p dx\right\}^{1/p} \le$$

$$\le t^{1-\frac{1}{p}} \left\{\int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^t \left|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}} \mathcal{F}[\varphi(\cdot) * G_1(\cdot, t-\tau)]\right]\right|^p d\tau\right\}^{1/p}.$$

Для всіх $0 \le \tau < t \le T$ маємо

$$h(\cdot, t, \tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}} \mathcal{F}[\varphi(\cdot) * G_1(\cdot, t-\tau)]\right] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{F}[G_1](\xi, t-\tau)\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{r}{2}} \mathcal{F}[\varphi](\xi)\right] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[g_1(\xi, t-\tau, \alpha) \mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{r}{2}} \mathcal{F}[\varphi](\xi)]\big]\right].$$

За лемою 5.5 функція $g_1(\xi, t-\tau, \alpha)$ – мультиплікатор в $L_p(\mathbb{R}^n)$ за змінними ξ. За умовою леми $\mathcal{F}^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{r}{2}} \mathcal{F}[\varphi](\xi)\right] \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Тому

$$\big\|h(\cdot, t, \tau)\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c_1 w_1(t-\tau, \alpha) \, \big\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}} \mathcal{F}[\varphi](\xi)\big] \big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Із попередніх перетворень

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}} \mathcal{F}\left[\int_0^t \varphi(\cdot) * G_1(\cdot, t-\tau)\, d\tau\right]\right]\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\leq t^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \left| h(x,t,\tau) \right|^p dx \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq c_1 t^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha) \left\| \mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}} \mathcal{F}[\varphi](\xi) \right] \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p d\tau \right\}^{1/p},$$

і при $p < 1/\beta$ (умові існування інтегралу $\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha)\, d\tau$) для всіх $t \in [0,T]$, $r \in \mathbb{R}$ одержуємо існування згортки $\int_0^t \varphi(\cdot) * G_1(\cdot, t-\tau)\, d\tau$ в просторі $H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ та оцінку

$$\left\| \int_0^t \varphi(\cdot) * G_1(\cdot, t-\tau)\, d\tau \right\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c_1 t^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha)\, d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left\| \varphi \right\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.23}$$

Отож, $\varphi * G_1 \in C\big([0,T]; H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та правильна оцінка (5.22).

Теорема 5.4. *Нехай виконане припущення* $(L_{\alpha,\beta})$, $1 < p < \frac{1}{\beta}$, $s \in \mathbb{R}$, $u_0 \in H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, $F_0(x,t) = f_{1-\beta}(t) * f(x,t)$, $f \in C\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$.

Тоді існує єдиний розв'язок

$$u(x,t) = f(x,t) * G_1(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T \tag{5.24}$$

задачі (5.16), причому $u \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *та наявна нерівність коерцитивності*

$$\left\| u \right\|_{C_{\alpha,\beta}\left([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq b_0 \left\| f \right\|_{C\left([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + b_1 \left\| u_0 \right\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.25}$$

де b_0, b_1 *– додатні сталі.*

Доведення . Спочатку покажемо існування згорток із формули (5.18) у просторі $C\big([0,T]; H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$.

За умовою теореми

$$(F_0 * G_0)(x,t) = (f_{1-\beta}(t) * f(x,t)) * G_0(x,t) =$$

$$= f(x,t) * (f_{1-\beta}(t) * G_0(x,t)) = (f * G_1)(x,t),$$

якщо остання згортка існує. Її існування випливає з леми 5.6 при $r = s$ та заміні $\varphi \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ функцією $f(x,\tau)$, $(x,\tau) \in Q_T$ класу $C\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$.

В цьому випадку замість нерівностей (5.23) одержуємо нерівності

$$\left\| \int_0^t f(\cdot,\tau) * G_1(\cdot, t-\tau)\, d\tau \right\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq c_1 t^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha) \cdot \left\| f(\cdot,\tau) \right\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq c_1 t^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha) \cdot \max_{\tau\in[0,T]} \left\| f(\cdot,\tau) \right\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq c_1 t^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t w_1^p(t-\tau,\alpha)\, d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left\| f \right\|^p_{C\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)},$$

звідки для всіх $s \in \mathbb{R}$, $p\beta < 1$ випливає, що $f * G_1 \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та оцінка

$$\left\| f * G_1 \right\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq c_4 \left\| f \right\|_{C\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)}. \tag{5.26}$$

Як при доведенні леми 5.6, маємо

$$\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathcal{F}[u_0(\cdot) * G_1(\cdot,t)] \right] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[G_1](\xi,t) \big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathcal{F}[u_0](\xi) \right] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[g_1(\xi,t,0) \mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathcal{F}[u_0](\xi)] \big] \right].$$

За лемою 5.5 функція $g_1(\xi,t,0)$ – мультиплікатор в $L_p(\mathbb{R}^n)$ за змінними ξ. За умовою теореми $\mathcal{F}^{-1}\big[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathcal{F}[u_0](\xi)\big] \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Тому

$$\left\| u_0 * G_1 \right\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \left\| \mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathcal{F}[u_0(\cdot) * G_1(\cdot,t)] \right] \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq c_1 w_1(t,0) \left\| \mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}} \mathcal{F}[u_0](\xi) \big] \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = c_1 \left\| u_0 \right\|_{H^{s+\alpha\theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

Ми врахували, що $w_1(t,0) = 1$. Із одержаних вище нерівностей для всіх $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $t \in [0,T]$ одержуємо нерівність

$$\left\| u_0 * G_1 \right\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c_1 \left\| u_0 \right\|_{H^{s+\alpha}(\mathbb{R}^n)}$$

а отже, існування згортки $u_0 * G_1 \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та оцінку

$$\left\| u_0 * G_1 \right\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq c_1 \left\| u_0 \right\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.27}$$

З формули (5.18), рівності $F_0 * G_0 = f * G_1$, з урахуванням оцінок (5.26), (5.27), одержуємо існування єдиного розв'язку (5.25) задачі (5.16) в класі $C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та оцінку

$$\|u\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le c_1\|u_0\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} + c_4\|f\|_{C\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)}. \tag{5.28}$$

Тому що

$$\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}u]\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s}{2}}|\xi|^{\alpha}\mathcal{F}[u]\right] =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{|\xi|^{\alpha}}{\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{\alpha}{2}}}\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u]\right],$$

за доведеним $\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u]\big] \in L_p(\mathbb{R}^n)$ для кожного $t \in [0,T]$, а функція $\frac{|\xi|^{\alpha}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$ є мультиплікатором в $L_p(\mathbb{R}^n)$, то для всіх $t \in (0,T]$ маємо

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}u]\big]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c_5\left\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u]\big]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Ми одержали, що для розв'язку u (класу $C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$) задачі (5.16) також виконана умова $(-\Delta)^{\alpha/2}u \in C_b\big((0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та правильна оцінка

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2}u\|_{C_b\left((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le c_6\|u\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)}. \tag{5.29}$$

Тому що функція $F_0 * G_0 = f * G_1$ задовольняє умову (5.17), за формулою (5.19) одержуємо

$$D_t^{\beta}u = -a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u + F_0 \in C_b\big((0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$$

та оцінку

$$\|D_t^{\beta}u\|_{C_b\left((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le$$

$$\le \|a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u\|_{C_b\left((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + \|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le$$

$$\le \|a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u\|_{C_b\left((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + c_7\|f\|_{C\left([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)}.$$

Звідси та з оцінок (5.28), (5.28) випливає оцінка (5.24).

Так ми показали, що розв'язок (5.25) задачі (5.16) належить класу $C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$.

Лема 5.7. *Нехай виконане припущення* $(L_{\alpha,\beta})$, $0<\theta<1$, $1<p<\frac{1}{1-\beta\theta}$, $r\in\mathbb{R}$, $\varphi\in H^{r+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)$. *Тоді існує згортка*

$$(G_0*\varphi)(x,t)=\int_0^t G_0(x,t-\tau)*\varphi(x)\,d\tau=\int_0^t G_0(x,t-\tau)\,d\tau*\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

яка належить простору $C\big([0,T];H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *і задовольняє оцінку*

$$\big\|G_0*\varphi\big\|_{C\left([0,T];H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)}\le c_3\big\|\varphi\big\|_{H^{r+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.30}$$

Доведення. Оцінимо для кожного $t\in[0,T]$ норму

$$\big\|G_0*\varphi\big\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}=\big\|\varphi*G_0\big\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}=\Big\|\mathcal{F}^{-1}\big[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}[\varphi*G_0]\big]\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

З цією метою, як при доведенні попередньої леми 5.6, розглядаємо

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}\left[\int_0^t\varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right]\right]\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\le t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}dx\int_0^t\Big|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}[\varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)]\right]\Big|^p\,d\tau\right\}^{1/p}.$$

Для всіх $0\le\tau<t\le T$ маємо

$$h_0(\cdot,t,\tau)=\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}[\varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)]\right]=$$

$$=\mathcal{F}^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{\alpha-\alpha\theta}{2}}\mathcal{F}[G_0](\xi,t-\tau)\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}}\mathcal{F}[\varphi](\xi)\right]=$$

$$=\mathcal{F}^{-1}\left[g_0(\xi,t-\tau,\alpha-\alpha\theta)\mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}}\mathcal{F}[\varphi](\xi)]\big]\right].$$

Згідно з лемою 5.5, функція $g_0(\xi,t-\tau,\alpha-\alpha\theta)$ – мультиплікатор в $L_p(\mathbb{R}^n)$ за змінними ξ. За умовою леми $\mathcal{F}^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}}\mathcal{F}[\varphi](\xi)\right]\in L_p(\mathbb{R}^n)$. Тому

$$\big\|h_0(\cdot,t,\tau)\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le c_0w_0(t-\tau,\alpha-\alpha\theta)\,\Big\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}}\mathcal{F}[\varphi](\xi)\big]\,\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

З попередніх перетворень

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha}{2}}\mathcal{F}\left[\int_0^t\varphi(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right]\right]\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\le t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}\big|h_0(x,t,\tau)\big|^p\,dx\right\}^{1/p}\le$$

$$\leq c_0 t^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^t w_0^p(t-\tau, \alpha-\alpha\theta) \left\| \mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{r+\alpha\theta}{2}} \mathcal{F}[\varphi](\xi)\right] \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p d\tau \right\}^{1/p},$$

і при $p(1-\beta\theta) < 1$ (умові існування інтегралу $\int_0^t w_0^p(t-\tau, \alpha-\alpha\theta)\, d\tau$) для всіх $t \in [0,T]$, $r \in \mathbb{R}$ одержуємо існування згортки $\int_0^t \varphi(\cdot) * G_0(\cdot, t-\tau)\, d\tau$ в просторі $H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ та оцінку

$$\left\| \int_0^t \varphi(\cdot) * G_0(\cdot, t-\tau)\, d\tau \right\|_{H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq c_0 t^{1-\frac{1}{p}} \left[\int_0^t w_0^p(t-\tau, \alpha)\, d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \|\varphi\|_{H^{r+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Отож, $\varphi * G_0 \in C\big([0,T]; H^{r+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та правильна оцінка (5.30).

Теорема 5.5. *Нехай виконане припущення* $(L_{\alpha,\beta})$, $0 < \theta < 1$ $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$ *та* $p(1-\beta\theta) < 1$, $u_0 \in H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, $F_0 \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)\big)$. *Тоді існує єдиний розв'язок*

$$u(x,t) = F_0(x,t) * G_0(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T$$

задачі (5.16), причому $u \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *та*

$$\|u\|_{C_{\alpha,\beta}\left([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq k_0 \|F_0\|_{C\left([0,T]; H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + k_1 \|u_0\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)},$$

де k_0, k_1 *– додатні сталі.*

Доведення теореми 5.5 проводиться за схемою доведення теореми 5.4 з тою різницею, що для доведення існування згортки $F_0 * G_0$ в просторі $C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ використовується лема 5.7.

Зауважимо, що теорема 5.5 правильна і для $\beta = 1 < \alpha$. В цьому випадку $\mathcal{F}[G_0](\xi,t) = \mathcal{F}[G_1](\xi,t) = E_{1,1}(-a^2|\xi|^\alpha t) = e^{-a^2|\xi|^\alpha t}$.

2. Одержаний результат поширюється на випадок правих частин зі значеннями в уточнених шкалах просторів беселевих потенціалів, подібних до введених та вивчених у працях В.А. Михайлеця та А.А. Мурача гільбертових уточнених соболєвських шкал, та на рівняння зі змінними коефіцієнтами.

Нехай $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$, Φ – такий клас додатних функцій $\varphi(z)$, $z \in [1,+\infty)$, що функція

$$\mu(\xi) = \langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)$$

є ваговою для кожного значення $s \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(\eta)} \le c(1+|\xi-\eta|)^r, \quad r>0,$$

де стала c не залежить від ξ та η. Прикладом функцій класу Φ є клас SV визначених на додатній півосі $[b,+\infty)$ повільно змінних на безмежності за Караматою [205] функцій $\varphi(z)$, тобто, згідно з означенням 1.6 ([113], с. 45), вимірних за Борелем на $[b_0,+\infty)$ для кожного $b_0 \ge b$ функцій, які задовольняють умову

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(\lambda z)}{\varphi(z)} = 1 \quad \forall\lambda>0.$$

У [113], с. 61 показано, що при $\varphi \in SV$ функція $\mu(\xi) = \langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)$ є ваговою із $r = |s|+1$ для кожного значення $s \in \mathbb{R}$.

Нехай $s \in \mathbb{R}$, $p>1$, $\varphi \in \Phi$

$$H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n) = \{v \in S'(\mathbb{R}^n) :$$

$$||v||_{s,\varphi,p} = ||\mathcal{F}^{-1}\big[\langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)\mathcal{F}[v]\big]||_{L_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty\}$$

– уточнена шкала просторів беселевих потенціалів – підпростори просторів Хермандера-Волєвіча-Панеяха (див. [8]), які у випадку $\varphi(z) \equiv 1$, $z \in [b,+\infty)$ є просторами беселевих потенціалів,

$$C\big([0,T]; H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big) =$$

$$= \{v : \|v\|_{C\left([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} = \max_{t\in[0,T]} \big\|v(\cdot,t)\big\|_{H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)} < +\infty\}$$

– простір неперервних функцій $v\colon [0,T] \ni t \longmapsto v(\cdot,t) \in H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big) = \{v \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big) :$$

$$D_t^\beta v, (-\Delta)^{\alpha/2} v \in C_b\big((0,T]; H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)\},$$

$$\|v\|_{C_{\alpha,\beta}\left([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} = \max\{\|v\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)},$$

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2} v\|_{C_b\left((0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)}, \|D_t^\beta v\|_{C_b\left((0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)}\}.$$

Теорема 5.6. *Нехай*

$$\beta \in (0,1),\ \alpha > \beta,\ s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \Phi,\ \theta \in (0,1),\ 1 < p < \frac{1}{1-\beta\theta},$$
$$F_0 \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big), \qquad F_1 \in H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n).$$

Тоді існує єдиний розв'язок $u \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *задачі (5.16). Він визначений формулою (5.18) та правильні оцінки*

$$||u||_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq$$
$$\leq C_0||F_0||_{C\left([0,T];H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + C||F_1||_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)},$$
$$||u||_{C_{\alpha,\beta}\left([0,T];H^{s,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq$$
$$\leq b_0||F_0||_{C\left([0,T];H^{s+\alpha\theta,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + b_1||F_1||_{H^{s+\alpha,\varphi,p}(\mathbb{R}^n)}$$

із деякими додатними сталими C_0, C, b_0, b_1 .

Доведення теореми аналогічне до попереднього та наведене у [102].

5.3 Задача Коші у просторах типу S' та зі змінним коефіцієнтом

У цьому підрозділі встановлюємо однозначну розв'язність задачі Коші для рівняння дробової дифузії зі змінним коефіцієнтом та правими частинами із просторів типу S' повільно зростаючих на безмежності узагальнених функцій.

1. Нехай $Q_T = \mathbb{R} \times (0,T]$, $D_S(\bar{Q}_T)$ – підростір тих функцій із $C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$, які за змінною x належать простору $S(\mathbb{R})$,

$(Lv)(x,t) \equiv f_{-\beta}(t) * v(x,t) - a(x,t)v_{xx}(x,t),$

$(\hat{L}v)(x,t) \equiv f_{-\beta}(t)\hat{*}v(x,t) - a(x,t)v_{xx}(x,t)$,

$L^{reg} : (L^{reg}v)(x,t) \equiv D_t^{\beta}v(x,t) - a(x,t)v_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T$,

$X_S(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in D_S(\bar{Q}_T) : \hat{L}\varphi \in D_S(\bar{Q}_T)\}.$

Вивчаємо задачу Коші

$$Lu = F_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.31}$$

За припущень

(LK): $\beta \in (0,1)$, $a \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ та $\inf\limits_{(y,\tau)\in\bar{Q}_T} a(y,\tau) = a_0 > 0$,

(LS): $u_0 \in S'(\mathbb{R})$, $F_0 \in X'_S(\bar{Q}_T)$

під розв'язком задачі (5.31) розуміємо функцію $u \in D'_S(\bar{Q}_T)$, що задовольняє тотожність

$$(u(x,t), (\hat{L}\psi)(x,t)) = (F_0, \psi) + \tag{5.32}$$

$$+(u_0(x), \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt) \qquad \forall \psi \in X_S(\bar{Q}_T).$$

Означення 5.4. Вектор-функцією Гріна задачі Коші (5.31) називається така пара функцій $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y,\tau))$, що при достатньо гладких та фінітних F_0, u_0 функція

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(x,t,y,\tau)F_0(y,\tau)dy + \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x,t,y,0)u_0(y)dy, \quad (x,t) \in Q_T \tag{5.33}$$

є класичним (із $C^{2,\beta}(Q_T)$) розв'язком задачі (5.31).

Нехай

$$(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(x,t,y,\tau)\varphi(x,t)dx\,,$$

$$(\hat{\mathcal{G}}_1\varphi)(y) = \int\limits_0^T dt \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x,t,y,0)\varphi(x,t)dxdt\,, \qquad \varphi \in D(\bar{Q}_T)\,.$$

Лема 5.8. *За припущення (LK)*

$$\hat{\mathcal{G}}_0 : D_S(\bar{Q}_T) \to D_S(\bar{Q}_T)\,, \quad \hat{\mathcal{G}}_1 : D_S(\bar{Q}_T) \to S(\mathbb{R})\,.$$

Доведення. Згідно з [48],

$$|G_0(x,t,y,\tau)| \le \hat{C}_0(t-\tau)^{-\beta/2}exp(-cr(x-y,t-\tau)),$$

$$|G_1(x,t,y,0)| \le \hat{C}_1 t^{-1+\beta/2}exp(-cr(x-y,t))$$

де $r(x-y,t-\tau) = \left(\frac{|x-y|}{(t-\tau)^{\beta/2}}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}$, $\hat{C}_0, \hat{C}_1,$ – деякі додатні сталі.

Тому що $\frac{\partial}{\partial y}G_0(x,t,y,\tau) = -\frac{\partial}{\partial x}G_0(x,t,y,\tau) + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\right)G_0(x,t,y,\tau)$,

$$\tfrac{\partial}{\partial\tau}G_0(x,t,y,\tau) = -\tfrac{\partial}{\partial t}G_0(x-y,t-\tau) + \big(\tfrac{\partial}{\partial\tau} + \tfrac{\partial}{\partial t}\big)G_0(x,t,y,\tau)$$

та подібно для похідних вищих порядків, $\varphi \in D_S(\bar{Q}_T)$, то для всіх $\bar{\gamma}$

$$D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau) =$$

$$\sum_{\alpha\le\gamma,\alpha_0\le\gamma_0} c_{\alpha,\gamma} \int\limits_{Q_T} \big(\tfrac{\partial}{\partial y} + \tfrac{\partial}{\partial x}\big)^{\gamma-\alpha}\big(\tfrac{\partial}{\partial\tau} + \tfrac{\partial}{\partial t}\big)^{\gamma_0-\alpha_0} G_0(x,t,y,\tau) D^{\bar{\alpha}}\varphi(x,t)\,dx\,dt$$ та

$D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,T) = 0$ ($c_{\alpha,\gamma}$ – додатні сталі) за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$v_{\bar{\gamma}}(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}} G_0(x,t,y,\tau) D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)dxdt, \quad (y,\tau)\in\bar{Q}_T, \quad \varphi\in D_S(\bar{Q}_T).$$

Ми врахували, що функції $\big(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\big)^{\gamma-\alpha}\big(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial t}\big)^{\gamma_0-\alpha_0} G_0(x,t,y,\tau)$ мають такі ж оцінки, як $G_0(x,t,y,\tau)$.

З ріномірної обмеженості функцій $y^l v_{\bar{\gamma}}(y,\tau)$ в Q_T для всіх $\varphi\in D_S(\bar{Q}_T)$, $\bar{\gamma}$, l випливає, що $\hat{\mathcal{G}}_0\varphi \in D_S(Q_T)$. Покажемо рівномірну збіжність інтегралів $v_{\bar{\gamma}}(y,\tau)$ та ріномірну обмеженість функцій $y^l v_{\bar{\gamma}}(y,\tau)$ в Q_T для всіх $\bar{\gamma}$, l.

Враховуючи оцінки функції $G_0(x,t,y,\tau)$, матимемо

$$|v_{\bar{\gamma}}(y,\tau)| \le \int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}} |G_0(x,t,y,\tau)|\cdot|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|dx \le$$

$$\le \hat{C}_0 \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\mathbb{R}} \tfrac{|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)^{\beta/2}} exp(-cr(x-y,t-\tau))dx =$$

$$= 2\hat{C}_0(2-\beta)\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{0}^{\infty} |D^{\bar{\gamma}}\varphi(y+z^{1-\frac{\beta}{2}}(t-\tau)^{\beta/2},t)| z^{-\frac{\beta}{2}} exp(-cz)dz.$$

За обмеженістю функцій $x^l D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)$ в Q_T для всіх мультиіндексів $\bar{\gamma}$ та $l\in\mathbb{Z}_+$ матимемо $|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)| \le \frac{d_0}{(2d_1+|x|)^m}$, $\quad m\in\mathbb{Z}_+$. Тут і далі c_i, d_i, $i\in\mathbb{Z}_+$ – додатні сталі. Тоді

$$|y^l D^{\bar{\gamma}}\varphi(y+z^{1-\frac{\beta}{2}}(t-\tau)^{\beta/2},t)| \le \frac{d_0|y|^l}{(2d_1+|y+z^{1-\frac{\beta}{2}}(t-\tau)^{\beta/2}|)^m} \le \frac{d_0|y|^l}{(2d_1+|y|)^m}$$

і при $m\ge l$ матимемо обмеженість функцій $y^l v_{\bar{\gamma}}(y,\tau)$ в Q_T для всіх $\bar{\gamma}$, l:

$|y^l v_{\bar{\gamma}}(y,\tau)| \le c_0 \int\limits_{\tau}^{T}\Big(\int\limits_{0}^{\infty} z^{-\frac{\beta}{2}} exp(-cz)dz\Big)d\tau = c_1$. Ми довели, що $\hat{\mathcal{G}}_0 : D_S(\bar{Q}_T) \to D_S(\bar{Q}_T)$.

Враховуючи оцінки функції $G_1(x,t,y,0)$, так само показуємо, що $\hat{\mathcal{G}}_1 : D_S(\bar{Q}_T) \to S(\mathbb{R})$. Справді, рівномірна обмеженість функцій $y^l D^\gamma \int\limits_0^T dt \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x,t,y,0)\varphi(x,t)dx$ випливає з рівномірної обмеженості функцій

$$w_{\gamma,l}(y,t) = y^l \int\limits_0^T dt \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x,t,y,0) D^\gamma \varphi(x,t)dx \quad \forall \gamma, l.$$

Маємо $\quad |w_{\gamma,l}(y,t)| \le \hat{C}_1 |y|^l \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}} t^{-1+\beta/2} exp(-cr(x,y,t,0)) |D^\gamma \varphi(x,t)| dxdt,$

а їх оцінки при $\varphi \in D_S(\bar{Q}_T)$ одержуємо, як вище.

Теорема 5.7. *За припущень (LK), (LS) існує єдиний розв'язок $u \in D'_S(\bar{Q}_T)$ задачі (5.31). Він визначений формулою*

$$(u,\varphi) = (F_0, \hat{\mathcal{G}}_0 \varphi) + (u_0, \hat{\mathcal{G}}_1 \varphi) \quad \forall \varphi \in D_S(\bar{Q}_T). \tag{5.34}$$

Доведення. На підставі лем 5.8 та 5.3 маємо $\hat{\mathcal{G}}_0 : D_S(\bar{Q}_T) \to X_S(\bar{Q}_T)$, $\hat{\mathcal{G}}_1 : D_S(\bar{Q}_T) \to S(\mathbb{R})$. Отож, права частина в формулі (5.34) має сенс і нею визначено $u \in D'_S(\bar{Q}_T)$.

Підставляючи функцію (5.34) у тотожність (5.32), використовуючи лему 5.1, показуємо, що функція (5.34) є розв'язком задачі (5.31):

$$(u, \hat{L}\psi) = (F, \hat{\mathcal{G}}_0(\hat{L}\psi)) + (u_0, \hat{\mathcal{G}}_1(\hat{L}\psi)) =$$
$$= (F,\psi) + (u_0(x), \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt) \ \ \forall \psi \in X_S(\bar{Q}_T)$$

Якщо u_1, u_2 – розв'язки задачі (5.31), то функція $u = u_1 - u_2$ задовольняє умову

$$(u, \hat{L}\psi) = 0 \quad \forall \psi \in X_S(\bar{Q}_T).$$

Згідно з лемами 5.3, 5.8, для довільної $\varphi \in D_S(\bar{Q}_T)$ існує така функція $\psi \in X_S(\bar{Q}_T)$, що $\hat{L}\psi = \varphi$ в Q_T. Тоді з попередньої тотожності $(u,\varphi) = 0$ для кожної $\varphi \in D_S(\bar{Q}_T)$, тобто $u = 0$ в $D'_S(\bar{Q}_T)$. Теорема доведена. $\square$

2. У [12, с. 201] введені простори $S_\gamma(\mathbb{R})$ $(\gamma > 0)$ – підпростори простору S таких функцій $\phi(x)$, які задовольняють нерівності

$$|\phi^{(q)}(x)| \le C_q \exp\{-a|x|^{\frac{1}{\gamma}}\}, \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

з додатними сталими $C_q = C_q(\phi)$ та $a = a(\phi)$.

У [149, с. 164] описано клас Жеврея

$$\mathcal{G}_\gamma = \{\phi(t)\ (t \in (0, T]) : \quad |\phi^{(p)}(t)| \le CB^p p^{p\gamma}, \quad p = 0, 1, 2, \dots\},$$

сталі C, B залежать, можливо, від ϕ.

Функція $\phi(t) = \exp\{-|t|^{-\gamma}\}$ $(\gamma > 0)$ належить $\mathcal{G}_{1+\frac{1}{\gamma}}$.

Нехай $0 < \beta < 1$, $Z_\beta(\mathbb{R}) = S_{\frac{2-\beta}{2}}(\mathbb{R})$,

$$Z_\beta(\bar{Q}_T) = \Bigg\{\varphi \in D(\bar{Q}_T) :$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q \varphi(x,t)\right| \le C_{p,q} \exp\{-a|x|^{\frac{2}{2-\beta}}(T-t)^{-\frac{\beta}{2-\beta}}\}, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots\Bigg\},$$

сталі $C_{p,q}$ залежать від φ, $0 < a = a(\beta) \le \frac{2-\beta}{2e}$ – деяка стала.

Функції з $Z_\beta(\bar{Q}_T)$ як функції аргумента x для кожного $t \in [0, T]$ належать простору $S_{\frac{2-\beta}{2}}(\mathbb{R})$, а як функції аргумента $(T - t)$ для кожного $x \in \mathbb{R}$ – класу Жеврея $\mathcal{G}_{\frac{2}{\beta}}$.

Припущення (Z): $\quad g \in Z'_\beta(\bar{Q}_T), \quad u_0 \in Z'_\beta(\mathbb{R}), \quad a(x,t) = 1.$

Теорема 5.8. *За припущення (Z) функція* $u \in Z'_\beta(\bar{Q}_T)$, *задана формулою*

$$(u, \varphi) = (g(\xi, \tau), (\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(\xi, \tau)) + (u_0(\xi), (\hat{\mathcal{G}}_1\varphi)(\xi)) \quad \forall \varphi \in Z_\beta(\bar{Q}_T),$$

є єдиним розв'язком задачі Коші (5.31).

Доведення. Теорема доводиться за схемою доведення попередньої теореми 5.7 із використанням замість леми 5.8 наступної леми.

Лема 5.9. $\quad \hat{\mathcal{G}}_\beta : Z_\beta(\bar{Q}_T) \to Z_\beta(\bar{Q}_T), \quad \hat{\mathcal{G}}_1 : Z_\beta(\bar{Q}_T) \to Z_\beta(\mathbb{R}).$

Лема доводиться за схемою доведення леми 5.8 із застосуванням леми 5.1 із [150, с. 35], за якою

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\widetilde{\mu}\left[|x|^{\frac{2}{2-\beta}}(T-t)^{-\frac{\beta}{2-\beta}} + |x-\xi|^{\frac{2}{2-\beta}}(t-\tau)^{-\frac{\beta}{2-\beta}}\right]\right\}(T-t)^{-\frac{\beta}{2}}(t-\tau)^{-\frac{\beta}{2}}\,dx \leq$$

$$\leq M(\epsilon)(T-\tau)^{-\frac{\beta}{2}} \exp\left\{-\widetilde{\mu}(1-\epsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\beta}}(T-\tau)^{-\frac{\beta}{2-\beta}}\right\},$$

де $0<\epsilon<1$, $M(\epsilon)>0$. Доведення леми 5.9 та теореми 5.8 наведено в [56].

5.4 Задача Коші для рівнянь зі змінним коефіцієнтом у просторах беселевих потенціалів

Вивчаємо задачу Коші

$$D_t^{\beta}u - a(x)u_{xx} = F_0(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \quad u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\mathbb{R} \tag{5.35}$$

у класах $C_{2,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R})\big)$ за наступних припущень.

Припущення (LK1): $a\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ та $\inf\limits_{x\in\bar{\Omega}} a(x)=a_0>0$.

Припущення (B): $\beta\in(0,1)$, $0<\theta\leq 1$, $1<p<\frac{1}{1-\beta\theta}$, $s\in\mathbb{R}$,

$$F_0\in C\big([0,T];H^{s+2\theta,p}(\mathbb{R})\big),\ F_1\in H^{s+2,p}(\mathbb{R}).$$

Нехай $S'\cap S$ – простір узагальнених функцій $f(x,y)$ із $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, які належать $S(\mathbb{R})$ як функції другого аргументу (y), тобто [6] $(f(x,\cdot),\varphi(x))\in S(\mathbb{R})$ для довільної $\varphi\in S(\mathbb{R})$.

Означення 5.5. Композицією узагальнених функцій $F\in S'(\mathbb{R})$ та $f\in S'\cap S$ називається [60] узагальнена функція $f_F=F(y)of(\cdot,y)$ із $S'(\mathbb{R})$, визначена формулою

$$(\omega_F,\varphi)=(F(y),(\omega(x,y)),\varphi(x)) \quad \forall\varphi\in S(\mathbb{R}).$$

Коректність означення, тобто лінійність і неперервність функціонала ω_F легко перевіряється. Якщо $\omega(x,y)=\omega_1(x-y)$, то композиція $F(y)o\omega(x,y)=F(y)o\omega_1(x-y)=(F*\omega_1)(x)$ є згорткою.

Одержаний у попередньому пункті розв'язок (5.34) задачі можна також подати за допомогою композиції узагальнених функцій:

$$u(x,t) = F_0(x,t)\, o\, G_0(x,t) + u_0(x)\, o\, G_1(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{5.36}$$

і при додаткових умовах на задані функції F_0, u_0 він належить класу $C^{2,\beta}(Q_T)$ та задовольняє задачу (5.35).

Зауважимо також, що за теоремою 5.7

$L(F_0\, o\, G_0) = F_0, \quad L(F_1\, o\, G_1) = F_1 \cdot f_{1-\beta}, \quad L^{reg}(F_1\, o\, G_1) = 0,$

$L^{reg}(F_0\, o\, G_0) = F_0$, якщо виконується умова $(F_0\, o\, G_0)(x,0) = 0$

(тоді $(F_0\, o\, G_0)_t^{(\beta)}(x,t) = D_t^{\beta}(F_0\, o\, G_0)(x,t)$).

Використовуючи зображення (5.36) та властивості компонент вектор-функції Гріна, одержимо розв'язність задачі Коші у всій шкалі просторів $H^{s,p}(\mathbb{R})$ за просторовою змінною.

Позначимо через $M_S = M_S(\mathbb{R}^n)$ клас мультиплікаторів у $S(\mathbb{R}^n)$: клас таких функцій $\psi(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$), що $\psi\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ для довільної $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Зокрема, клас ϑ_M [7, с. 151] функцій повільного росту (які ростуть на безмежності не швидше полінома в $\mathbb{R}^n$) належить $M_S(\mathbb{R}^n)$.

Лема 5.10. *Якщо* $F \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in S' \cap S$, *то*

$$\mathcal{F}[F(y) o \omega(\cdot, y)] = F(y) o \mathcal{F}[\omega(\cdot, y)]. \tag{5.37}$$

Якщо додатково

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x,y) e^{i(x,\cdot)} dx \in M_S(\mathbb{R}) \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

де (x,ξ) *– скалярний добуток* $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $i^2 = -1$, *то*

$$\mathcal{F}[F(y) o \omega(x,y)] = F(y) o \mathcal{F}[\omega(x,y)] = \mathcal{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)]\, \mathcal{F}_{x\to\xi}\big[F(x)\big]. \tag{5.38}$$

Доведення. За означенням перетворення Фур'є узагальнених функцій із $S'(\mathbb{R}^n)$, для довільної $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$(\mathcal{F}[F(y) o \omega(\cdot, y)](\xi), \varphi(\xi)) = (F(y) o \omega(x,y), \mathcal{F}[\varphi](x)) =$$

$$= \Big(F(y), \big(\omega(x,y), \mathcal{F}[\varphi](x)\big)\Big) = \Big(F(y), \big(\mathcal{F}[\omega(\cdot,y)](\xi,y), \varphi(\xi)\big)\Big) =$$
$$= (F(y) o \mathcal{F}[\omega(\cdot,y)](\xi), \varphi(\xi)).$$

Звідси одержуємо правильність формули (5.37). Крім того,

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathcal{F}_{x\to\xi}[\omega(x,y)], \psi(\xi)\Big) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x,y) e^{i(x-y,\xi)} dx\Big) \psi(\xi) e^{i(y,\xi)} d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(y+x,y) e^{i(x,\xi)} dx\Big) \psi(\xi) e^{i(y,\xi)} d\xi \\
&= \mathcal{F}_{\xi\to y}\Big[\mathcal{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)]\ \psi(\xi)\Big] \ \ \forall \psi \in S(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Тоді для довільної $\varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathcal{F}_{x\to\xi}[F(y)\, o\, \omega(x,y)], \psi(\xi)\Big) = \Big(F(y), \big(\mathcal{F}_{x\to\xi}[\omega(x,y)], \psi(\xi)\big)\Big) \\
&= \Big(F(y), \mathcal{F}_{\xi\to y}\Big[\mathcal{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)]\ \psi(\xi)\Big]\Big) \\
&= \Big(\mathcal{F}_{y\to\xi}[F(y)], \mathcal{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)]\ \psi(\xi)\Big) \\
&= \Big(\mathcal{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)] \cdot \mathcal{F}_{x\to\xi}[F(x)], \psi(\xi)\Big).
\end{aligned}$$

За припущення леми $\mathcal{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)] = \mathcal{F}_{x\to\xi}[\omega(x,y)] e^{-i(y,\xi)}$ належить M_S за змінною $\xi \in \mathbb{R}^n$, тому добуток

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}[\omega(y+x,y)]\ \mathcal{F}_{x\to\xi}[F(x)]$$

визначений у $S'(\mathbb{R}^n)$. Отож, формула (5.38) правильна.

Теорема 5.9. *Нехай виконуються припущення (LK1), (B). Тоді існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R})\big)$ задачі (5.35). Він визначений формулою (5.36) та правильна оцінка*

$$\|u\|_{C_{2,\beta}\left([0,T];H^{s+2,p}(\mathbb{R})\right)} \le b_0 \|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s+2\theta,p}(\mathbb{R})\right)} + b_1 \|F_1\|_{H^{s+2,p}(\mathbb{R})}, \tag{5.39}$$

де b_0, b_1 – додатні сталі.

Доведення. Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 5.4 із використанням властивості перетворення Фур'є операції композиції, встановленої в лемі 5.10, замість властивості перетворення Фур'є згортки при

доведенні теореми 5.4. Для всіх $t \in [0,T]$, подібно до доведення леми 5.7, обчислюємо

$$\big\|(F_1\, o\, G_1)(\cdot,t)\big\|_{H^{s+2,p}(\mathbb{R})} = \big\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2}{2}}\mathcal{F}[F_1 o G_1](\xi,t)\big]\,\big\|_{L_p(\mathbb{R})} =$$

$$= \Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2}{2}}\mathcal{F}[G_1(y+\cdot,t,y,0)](\xi,y,t)\mathcal{F}\big[F_1(y)\big](\xi,t)\Big]\,\Big\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Із побудови та властивостей вектор-функції Гріна (див., наприклад, [48, 183, 155]) випливає, що

$$|\mathcal{F}[G_0(y+\cdot,t,y,0)](\xi,y,t)| \le \hat{B}_0 t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-a_0|\xi|^2t^\beta)\,,$$

$$|\mathcal{F}[G_1(y+\cdot,t,y,0)](\xi,y,t)| \le \hat{B}_1 E_{\beta,1}(-a_0|\xi|^2t^\beta)$$

з деякими додатними сталими $\hat{B}_0, \hat{B}_1$.

Ми бачимо, що функція в оцінці $\mathcal{F}[G_1(y+\cdot,t,y,0)]$ від y не залежить та обмежена в $\bar{Q}_T$. Тому з попередньої формули одержуємо

$$\big\|(F_1\, o\, G_1)(\cdot,t)\big\|_{H^{s+2,p}(\mathbb{R})}$$

$$\le \hat{B}_1\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big[E_{\beta,1}(-a_0|\xi|^2t^\beta)\Big]\mathcal{F}^{-1}\Big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2\theta}{2}}\mathcal{F}\big[F_1(y)\big](\xi,t)\Big]\,\Big\|_{L_p(\mathbb{R})} \le$$

$$\le C\|\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2}{2}}\mathcal{F}[F_1](\xi)]\,\|_{L_p(\mathbb{R})} = C\|F_1\|_{H^{s+2,p}(\mathbb{R})} \quad \forall t\in[0,T],$$

а отже,

$$\big\|F_1\, o\, G_1\big\|_{C\big([0,T];H^{s+2,p}(\mathbb{R})\big)} \le C\|F_1\|_{H^{s+2,p}(\mathbb{R})}, \quad C = const > 0.$$

Для $t\in[0,T]$ оцінимо норму

$$\big\|F_0\, o\, G_0\big\|_{H^{s+2,p}(\mathbb{R})} = \big\|\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2}{2}}\mathcal{F}[F_0\, o\, G_0]]\big\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Маємо

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2}{2}}\mathcal{F}\Big[\int\limits_0^t F_0(\cdot,\tau)\, o\, G_0(x,t,\cdot,\tau)d\tau\Big]\Big]\,\Big\|_{L_p(\mathbb{R})} =$$

$$= \Big\{\int\limits_{\mathbb{R}}\Big|\int\limits_0^t \mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2}{2}}\mathcal{F}[F_0(\cdot,\tau)\, o\, G_0(x,t,\cdot,\tau)]]d\tau\Big|^p\Big\}^{1/p}.$$

Для всіх $\tau\in[0,T]$

$$\mathcal{F}^{-1}\Big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2}{2}}\mathcal{F}[F_0(\cdot,\tau)\,o\,G_0(x,t,\cdot,\tau)]\Big]=$$

$$=\mathcal{F}^{-1}\Big[(1+|\xi|^2)^{1-\theta}\mathcal{F}[G_0(y+\cdot,t,y,\tau)](\xi,t,y,\tau)\mathcal{F}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2\theta}{2}}F_0(y,\tau)\big](\xi,\tau)\Big]\leq$$

$$\leq\hat{B}_0(t-\tau)^{\beta-1}\mathcal{F}^{-1}\Big[(1+|\xi|^2)^{1-\theta}E_{\beta,\beta}(-a_0|\xi|^2(t-\tau)^{\beta})\times$$

$$\times\mathcal{F}\Big[\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2\theta}{2}}\mathcal{F}[F_0](\xi,\tau)\,\big]\,\Big]\Big].$$

За лемою 5.5 функція $(1+|\xi|^2)^{1-\theta}E_{\beta,\beta}(-a_0|\xi|^2(t-\tau)^{\beta})=g_{\beta,\beta}(\xi,t-\tau,2-2\theta)$ є мультиплікатором в $L_p(\mathbb{R})$ за змінною ξ, а $\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2\theta}{2}}\mathcal{F}[F_0](\xi,\tau)]\in L_p(\mathbb{R})$ для всіх $\tau\in[0,T]$, і тоді

$$\|h(\cdot,t,\tau)\|_{L_p(\mathbb{R})}\leq c_\beta(t-\tau)^{\beta-1}w(t-\tau,2-2\theta)\big\|\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2\theta}{2}}\mathcal{F}[F_0](\xi,\tau)]\,\big\|_{L_p(\mathbb{R})},$$

де c_β – додатна стала,

$\big\|F_0\,o\,G_0\big\|_{H^{s+2,p}(\mathbb{R})}\leq$
$c_\beta t^{1-\frac{1}{p}}\Big\{\int\limits_0^t(t-\tau)^{p(\beta-1)}w^p(t-\tau,2-2\theta)\,d\tau\Big\}^{1/p}\|F_0\|_{C\big([0,T];H^{s+2\theta,p}(\mathbb{R})\big)}\leq$
$C_0\|F_0\|_{C\big([0,T];H^{s+2\theta,p}(\mathbb{R})\big)}$, $C_0=onst>0$. Звідси

$$\big\|F_0\,o\,G_0\big\|_{C\big([0,T];H^{s+2,p}(\mathbb{R})\big)}\leq C_0\|F_0\|_{C\big([0,T];H^{s+2\theta,p}(\mathbb{R})\big)}.$$

Отож, за припущення щодо p для всіх $t\in[0,T]$ існує композиція

$$(F_0\,o\,G_0)(x,t)=\int\limits_0^t F_0(\cdot,\tau),o\,G_0(\cdot,t,\tau)d\tau$$

у $C_{2,\beta}\big([0,T];H^{s+2,p}(\mathbb{R})\big)$, що задовольняє умову $(F_0\,o\,G_0)(x,0)=0$. Далі повторюємо схему доведення теореми 5.4.

5.5 Задача Коші у випадку $\beta\in(1,2)$

У цьому підрозділі встановлюємо однозначну розв'язність задачі Коші з даними – узагальненими функціями із просторів типу D' для рівняння (5.1) з дробовою похідною Рімана-Ліувілля $u_t^{(\beta)}$ порядку $\beta\in(1,2)$. Використовуємо позначення підрозділу 5.1.

5.5.1 Формулювання задачі, формула Гріна та властивості спряжених операторів Гріна

Лема 5.11. *Для* $v \in C^{\alpha,\beta}(Q_T)$, $\psi \in D(\bar{Q}_T)$ *правильна формула Гріна*

$$\int\limits_{Q_T} v(x,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} (L^{reg}v)(x,t)\psi(x,t)dxdt - \tag{5.40}$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x,0)dx \int\limits_0^T f_{2-\beta}(t)\psi_t(x,t)dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} v_t(x,0)dx \int\limits_0^T f_{2-\beta}(t)\psi(x,t)dt\,.$$

Доведення. Перетворимо $\int\limits_{Q_T} (L^{reg}v)(x,t)\psi(x,t)dxdt$, інтегруючи частинами. Маємо

$$\int\limits_{Q_T} D_t^\beta v(x,t)\psi(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} \big(f_{2-\beta}(t) * v_{tt}(x,t)\big)\psi(x,t)dxdt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_0^t (t-\tau)^{1-\beta} v_{\tau\tau}(x,\tau)d\tau\Big)\psi(x,t)dxdt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_0^T \Big(\int\limits_\tau^T (t-\tau)^{1-\beta}\psi(x,t)dt\Big) v_{\tau\tau}(x,\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_0^T \Big(\int\limits_0^{T-\tau} \eta^{1-\beta}\psi(x,\eta+\tau)d\eta\Big) v_{\tau\tau}(x,\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_0^T \big(f_{2-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(x,\tau)\big) v_{\tau\tau}(x,\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(v_\tau(x,\tau)(f_{2-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(x,\tau))\Big)\Big|_{\tau=0}^{\tau=T} dx -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_0^T \Big(v_\tau(x,\tau)(f_{2-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(x,\tau))_\tau d\tau\Big)dt =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} v_\tau(x,0)(f_{2-\beta}\hat{*}\psi)(x,0)dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x,0)(f_{2-\beta}\hat{*}\psi)_\tau(x,0)dx +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_0^T \Big(v(x,\tau)(f_{2-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(x,\tau))_{\tau\tau} d\tau\Big)dt =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} v_\tau(x,0)(f_{2-\beta}\hat{*}\psi)(x,0)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x,0)(f_{1-\beta}\hat{*}\psi)(x,0)dx +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_0^T \Big(v(x,\tau)(f_{-\beta}(\tau)\hat{*}\psi(x,\tau))d\tau\Big)dt\,,$$

$$\int\limits_{Q_T} (-\Delta)^{\alpha/2} v(x,t)\psi(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} v(x,t)(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x,t)dxdt\,,$$

звідки й випливає потрібна формула.

Припущення (L2): $\beta \in (1,2)$, $\alpha \neq \beta$, $F_1, F_2 \in \mathcal{E}'(R^n)$, $F \in X'(\bar{Q}_T)$.

За припущення (L2) вивчаємо задачу Коші

$$(Lu)(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in Q_T,$$

$$u(x,0) = F_1(x),\ u_t(x,0) = F_2(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.41}$$

Означення 5.6. Функція $u \in D'(\bar{Q}_T)$, що задовольняє тотожність

$$(u(x,t), (\hat{L}\psi)(x,t)) =$$

$$= (F,\psi) + \sum_{j=1}^{2} \big(F_j(x) \times f_{j-\beta}(t), \psi(x,t)\big), \ \ \forall \psi \in X(\bar{Q}_T), \tag{5.42}$$

називається розв'язком задачі (5.41).

Зауважимо, що $\big(F_j(x) \times f_{j-\beta}(t), \psi(x,t)\big) = \big(F_j(x), \big(f_{j-\beta}(t), \psi(x,t)\big)\big)$,
$\big(f_{2-\alpha}(\tau), \psi(y,\tau)\big) = \int\limits_0^T f_{2-\alpha}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau$,
$\big(f_{1-\alpha}(\tau), \psi(y,\tau)\big) = \big(f'_{2-\alpha}(\tau), \psi(y,\tau)\big) = -\big(f_{2-\alpha}(\tau), \psi_\tau(y,\tau)\big)$.

Враховуючи формулу Гріна, задачу (5.41) можна вважати узагальненням задачі Коші

$$L^{reg}u = g_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{5.43}$$

$$u(x,0) = g_1(x),\ u_t(x,0) = g_2(x), \ \ x \in R^n \tag{5.44}$$

з регулярними даними g_0, g_1, g_2. З одержаної нижче теореми 5.10 можна вивести, що при достатньо гладких та фінітних $F = g_0$, $F_1 = g_1$, $F_2 = g_2$ (наприклад, неперервній, обмеженій та локально гельдеровій за просторовими змнними g_0, локально гельдерових g_1, g_2) розв'язки задач (5.41) та (5.43), (5.44) збігаються.

Означення 5.7. Вектор-функцією Гріна задачі Коші (5.41) називається така трійка функцій $(G_0(x,t), G_1(x,t), G_2(x,t))$, що при достатньо гладких та фінітних g_0, g_1, g_2 функція

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau) g_0(y,\tau)dy + \tag{5.45}$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t)g_j(y)dy, \quad (x,t)\in Q_T$$

є класичним (із $C^{\alpha,\beta}(Q_T)$) розв'язком задачі (5.43), (5.44).

З означення вектор-функції Гріна випливає, що

$LG_0(x,t)=\delta(x,t)\,, \quad (x,t)\in Q_T\,,\ L^{reg}G_j(x,t)=0, (x,t)\in Q_T, j=1,2\,,$

$G_1(x,0)=\delta(x), \quad (G_2)_t(x,0)=\delta(x), x\in\mathbb{R}^n.$

Тут δ – дельта-функція Дірака.

Лема 5.12. *Для кожної* $\psi\in X(\bar{Q}_T)$

$$\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t)dx=\psi(y,t), \quad (y,t)\in\bar{Q}_T, \tag{5.46}$$

$$\int\limits_{Q_T} G_j(x-y,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt=\big(f_{j-\beta}(t),\psi(y,t)\big), \quad (y,t)\in\bar{Q}_T, j=1,2, \tag{5.47}$$

$$G_j(x,t)=f_{j-\beta}(t)*G_0(x,t) \quad \textit{майже всюди в} \quad Q_T, \quad j=1,2. \tag{5.48}$$

Доведення. Якщо підставимо розв'язок (5.45) класичної задачі Коші (5.43), (5.44) в формулу (5.40) (замість функції v), то при довільній $\psi\in X(\bar{Q}_T)$ одержимо

$$\int\limits_{Q_T}\Big(\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)g_0(y,\tau)dy\Big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{Q_T}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t)g_j(y)dy\Big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt=$$
$$=\int\limits_{Q_T} g_0(x,t)\psi(x,t)dxdt+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} g_j(x)\big(f_{j-\beta}(t),\psi(x,t)\big)dx\,,$$

тобто
$$\int\limits_{Q_T}\Big(\int\limits_{\tau}^{T} dt\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t)dx\Big)g_0(y,\tau)dyd\tau+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{Q_T} G_j(x-y,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt\Big)g_j(y)dy=$$
$$=\int\limits_{Q_T}\psi(y,\tau)g_0(y,\tau)dyd\tau+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(f_{j-\beta}(t),\psi(y,t)\big)g_j(y)dy.$$

За довільністю g_0, g_1, g_2 одержуємо правильність формул (5.46), (5.47).

Для виведення формули (5.48), використовуючи (5.46) та аналог теореми Фубіні, обчислюємо

$$\big(f_{j-\beta}(t), \psi(y,t)\big) = \Big(f_{j-\beta}(\tau), \Big(\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt\Big)\Big) =$$

$$= \int\limits_0^T dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(f_{j-\beta}(\tau), G_0(x-y,t-\tau)\Big)(\hat{L}\psi)(x,t)dx =$$

$$= \int\limits_{Q_T} \big(f_{j-\beta}(t) * G_0(x-y,t)\big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt\,.$$

Замінивши $\big(f_{j-\beta}(t), \psi(y,t)\big)$ за формулою (5.47), матимемо

$$\int\limits_{Q_T} G_j(x-y,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} \big(f_{j-\beta}(t) * G_0(x-y,t)\big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt\,.$$

За лемою 5.3 для кожної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ існує така $\psi \in X(\bar{Q}_T)$, що $\hat{L}\psi = \varphi$ в $\bar{Q}_T$. Тоді з попередньої рівності

$$\int\limits_{Q_T} \big(G_j(x-y,t) - f_{j-\beta}(t) * G_0(x-y,t)\big)\varphi(x,t)dxdt = 0 \quad \forall \varphi \in D(\bar{Q}_T)\,,\ j=1,2\,,$$

а звідси за лемою Дюбуа-Реймона ([6], с. 95) одержуємо формули (5.48).

Нехай $\quad (\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dx\,,$

$$(\hat{\mathcal{G}}_j\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{Q_T} G_j(x-y,t)\varphi(x,t)dxdt\,, \qquad \varphi \in D(\bar{Q}_T)\,,\ j=1,2\,.$$

Лема 5.13. *При* $\beta \in (1,2)\,, \quad \alpha \neq \beta$

$$\hat{\mathcal{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)\,, \quad \hat{\mathcal{G}}_j : D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^n)\,,\ j=1,2\,.$$

Доведення. Згодно з [182],

$$G_0(x,t) = \frac{\pi^{n/2}t^{\beta-1}}{|x|^n} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta}\Bigg|\begin{matrix}(1,1) & (\beta,\beta) & \\ (1,1) & (n/2,\alpha/2) & (1,\alpha/2)\end{matrix}\right), \tag{5.49}$$

де $\quad H^{m,n}_{p,q}\left(z\Bigg|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)$–H-функція Фокса ([207)]. За теоремою 1.1 [207] при $\beta \neq \alpha$ ($\Delta^* \neq 0$) функція G_0 існує для всіх $x \neq 0$, $t > 0$.

Функції $G_j(x,t)$, $j=1,2$ знаходимо, враховуючи формули (5.48) та властивості H-функцій Фокса [207].

Перетворимо функцію G_0 за властивістю 2.3 та теоремою 2.1 із [207]:

$$G_0(x,t) = \frac{\pi^{n/2}t^{\beta-1}}{|x|^n} H^{1,2}_{3,2}\left(\frac{2^\alpha a^2 t^\beta}{|x|^\alpha}\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\alpha/2) & (0,\alpha/2)\\ (0,1) & (1-\beta,\beta) & \end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{\pi^{n/2}t^{\beta-1}}{|x|^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(1-\frac{2^\alpha a^2}{|x|^\alpha})^k H^{1,2}_{3,2}\left(t^\beta\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\alpha/2) & (0,\alpha/2)\\ (k,1) & (1-\beta,\beta) & \end{matrix}\right).$$

За теоремою 2.7 із [207] про дробове диференціювання H-функцій при $a^* > 0$, $\sigma \min\limits_{1\le j\le m}[\frac{Reb_j}{\beta_j}] + Re\omega > -1$, $\varrho > 0$

$$f_\varrho(z) * \left[z^\omega H^{m,n}_{p,q}\left(z^\sigma\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)\right] =$$

$$= z^{\omega+\varrho} H^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(z^\sigma\middle|\begin{matrix}(-\omega,\sigma) & (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q) & (-\omega-\varrho,\sigma)\end{matrix}\right).$$

Оскільки $2-\beta > 0$, то використовуючи цей факт та формулу (5.48), матимемо

$$G_2(x,t) = f_{2-\beta}(t) * G_0(x,t) =$$

$$= \frac{\pi^{n/2}}{|x|^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(1-\frac{2^\alpha a^2}{|x|^\alpha})^k \times$$

$$\times f_{2-\beta}(t) * \left[t^{\beta-1} H^{1,2}_{3,2}\left(t^\beta\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\alpha/2) & (0,\alpha/2)\\ (k,1) & (1-\beta,\beta) & \end{matrix}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi^{n/2}t}{|x|^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(1-\frac{2^\alpha a^2}{|x|^\alpha})^k \times$$

$$\times H^{1,3}_{4,3}\left(t^\beta\middle|\begin{matrix}(1-\beta,\beta) & (0,1) & (1-n/2,\alpha/2) & (0,\alpha/2)\\ (k,1) & (1-\beta,\beta) & (-1,\beta) & \end{matrix}\right).$$

Використовуючи властивість 2.2 і знову теорему 2.1 [207], одержуємо

$$G_2(x,t) = \frac{\pi^{n/2}t}{|x|^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(1-\frac{2^\alpha a^2}{|x|^\alpha})^k H^{1,2}_{3,2}\left(t^\beta\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\alpha/2) & (0,\alpha/2)\\ (k,1) & (-1,\beta) & \end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{\pi^{n/2}t}{|x|^n} H^{1,2}_{3,2}\left(\frac{2^\alpha a^2 t^\beta}{|x|^\alpha}\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\alpha/2) & (0,\alpha/2)\\ (0,1) & (-1,\beta) & \end{matrix}\right).$$

За властивістю 2.3 звідси остаточно матимемо

$$G_2(x,t) = \frac{\pi^{n/2}t}{|x|^n} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta}\middle|\begin{matrix}(1,1) & (2,\beta) & \\ (1,1) & (n/2,\alpha/2) & (1,\alpha/2)\end{matrix}\right).$$

Оскільки $G_1(x,t) = f_{1-\beta}(t) * G_0(x,t) = f'_{2-\beta}(t) * G_0(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(f_{2-\beta}(t) * G_0(x,t)) = \frac{\partial}{\partial t}G_2(x,t)$, то подібно до попередніх перетворень, але використовуючи властивість 2.8 із [207] про диференціювання H-функцій замість теореми 2.7 із [207], одержуємо

$$G_1(x,t)=\frac{\pi^{n/2}}{|x|^n}\frac{\partial}{\partial t}\left[tH^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2t^\beta}\middle|\begin{matrix}(1,1) & (2,\beta)\\ (1,1) & (n/2,\alpha/2) \quad (1,\alpha/2)\end{matrix}\right)\right]=$$

$$=\frac{\pi^{n/2}}{|x|^n}\frac{\partial}{\partial t}\left[tH^{1,2}_{3,2}\left(\frac{2^\alpha a^2t^\beta}{|x|^\alpha}\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\alpha/2) \quad (0,\alpha/2)\\ (0,1) & (-1,\beta)\end{matrix}\right)\right.=$$

$$=\frac{\pi^{n/2}}{|x|^n}H^{1,3}_{4,3}\left(\frac{2^\alpha a^2t^\beta}{|x|^\alpha}\middle|\begin{matrix}(-1,\beta) & (0,1) & (1-n/2,\alpha/2) \quad (0,\alpha/2)\\ (0,1) & (-1,\beta) & (0,\beta)\end{matrix}\right)=$$

$$=\frac{\pi^{n/2}}{|x|^n}H^{1,2}_{3,2}\left(\frac{2^\alpha a^2t^\beta}{|x|^\alpha}\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\alpha/2) \quad (0,\alpha/2)\\ (0,1) & (0,\beta)\end{matrix}\right)=$$

$$=\frac{\pi^{n/2}}{|x|^n}H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2t^\beta}\middle|\begin{matrix}(1,1) & (1,\beta)\\ (1,1) & (n/2,\alpha/2) \quad (1,\alpha/2)\end{matrix}\right).$$

Отже,

$$G_j(x,t)=\frac{\pi^{n/2}t^{j-1}}{|x|^n}H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2t^\beta}\middle|\begin{matrix}(1,1) & (j,\beta)\\ (1,1) & (n/2,\alpha/2) \quad (1,\alpha/2)\end{matrix}\right),\quad j=1,2. \tag{5.50}$$

Зауважимо, що вигляд функції $G_1(x,t)$ збігається з одержаним у [155] для випадку $\beta\in(0,1)$.

Для функцій G_1,G_2 маємо $a^*=2-\beta$, $\Delta^*=\alpha-\beta$. Тому за теоремою 1.1 [207] при $\beta\neq\alpha$ ($\Delta^*\neq 0$) функції G_1,G_2 існують для всіх $x\neq 0$, $t>0$.

У [207] побудована асимптотика для H-функцій Фокса. Враховуючи, що виконуються умови (1.1.6) та (1.3.2) із [207], за теоремою 1.7 із [207] одержуємо оцінки

$$|G_0(x,t)|\le\frac{C_0t^{\beta-1}}{|x|^n},\quad |G_j(x,t)|\le\frac{C_jt^{j-1}}{|x|^n},\quad j=1,2\qquad \text{при}\quad |x|^\alpha>t^\beta. \tag{5.51}$$

За наслідком з теореми 1.12 [207] одержуємо оцінки при $|x|^\alpha<t^\beta$:

$$|G_0(x,t)|\le\frac{C_0^*}{t|x|^{n-\alpha}}ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha},\quad \text{якщо}\quad \alpha<n, \tag{5.52}$$

$$|G_0(x,t)|\le\frac{C_0^*}{t^{1-\beta+n\beta/\alpha}}ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}\quad \text{для}\quad \alpha\ge n, \tag{5.53}$$

$$|G_j(x,t)|\le\frac{C_j^*t^{j-1-\beta}}{|x|^{n-\alpha}}ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha},\quad \text{якщо}\quad \alpha<n,\quad j=1,2 \tag{5.54}$$

$$|G_j(x,t)|\le\frac{C_j^*}{t^{1-j+n\beta/\alpha}}ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}\quad \text{для}\quad \alpha\ge n,\quad j=1,2. \tag{5.55}$$

Тут C_j, C_j^*, $j = 0,1,2$ – певні додатні сталі. У випадку (5.11) правильні такі ж оцінки без логарифмів.

З одержаних вище оцінок випливає інтегровність функцій G_j в Q_T, $j = 0,1,2$, а звідси – неперервність функцій $(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau)$ в Q_T та $(\hat{\mathcal{G}}_j\varphi)(y)$ в $\mathbb{R}^n$, $j = 1,2$. Оскільки $\frac{\partial}{\partial y_i}G_j(x-y,t) = -\frac{\partial}{\partial x_i}G_j(x-y,t)$, $i = 1,\dots,n$, $j = 0,1,2$ і подібно для похідних вищих порядків, функція $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$, то для всіх γ

$$D^\gamma(\hat{\mathcal{G}}_j\varphi)(y) = \int\limits_{Q_T} G_j(x-y,t)D^\gamma\varphi(x,t)dxdt$$

за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$w_{j,\gamma}(y) = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t)D^\gamma\varphi(x,t)dxdt\,,\ j = 0,1,2\,,\ \varphi \in D(\bar{Q}_T)\,.$$

За цих умов з попередньої рівності одержимо, що $D^\gamma(\hat{\mathcal{G}}_j\varphi) \in C(\mathbb{R}^n)$ для довільного мультиіндексу γ, а отже, $\hat{\mathcal{G}}_j\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$.

Покажемо рівномірну збіжність інтегралів $w_{j\gamma}(y)$ для кожного γ.

Враховуючи оцінки (5.52), (5.54) функцій $G_j(x-y,t)$, $j = 1,2$, фінітність та обмеженість функцій $D^\gamma\varphi(x,t)$ в Q_T, у випадку $\alpha < n$ матимемо

$$|w_{j,\gamma}(y)| \le |\int\limits_0^T dt \int\limits_{x:|x-y|^\alpha<t^\beta} G_j(x-y,t)D^\gamma\varphi(x,t)dx + |$$

$$+\int\limits_0^T dt \int\limits_{x:|x-y|^\alpha>t^\beta} G_j(x-y,t)D^\gamma\varphi(x,t)dx| \le$$

$$\le d_{j,\gamma,0}\int\limits_0^T \Big[t^{j-1-\beta}\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<t^\beta} \frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^{n-\alpha}}dx + t^{j-1}\int\limits_{x:|x-y|^\alpha>t^\beta} \frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Big]dt \le$$

$$\le d_{j,\gamma,1}\Big[\int\limits_0^T t^{j-1-\beta}dt\int\limits_0^{t^{\beta/\alpha}} r^{\alpha-1}dr + \int\limits_0^T t^{j-1}dt\int\limits_{t^{\beta/\alpha}}^{+\infty}|D^\gamma\varphi(x,t)|r^{-1}dr\Big] \le$$

$$\le d_{j,\gamma,2}\int\limits_0^T t^{j-1}[1+|lnt^{\beta/\alpha}|]dt < +\infty\,.$$

Тут і далі $d_{j,\gamma,k}$, $j = 1,2$, $k = 0,1,\dots$ – додатні сталі.

У випадку $\alpha \ge n$ з врахуванням оцінок (5.53), (5.55), матимемо

$$|w_{j,\gamma}(y)| \le d_{j,\gamma,3}\int\limits_0^T t^{j-1}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<t^\beta} \frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{t^{n\beta/\alpha}}dx + \int\limits_{x:|x-y|^\alpha>t^\beta} \frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Big]dt \le$$

$$\le d_{j,\gamma,4}\int\limits_0^T t^{j-1}[1+|lnt^{\beta/\alpha}|]dt < +\infty\,,\quad j = 1,2\,.$$

Ми довели, що $\hat{\mathcal{G}}_j : D(\bar{Q}_T) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2$.

Оскільки $\frac{\partial}{\partial\tau} G_0(x-y, t-\tau) = -\frac{\partial}{\partial t} G_0(x-y, t-\tau)$ і подібно для похідних вищих порядків, функція $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$, то для всіх $\bar{\gamma}$

$$D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{Q_T} G_0(x-y, t-\tau) D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)dxdt \quad \text{та} \quad D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,T) = 0$$

за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$w_{0,\bar{\gamma}}(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau) D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)dxdt\,,\ \varphi \in D(\bar{Q}_T)\,.$$

За цієї умови з попередньої рівності одержимо, що $D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi) \in C(Q_T)$ для довільного мультиіндексу $\bar{\gamma}$, а отже, $\hat{\mathcal{G}}_0\varphi \in C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$ при $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$.

Покажемо рівномірну збіжність інтегралів $w_{0,\bar{\gamma}}(y,\tau)$ для кожного $\bar{\gamma}$.

Враховуючи оцінки (5.52), (5.54) функції $G_0(x-y, t-\tau)$, фінітність та обмеженість функцій $D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)$ в Q_T, у випадку $\alpha < n$ матимемо

$$|w_{0,\bar{\gamma}}(y,\tau)| \le \int\limits_{\tau}^{T} \Big[\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<(t-\tau)^\beta} |G_0(x-y, t-\tau)| \cdot |D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|dx +$$

$$+ \int\limits_{x:|x-y|^\alpha>(t-\tau)^\beta} |G_0(x-y, t-\tau)| \cdot |D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|dx \Big] dt \le$$

$$\le d_{0,\bar{\gamma},0} \int\limits_{\tau}^{T} \Big[\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<(t-\tau)^\beta} \tfrac{|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)|x-y|^{n-\alpha}} dx + \int\limits_{x:|x-y|^\alpha>(t-\tau)^\beta} \tfrac{|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)^{1-\beta}|x-y|^n} dx \Big] dt \le$$

$$\le d_{0,\bar{\gamma},1} \Big[\int\limits_{\tau}^{T} \tfrac{dt}{t-\tau} \int\limits_{0}^{(t-\tau)^{\beta/\alpha}} r^{\alpha-1}dr + \int\limits_{\tau}^{T} \tfrac{1}{(t-\tau)^{1-\beta}} dt \int\limits_{(t-\tau)^{\beta/\alpha}}^{+\infty} |D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)| r^{-1}dr \Big] \le$$

$$\le d_{0,\bar{\gamma},2} \int\limits_{\tau}^{T} (t-\tau)^{\beta-1}[1 + |ln(t-\tau)^{\beta/\alpha}|]dt < +\infty\,.$$

Тут і далі $d_{0,\bar{\gamma},i}$, $i = 0, 1, \ldots$ – додатні сталі.

У випадку $\alpha \ge n$, враховуючи оцінки (5.53), (5.55), подібно одержуємо

$$|w_{0,\bar{\gamma}}(y,\tau)| \le d_{0,\bar{\gamma},3} \int\limits_{\tau}^{T} \Big[\int\limits_{x:|x-y|^\alpha<(t-\tau)^\beta} \tfrac{|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)^{1-\beta(1-\frac{n}{\alpha})}} dx +$$

$$+ \int\limits_{x:|x-y|^\alpha>(t-\tau)^\beta} \tfrac{|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)^{1-\beta}|x-y|^n} dx \Big] dt \le$$

$$\le d_{0,\bar{\gamma},4} \int\limits_{\tau}^{T} (t-\tau)^{\beta-1}[1 + |ln(t-\tau)^{\beta/\alpha}|]dt < +\infty\,.$$

Ми довели, що $\hat{\mathcal{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$. Лема доведена.

5.5.2 Теорема існування та єдиності

Теорема 5.10. *За припущення (L2) існує єдиний розв'язок* $u \in D'(\bar{Q}_T)$ *задачі (5.41). Він визначений формулою*

$$(u, \varphi) = (F, \hat{\mathcal{G}}_0 \varphi) + \sum_{j=1}^{2} (F_j, \hat{\mathcal{G}}_j \varphi) \quad \forall \varphi \in D(\bar{Q}_T). \tag{5.56}$$

Доведення. За лемою 5.13 $\hat{\mathcal{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$, $\hat{\mathcal{G}}_j : D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2$. За лемою 5.3 для кожної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ існує така $\psi \in X(\bar{Q}_T)$, що $(\hat{L}\psi)(x,t) = \varphi(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$. Такою є функція

$$\psi(y, \tau) = \int_{\tau}^{T} dt \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x - y, t - \tau) \varphi(x, t) dx.$$

Отож, $\hat{\mathcal{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to X(\bar{Q}_T)$, права частина в формулі (5.56) має сенс і формулою (5.56) визначено $u \in D'(\bar{Q}_T)$.

Підставляючи функцію (5.56) у тотожність (5.42), використовуючи лему 5.13, показуємо, що функція (5.56) є розв'язком задачі (5.41):

$$(u, \hat{L}\psi) = (F, \hat{\mathcal{G}}_0(\hat{L}\psi))_{Q_T} + \sum_{j=1}^{2} (F_j, \hat{\mathcal{G}}_j(\hat{L}\psi)) =$$

$$= (F, \psi) + \sum_{j=1}^{2} \big(F_j(x) \times f_{j-\beta}(t), \psi(x,t)\big) \ \ \forall \psi \in X(\bar{Q}_T).$$

Якщо u_1, u_2 – розв'язки задачі (5.41), то функція $u = u_1 - u_2$ задовольняє умову

$$(u, \hat{L}\psi) = 0 \quad \forall \psi \in X(\bar{Q}_T),$$

а тоді з використанням леми 5.3 $(u, \varphi) = 0$ для кожної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$, тобто $u = 0$ в $D'(\bar{Q}_T)$. Теорема доведена.

Примітка. Результат теореми 5.10 можна покращити: визначити залежність характеру особливостей розв'язку задачі при $t = 0$ від особливостей правої частини рівняння та порядків сингулярностей узагальнених функцій у початкових умовах, як це зроблено у випадку $\beta \in (0, 1)$.

Результати поширюються на інші рівняння з декількома дробовими похідними за просторовими змінними, якщо функція Гріна має подібні оцінки (з полярними особливостями). У наступному підрозділі наведемо приклад такого рівняння та знайдемо оцінки його фундаментальної функції.

5.6 Фундаментальний розв'язок рівняння з частинними дробовими похідними

Побудові фундаментальних функцій операторів із частинними дробовими похідними присвячено праці [59, 121,182] та інші. Ми узагальнюємо результат [182] на випадок однорідного еліптичного оператора з дробовими похідними та сталими коефіцієнтами (замість оператора $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ у [182]). Одержані результати мають застосування при розв'язності задачі Коші для таких рівнянь, зокрема, і у просторі узагальнених функцій, як, наприклад, у попередніх підрозділах та при дослідженні дифузійних процесів [155].

Розглянемо оператор із дробовими похідними

$$Au(x) = A(x,\partial)u(x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x,\xi)(\mathcal{F}u)(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi =$$
$$= \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[a(x,\xi)(\mathcal{F}_{x\to\xi}u(\xi)], \quad u\in D(\mathbb{R}^n),$$

де $\mathcal{F}u$– перетворення Фур'є функції u, $a(x,\xi) = \sum\limits_{j=0}^{N}\sum\limits_{|\gamma|=s_j\le s} a_\gamma(x)(-i\xi)^\gamma$ (скорочений запис $a(x,\xi) = \sum\limits_{|\gamma|\le s} a_\gamma(x)(-i\xi)^\gamma$), $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n), \gamma_i$ – невід'ємні числа, які можуть бути дробовими, $|\gamma| = \gamma_1+\dots+\gamma_n$, $i^2 = -1$, $(-i\xi)^\gamma = (-i\xi_1)^{\gamma_1}\cdot(-i\xi_n)^{\gamma_n}$, $a_\gamma\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Зауважимо, що

$f_{-\beta}(t)\hat{*}v(t) = f'_{1-\beta}(t)\hat{*}v(t) = -f_{1-\beta}(t)\hat{*}v'(t), \quad v\in D(\mathbb{R})$. Маємо

$$\tfrac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(-i\xi)^\gamma(\mathcal{F}u)(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi =$$
$$= \tfrac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(-i\xi)^\gamma e^{i(x-y,\xi)}u(y)dyd\xi = \tfrac{1}{(-2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(-i\xi)^\gamma e^{i(t,\xi)}u(x-t)dtd\xi =$$
$$= \tfrac{1}{(-2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(-i\xi)^\gamma(e^{i(x,\xi)}*u(x))d\xi = \tfrac{1}{(-2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(-i\xi)^\alpha e^{i(x,\xi)}d\xi * u(x) =$$
$$(-1)^n\mathcal{F}^{-1}[(-i\xi)^\gamma]*u(x) = f_{-\gamma}(x)*u(x).$$

Отже,

$$Au(x) = \sum_{|\gamma|\le s} a_\gamma(x)(f_{-\gamma}(x) * u(x)), \quad u \in D(\mathbb{R}^n).$$

Зауважимо, що для довільних $u, v \in D(\mathbb{R}^n)$

$$\int Au\bar{v}dx = \int \sum_{|\gamma|\le s} a_\gamma(f_{-\gamma} * u)\bar{v}dx = \int \sum_{|\gamma|\le s} u(f_{-\gamma}\hat{*}a_\gamma\bar{v})dx\,.$$

а тому формально спряжений оператор до оператора A має вигляд

$A^*v(x) = \sum\limits_{|\gamma|\le s} \overline{f_{-\gamma}\hat{*}(a_\gamma\bar{v})}$ $\quad$ ($A^*v(x) = \sum\limits_{|\gamma|\le s} f_{-\gamma}\hat{*}(a_\gamma\bar{v})$, якщо a_γ – дійснозначні функції).

Псевдодиференціальний оператор A називається *еліптичним* в області $\Omega \in \mathbb{R}^n$, якщо існують такі додатні сталі C_1, C_2, що

$$|a(x,\xi)| \ge C_1(1+|\xi|)^s \quad \forall x \in \Omega, |\xi| \ge C_2.$$

Використаємо перетворення Радона за просторовими змінними $x_1, \ldots, x_n$ для знаходження розв'язку $\omega(x,t) = \omega_n(x,t)$ рівняння

$$f_{-\beta}(t) * \omega(x,t) - \sum_{j=1}^{n} b_j f_{-\alpha}(x_j) * \omega(x,t) = \delta(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{5.57}$$

зі сталими коефіцієнтами $b_j, \quad j = 1, \ldots, n$ за умови

$$\sum_{j=1}^{n} b_j p_j^\alpha \ge C_0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^n, |p| = 1. \tag{5.58}$$

Тут $\delta(x,t)$ – дельта-функція Дірака.

Теорема 5.11. *При $\alpha > \beta$ або $\alpha < \beta < 2$ та за умови (5.58) існує фундаментальний розв'язок $\omega_n \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ рівняння (5.57) та правильні оцінки*

$$|\omega_n(x,t)| \le \frac{C_n^*}{t|x|^{n-\alpha}} ln \frac{t^\beta}{|x|^\alpha}, \qquad |x|^\alpha < t^\beta, \tag{5.59}$$

$$|\omega_n(x,t)| \le \frac{C_n}{t^{1-\beta}|x|^n}, \qquad |x|^\alpha > t^\beta. \tag{5.60}$$

При $\alpha \ne \frac{n+2m}{\sigma}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma \in \mathbb{N}$ в оцінці (5.59) логарифми можна опустити.

Доведення. Нехай Σ_n – одинична сфера в $\mathbb{R}^n$, $p \in \Sigma_n$,
$\xi = (p, x) = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$, $b^2 = b^2(p) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j p_j^{\alpha}$.
Зауважимо, що за умови (5.58) $b^2(p) \geq C_0 > 0$ для всіх $p \in \Sigma_n$.
Шукаємо функцію $\omega_n(x,t)$ у вигляді

$$\omega_n(x,t) = \int\limits_{\Sigma_n} \omega_{p,n}(\xi,t) dS_p. \tag{5.61}$$

За властивістю згортки

$$\sum_{j=1}^{n} b_j f_{-\alpha}(x_j) * \omega_{p,n}((p,x),t) = \sum_{j=1}^{n} b_j p_j^{\alpha} \Big(f_{-\alpha}(\xi) * \omega_{p,n}(\xi,t) \Big).$$

Враховуючи, що $\delta(x,t) = \delta(x) \cdot \delta(t)$, для $\delta(x)$ правильне зображення ([149, с. 103])

$$\delta(x) = a_n^0 \int\limits_{\Sigma_n} \delta^{(n-1)}(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) dS_p, \quad a_n^0 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}, \tag{5.62}$$

при непарному n, а при парному n

$$\delta(x) = b_n^0 \int\limits_{\Sigma_n} (p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n)^{-n} dS_p, \quad b_n^0 = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n}, \tag{5.63}$$

для знаходження $\omega_{p,n}$ одержуємо рівняння

$$f_{-\beta}(t) * \omega_{p,2k+1}(\xi,t) - b^2(p) f_{-\alpha}(\xi) * \omega_{p,2k+1}(\xi,t) = a_{2k+1}^0 \delta^{(2k)}(\xi) \cdot \delta(t), \tag{5.64}$$

$$f_{-\beta}(t) * \omega_{p,2k}(\xi,t) - b^2(p) f_{-\alpha}(\xi) * \omega_{p,2k}(\xi,t) = b_{2k}^0 \xi^{-2k} \times \delta(t), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.65}$$

Використовуючи результати [182], знаходимо фундаментальний розв'язок $G_p(\xi,t)$ рівняння

$$f_{-\beta}(t) * G_p(\xi,t) - b^2(p) f_{-\alpha}(\xi) * G_p(\xi,t) = \delta(\xi,t). \tag{5.66}$$

За теоремою з [6], с. 142 розв'язки рівнянь (5.64) та (5.65) мають відповідно вигляд

$$\omega_{p,2k+1}(\xi,t) = a_{2k+1}^0 G_p(\xi,t) * \delta^{(2k)}(\xi)$$

$$= a^0_{2k+1}\frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}}G_p(\xi,t) = a^0_{2k+1}\frac{d^{2k}}{d|\xi|^{2k}}G_p(|\xi|,t), \tag{5.67}$$

$$\omega_{p,2k}(\xi,t) = b^0_{2k}G_p(\xi,t) * \xi^{-2k}, \tag{5.68}$$

Згідно з [182],

$$G_p(\xi,t) = \frac{\pi^{-1/2}t^{\beta-1}}{|\xi|}H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|\xi|^\alpha}{2^\alpha b^2(p)t^\beta}\middle|\begin{matrix}(1,1) & (\beta,\beta) & \\ (1,1) & (1/2,\alpha/2) & (1,\alpha/2)\end{matrix}\right).$$

Для функції G_p маємо $a^* = 2-\beta$, $\Delta^* = \alpha-\beta$. Тому за умов теореми функція G_p існує для всіх $\xi \neq 0$, $t > 0$.

Використовуючи формулу диференціювання для H-функцій Фокса ([207], с. 33), матимемо

$$\omega_{p,2k+1}(\xi,t) = \frac{a^0_{2k+1}\pi^{-1/2}t^{\beta-1}}{|\xi|^{2k+1}}H^{3,1}_{3,4}\left(\frac{|\xi|^\alpha}{2^\alpha b^2 t^\beta}\middle|\begin{matrix}(1,1) & (\beta,\beta) & (1,\alpha) & \\ (2k+1,\alpha) & (1,1) & (1/2,\alpha/2) & (1,\alpha/2)\end{matrix}\right).$$

У [207] побудовано асимптотику для H-функцій Фокса. Враховуючи, що виконуються умови (1.6) та (1.3.2) із [207], за теоремою 1.7 із [207] одержуємо оцінки:

$$|\omega_{p,2k+1}(\xi,t)| \leq \frac{q_{2k+1}}{t^{1-\beta}|\xi|^{2k+1}}, \quad |\xi|^\alpha > t^\beta,$$

а за наслідком 1.12.1 із теореми 1.12 [207]

$$|\omega_{p,2k+1}(\xi,t)| \leq \frac{q^*_{2k+1}t^{\beta-1}}{|\xi|^{2k+1}}\left(\frac{|\xi|^\alpha}{t^\beta}\right)^{\min\{1,\frac{1}{\alpha}\}} ln\frac{t^\beta}{|\xi|^\alpha}, \qquad |\xi|^\alpha < t^\beta,$$

звідки

$$|\omega_{p,2k+1}(\xi,t)| \leq \frac{q^*_{2k+1}}{t|\xi|^{2k+1-\alpha}} ln\frac{t^\beta}{|\xi|^\alpha}, \qquad \alpha < 1$$

$$|\omega_{p,2k+1}(\xi,t)| \leq \frac{q^*_{2k+1}}{t^{1-\beta(1-\frac{1}{\alpha})}|\xi|^{2k}} ln\frac{t^\beta}{|\xi|^\alpha}, \qquad \alpha \geq 1.$$

Тут і далі $q_i, q^*_i, q_{i,j}, q^*_{i,j}$ – додатні сталі.

Тепер за формулою (5.67) та з одержаних вище оцінок функції $\omega_{p,2k+1}(\xi,t)$ знаходимо оцінки шуканого фундаментального розв'язку. У випадку $\alpha < 1$ матимемо

$$|\omega_{2k+1}(x,t)| \leq \frac{q^*_{2k+1}}{t}\int\limits_{\Sigma_{2k+1}\cap\{p:|\xi|^\alpha<t^\beta\}} |\xi|^{-(2k+1-\alpha)} ln\frac{t^\beta}{|\xi|^\alpha} d_pS +$$

$$+\frac{q_{2k+1}}{t^{1-\beta}}\int\limits_{\Sigma_{2k+1}\cap\{p:|\xi|^\alpha>t^\beta\}}|\xi|^{-2k-1}d_pS=I_1(x,t)+I_2(x,t).$$

Зауважимо, що другий доданок відсутній у випадку $|x|^\alpha<t^\beta$, оскільки

$$|\xi|=|x||cos(x,p)|\le|x| \text{ при } p\in\Sigma_{2k+1}.$$

У випадку $|x|^\alpha>t^\beta$ маємо

$$0\le I_2(x,t)=\tfrac{q_{2k+1}}{t^{1-\beta}}\int\limits_{\Sigma_{2k+1}\cap\{p:|\xi|^\alpha>t^\beta\}}|\xi|^{-2k-1}d_pS\le\tfrac{q_{2k+1}}{t^{1-\beta+\frac{\beta}{\alpha}}}\int\limits_{\Sigma_{2k+1}}|\xi|^{-2k}d_pS=0.$$

Остання рівність одержана на підставі формули вправи 10 із [149, с. 105-106], за якою $\int\limits_{\Sigma_{2k+1}}\xi^{-2k}d_pS=0$. Отже, $I_2(x,t)=0$.

Виконуючи заміну $\eta=\frac{\xi}{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}=p_1\frac{x_1}{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}+\dots+p_n\frac{x_n}{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}$, знаходимо

$$I_1(x,t)=q^*_{2k+1}\alpha t^{-1-(2k+1-\alpha)\frac{\beta}{\alpha}}\Big(\int\limits_{\Sigma_{2k+1}\cap\{p:|\eta|<1\}}|\eta|^{-(2k+1-\alpha)}ln\tfrac{1}{|\eta|}d_pS\Big)(\tfrac{x}{t^{\frac{\beta}{\alpha}}})\le$$

$$\le q^*_{2k+1}\alpha t^{-1-(2k+1-\alpha)\frac{\beta}{\alpha}}\Big(\int\limits_{\Sigma_{2k+1}}|\eta|^{-(2k+1-\alpha)}ln\tfrac{1}{|\eta|}d_pS\Big)(\tfrac{x}{t^{\frac{\beta}{\alpha}}})\le\tfrac{q^*_{2k+1,1}}{t|x|^{2k+1-\alpha}}|ln\tfrac{t^\beta}{|x|^\alpha}|.$$

При $|x|^\alpha<t^\beta$ одержуємо оцінку (5.59). Враховуючи, що

$|ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}|=ln\frac{|x|^\alpha}{t^\beta}\le C\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}$ при $|x|^\alpha>t^\beta$,

з попередньої оцінки одержуємо

$$|\omega_{2k+1}(x,t)|\le\frac{q^*_{2k+1,1}}{t|x|^{2k+1-\alpha}}ln\frac{|x|^\alpha}{t^\beta}\le\frac{C_{2k+1}}{t^{1-\beta}|x|^{2k+1}},$$

а отже, оцінку (5.60).

При $\alpha\ge1$, згідно з формулою (5.67) та оцінками функції $\omega_{p,2k+1}(\xi,t)$, подібно знаходимо

$$|\omega_{2k+1}(x,t)|\le q^*_{2k+1}\int\limits_{\Sigma_{2k+1}\cap\{p:|\xi|^\alpha<t^\beta\}}\frac{|\xi|^{-2k}}{t^{1-\beta(1-\frac{1}{\alpha})}}ln\frac{t^\beta}{|\xi|^\alpha}d_pS+$$

$$+\frac{q_{2k+1}}{t^{1-\beta}}\int\limits_{\Sigma_{2k+1}\cap\{p:|\xi|^\alpha>t^\beta\}}|\xi|^{-2k-1}d_pS\le$$

$$\le\frac{q^*_{2k+1,1}}{t^{1-\beta(\frac{\alpha-1}{\alpha})}|x|^{2k}}|ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}|+\frac{q_{2k+1,1}}{t^{1-\beta+\frac{\beta}{\alpha}}}\int\limits_{\Sigma_{2k+1}}\xi^{-2k}d_pS=\frac{q^*_{2k+1,1}}{t^{1-\beta(\frac{\alpha-1}{\alpha})}|x|^{2k}}|ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}|.$$

Звідси, враховуючи, що $t^{-\frac{\beta}{\alpha}} < |x|^{-1}$ при $|x|^\alpha > t^\beta$, одержуємо оцінку (5.59), а враховуючи, що $|ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}| = ln\frac{|x|^\alpha}{t^\beta} \le C\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}$ при $|x|^\alpha > t^\beta$, а при $\alpha \ge 1$ ще й $t^{\beta(1-\frac{1}{\alpha})} < |x|^{\alpha-1}$), одержуємо оцінку (5.60).

Тепер розглянемо випадок $n = 2k$. Оскільки, згідно з формулою (5.68),

$$\omega_{p,2k}(\xi,t) = b^0_{2k}G_p(\xi,t) * \xi^{-2k} =$$

$$= b^0_{2k}[G_p(\xi,t) * (\theta(\xi)\xi^{-2k}) + G_p(\xi,t) * (\theta(-\xi)\xi^{-2k})] =$$

$$= b^0_{2k}\Gamma(1-2k)[(f_{1-2k}(\cdot) * G_p(\cdot,t))(\xi) + (f_{1-2k}(\cdot) * G_p(\cdot,t))(-\xi)] =$$

$$= 2b^0_{2k}\Gamma(1-2k)\delta^{(2k-1)}(\xi) * G_p(\xi,t) = 2b^0_{2k}\Gamma(1-2k)\frac{d^{2k-1}}{d|\xi|^{2k-1}}G_p(|\xi|,t),$$

то цей випадок зводиться до попереднього. Теорема доведена.

5.7 Задачі в обмежених областях

У даному підрозділі доводимо однозначну розв'язність першої крайової задачі для рівняння дифузії з дробовою похідною $\beta \in (0,1)$ у просторах узагальнених функцій типу D' та деяких їхніх підпросторах.

5.7.1 Перша крайова задача у просторі D'

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$,
$S = \partial\Omega$ – межа області Ω (із C^∞), $Q_T = \Omega \times (0,T]$, $Q_{1T} = \partial\Omega \times (0,T]$,

$(f,\varphi)_0$ – значення $f \in D'(\bar{Q}_T)$ на основній функції $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$,

$(f,\varphi)_1$ – значення $f \in D'(\bar{Q}_{1T})$ на основній функції $\varphi \in D(\bar{Q}_{1T})$,

$(f,\varphi)_2$ – значення $f \in D'(\bar{\Omega})$ на основній функції $\varphi \in D(\bar{\Omega})$,

$C^{2,\beta}(Q_T)$ – клас обмежених, двічі неперервно диференційовних за змінними x функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$, рівних нулю при $t \ge T$ та з неперервними $D^\beta_t v(x,t)$ в Q_T. За рівнянням

$$u_{-\beta}(t) * u(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \quad a = const \quad (5.69)$$

вводимо оператори

$$\hat{L} : (\hat{L}v)(x,t) \equiv f_{-\beta}(t)\hat{*}v(x,t) - a^2\Delta v(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, v \in D(\bar{Q}_T)\,,$$

$$L : (Lv)(x,t) \equiv f_{-\beta}(t) * v(x,t) - a^2\Delta v(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, v \in D'(\bar{Q}_T),$$

$$L^{reg} : \quad (L^{reg}v)(x,t) \equiv D_t^{\beta}v(x,t) - a^2\Delta v(x,t), \quad (x,t) \in Q_T\,,\ v \in C^{2,\beta}(Q_T)$$

та функційний простір

$$X(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T) : \hat{L}\varphi \in D(\bar{Q}_T), \varphi\big|_{\bar{Q}_{1T}} = 0\}\,.$$

Буде доведено, що $X(\bar{Q}_T)$ непорожний.

Припущення (L_b): $\beta \in (0,1)$, $F \in X'(\bar{Q}_T)$, $F_1 \in D'(\bar{Q}_{1T})$, $F_2 \in D'(\bar{\Omega})$.

За припущення (L_b) вивчаємо задачу

$$u(x,t) = F_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_{1T}, \qquad u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \Omega \tag{5.70}$$

для рівняння (5.69).

Означення 5.8. Функція $u \in D'(\bar{Q}_T)$, що задовольняє тотожність

$$(u(x,t), (\hat{L}\psi)(x,t))_0 = (F,\psi)_0 + (F_1, a^2\frac{\partial\psi}{\partial\nu})_1 +$$
$$+(F_2, \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(\cdot,t)dt)_2 \ \ \forall\psi \in X(\bar{Q}_T), \tag{5.71}$$

називається розв'язком задачі (5.69), (5.70).

Зауважимо, що для $u \in C^{2,\beta}(Q_T)$, $\psi \in X(\bar{Q}_T)$ правильна формула Гріна

$$\int\limits_{Q_T} u(x,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} (L^{reg}u)(x,t)\psi(x,t)dxdt + \tag{5.72}$$

$$+a^2\int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial\Omega} u(x,t)\tfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}dS + \int\limits_{\Omega} u(x,0)dx \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt\,.$$

Вона доводиться, як відповідна формула в лемі 5.11. Тут $\nu(x)$– орт внутрішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$ у точці $x \in \partial\Omega$.

Задачу (5.69), (5.70) можна вважати узагальненням задачі

$$L^{reg}u = g_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{5.73}$$

$$u(x,t) = g_1(x,t), (x,t) \in Q_{1T}, \qquad u(x,0) = g_2(x), \quad x \in \Omega \tag{5.74}$$

з регулярними даними g_0, g_1, g_2. З одержаної нижче теореми 5.9 можна вивести, що при достатньо регулярних $F = g_0$, $F_1 = g_1$, $F_2 = g_2$ розв'язки задач (5.69), (5.70) та (5.73), (5.74) збігаються.

Означення 5.9. Вектор-функцією Гріна задачі (5.69), (5.70) називається така трійка функцій $(G_0(x,t), G_1(x,t), G_2(x,t))$, що при достатньо регулярних g_0, g_1, g_2 функція

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_0(x-y,t-\tau) g_0(y,\tau) dy + \tag{5.75}$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{Q_{1T}} G_1(x-y,t-\tau) g_1(y,\tau) dS d\tau + \int\limits_\Omega G_2(x-y,t) g_2(y) dy, \quad (x,t) \in Q_T$$

є класичним (із $C^{2,\beta}(Q_T)$) розв'язком задачі (5.73), (5.74).

З означення 5.9 випливає, що

$LG_0(x,t) = \delta(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$, де δ – дельта-функція Дірака,

$G_0(x,t) = 0$, $(x,t) \in Q_{1T}$,

$L^{reg} G_1(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \qquad G_1(x,t) = \delta(x,t), \quad (x,t) \in Q_{1T},$

$L^{reg} G_2(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \quad G_2(x,0) = \delta(x), \quad x \in \Omega.$

Введемо спряжені оператори Гріна задачі

$$(\hat{\mathcal{G}}_0 \varphi)(y,\tau) = \int\limits_\tau^T \int\limits_\Omega G_0(x-y,t-\tau) \varphi(x,t) dx,$$

$$(\hat{\mathcal{G}}_1 \varphi)(y,\tau) = \int\limits_\tau^T \int\limits_{\partial\Omega} G_1(x-y,t-\tau) \varphi(x,t) dx,$$

$$(\hat{\mathcal{G}}_2 \varphi)(y) = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega G_2(x-y,t) \varphi(x,t) dx dt, \qquad \varphi \in D(\bar{Q}_T)$$

та вивчимо їх властивості.

Лема 5.14. *Для кожної* $\psi \in X(\bar{Q}_T)$

$$(\hat{\mathcal{G}}_0(\hat{L}\psi))(y,\tau) = \psi(y,t), \quad (y,t) \in \bar{Q}_T, \tag{5.76}$$

$$(\hat{\mathcal{G}}_1(\hat{L}\psi))(y,\tau) = a^2 \frac{\partial \psi(y,t)}{\partial \nu}, \quad (y,t) \in \bar{Q}_{1T}, \tag{5.77}$$

$$(\hat{\mathcal{G}}_2(\hat{L}\psi))(y) = \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(y,t)dt, \quad y \in \Omega. \tag{5.78}$$

Доведення. Якщо підставимо розв'язок (5.75) класичної першої крайової задачі (5.73), (5.74) в формулу (5.72), то при довільній $\psi \in X(\bar{Q}_T)$ одержимо

$$\int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_0(x-y,t-\tau)g_0(y,\tau)dy \Big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt+$$
$$\int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial\Omega} G_1(x-y,t-\tau)g_1(y,\tau)dy \Big)(\hat{L}\psi)(x,t)dSdt+$$
$$+\int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_\Omega G_2(x-y,t)g_2(y)dy \Big)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt =$$
$$= \int\limits_{Q_T} g_0(x,t)\psi(x,t)dxdt + a^2 \int\limits_{Q_{1T}} g_1(x,t)\tfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}dSdt+$$
$$+\int\limits_{Q_T} g_2(x)f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dxdt\,,$$

тобто
$$\int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_\tau^T dt \int\limits_\Omega G_0(x-y,t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t)dx \Big) g_0(y,\tau)dyd\tau+$$
$$+\int\limits_{Q_{1T}} \Big(\int\limits_\tau^T dt \int\limits_\Omega G_1(x-y,t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t)dx \Big) g_1(y,\tau)dSd\tau+$$
$$+\int\limits_\Omega \Big(\int\limits_{Q_T} G_2(x-y,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt \Big) g_2(y)dy =$$
$$= \int\limits_{Q_T} g_0(x,t)\psi(x,t)dxdt + a^2 \int\limits_{Q_{1T}} g_1(x,t)\tfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}dSdt+$$
$$+\int\limits_{Q_T} g_2(x)f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dxdt\,.$$

За довільністю g_0, g_1, g_2 одержуємо правильність леми. $\square$

З леми 5.14 одержуємо, що

$$G_1(x,t) = a^2\tfrac{\partial G_0(x,t)}{\partial\nu}\,,\ (x,t) \in Q_{1T}\,.$$
$$G_2(x,t) = f_{1-\beta}(t) * G_0(x,t)\,,\ (x,t) \in Q_T\,.$$

Теорема 5.12. *Вектор-функція Гріна першої крайової задачі (5.69)–(5.70) існує.*

Доведення. Враховуючи останні формули, достатньо довести існування головної функції Гріна $G_0(x,t)$. Як у [45], [183] для задачі Коші та у [36] для

загальних параболічних крайових задач, існування $G_0(x,t)$ можна довести методом Леві. Її існування можна також довести методом рядів Фур'є. Справді, вибираючи у формулі Гріна за функції $\psi_k \in X(\bar{Q}_T)$ розв'язки рівнянь $(\hat{L}\psi_k)(y,t) = \varphi_k(x,t,y,\tau)$, де послідовність $\varphi_k(x,t,y,\tau)$ $(k \to \infty)$ є дельтавидною, після граничного переходу при $k \to \infty$ одержуємо зображення (5.75) розв'язку задачі (5.69)–(5.70), де через $G_0(x,t,y,\tau)$ позначено $G_0(x-y,t-\tau)$ (границю послідовності ψ_k у $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$), яка як функція (y,τ) є розв'язком задачі

$$(\hat{L}_{y,\tau}G_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y,t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau) \in Q_T, \tag{5.79}$$

$$G_0|_{y\in\bar{Q}_1} = 0, \qquad G_0(x,t,y,T) = 0.$$

Шукаємо G_0 у вигляді

$$G_0(x,t,y,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m(x,t,\tau)\omega_m(y), \tag{5.80}$$

де $\omega_m(y)$ – ортонормовані власні функції стаціонарної крайової задачі

$$\Delta\omega_m + \lambda_m\omega_m = 0, \quad y \in \Omega_0, \quad \omega|_{\Omega_1} = 0.$$

Підставляючи (5.80) у рівняння задачі (5.79), матимемо

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[f_{-\beta}(\tau)\hat{*}S_m(x,t,\tau) + \lambda_m a^2 S_m(x,t,\tau)\right]\omega_m(y) =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} (\delta(x-y),\omega_m(y))\omega_m(y)\delta(t-\tau),$$

звідки, враховуючи, що $(\delta(x-y),\omega_m(y)) = \omega_m(x)$, одержуємо задачі для функцій $S_m(x,t,\tau)$:

$$f_{-\beta}(\tau)\hat{*}S_m(x,t,\tau) + \lambda_m a^2 S_m(x,t,\tau) = \omega_m(x)\delta(t-\tau), \tag{5.81}$$

$$S_m(x,t,T) = 0, \quad m = 1,2,\ldots .$$

Кожна з задач (5.81) зводиться до лінійного інтегрального рівняння Вольтерри

$$S_m(x,t,\tau) + \lambda_m a^2 f_\beta(\tau)\hat{*}S_m(x,t,\tau) = f_\beta(t-\tau)\omega_m(x). \tag{5.82}$$

Методом послідовних наближень знаходимо розв'язок рівняння (5.82) у вигляді рівномірно збіжного при $x \in \bar{Q}_0, \quad 0 \le \tau < t \le T$ ряду

$$S_m(x,t,\tau) = \sum_{p=0}^{\infty} (-a^2\lambda_m)^p f_{(p+1)\beta}(t-\tau)\omega_m(x) =$$

$$= (t-\tau)^{\beta-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[-a\lambda_m(t-\tau)^\beta]^p}{\Gamma(p\beta+\beta)} \omega_m(x) = (t-\tau)^{\beta-1} E_\beta(-a\lambda_m(t-\tau)^\beta)\omega_m(x).$$

Тоді рівномірна при $t > \tau$ збіжність ряду (5.80) випливає із рівномірної збіжністі ряду

$$\frac{C}{a^2(t-\tau)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\omega_m(x)\omega_m(y)|}{\lambda_m}, \quad x, y \in \bar{Q}_0, \quad 0 \le \tau < t \le T.$$

Лема 5.15. $\hat{\mathcal{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)\,, \quad \hat{\mathcal{G}}_1 : D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_{1T})\,,$
$\hat{\mathcal{G}}_2 : D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty}(\bar{\Omega})\,.$

Доведення. Згідно з [182] (формулою (5.26) при $\alpha = 2$), фундаментальний розв'язок $G(x,t)$ рівняння

$$u_t^{(\beta)} - a^2\Delta u = F(x,t), \quad (x,t) \in Q_T. \tag{5.83}$$

після спрощення за властивістю 2.2 H-функцій Фокса із [207] має вигляд

$$G(x,t) = \frac{\pi^{-N/2} t^{\beta-1}}{|x|^N} H_{1,2}^{2,0}\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^\beta} \middle| \begin{matrix} (\beta,\beta) \\ (1,1) \end{matrix} \quad (N/2,1) \right). \tag{5.84}$$

За теоремою 1.1 [207] функція G існує для всіх $x \ne 0$, $t > 0$. Використовуючи властивість 2.8 [207] про диференціювання H-функцій Фокса, знаходимо

$$\frac{dG(x,t)}{d|x|} = -\frac{\pi^{-N/2} t^{\beta-1}}{|x|^{N+1}} H_{2,3}^{3,0}\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^\beta} \middle| \begin{matrix} (\beta,\beta) & (N,2) \\ (N+1,2) & (1,1) \end{matrix} \quad (N/2,1) \right). \tag{5.85}$$

У підрозділі 5.1 було знайдено та встановлено існування

$$f_{1-\beta}(t) * G(x,t) = \frac{\pi^{-N/2}}{|x|^N} H_{1,2}^{2,0}\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1,\beta) \\ (1,1) \end{matrix} \quad (N/2,1) \right). \tag{5.86}$$

За методом Леві (як це було показано у [45], [183], [48]) функції $G_0(x,t)$, $G_1(x,t)$, $G_2(x,t)$ та їхні похідні мають такого ж вигляду оцінки, як функції $G(x,t)$, $\frac{\partial G(x,t)}{\partial \nu}$, $f_{1-\beta}(t)*G(x,t)$ та їхні похідні, відповідно. Далі дослідження спряжених операторів $\hat{G}_i\varphi$ $(i=0,1,2)$ на $D(\bar{Q}_T)$ проводимо, як у [61, 56], 137, 183] та у попередньому підрозділі. Використовуємо позначення

$Q_{T,\varepsilon}(y,\tau)=Q_{T,\varepsilon}=\{(x,t)\in\bar{Q}_T:|x-y|<\varepsilon, 0<t-\tau<\varepsilon^{2/\beta}\}$ для кожної точки $(y,\tau)\in\bar{Q}_T$,

$Q_{1T,\varepsilon}(y,\tau)=Q_{1T,\varepsilon}=\{(x,t)\in\bar{Q}_T:|x-y|<\varepsilon, 0<t-\tau<\varepsilon^{2/\beta}\}$ для кожної точки $(y,\tau)\in\bar{Q}_{1T}$,

$Q_{2T,\varepsilon}(y)=Q_{T,\varepsilon}(y,0)=Q_{2T,\varepsilon}=\{(x,t)\in\bar{Q}_T:|x-y|<\varepsilon, 0<t<\varepsilon^{2/\beta}\}$ для кожної точки $y\in\bar{\Omega}$.

Оскільки функції $G_i(x,t)$ $(i=0,1,2)$ мають тільки точкові особливості в $\bar{Q}_T$, то використовуючи інтегрування частинами, дослідження $D_y^\gamma\hat{G}_i\varphi$ при $\varphi\in D(\bar{Q}_T)$ зводиться до дослідження

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} G_i(x-y,t-\tau)D_x^\gamma\varphi(x,t)dxdt, \quad i=0,1, \quad \int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} G_2(x-y,t)D_x^\gamma\varphi(x,t)dxdt \tag{5.87}$$

та $\int\limits_{Q_{1T,\varepsilon}} M_\gamma(x,D_x)G_i(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dSdt$, де $M_\gamma(x,D_x)$ – диференціальні оператори на $Q_{1T,\varepsilon}$ ("дотичні"диференціальні оператори) порядків $\le|\gamma|-1$.

Диференціальний оператор $M_\gamma(x,D_x)$ на поверхні можна подати у вигляді

$$M_\gamma(x,D_x)=M_{0,\gamma}(x,D_x)\Delta_x+M_{1,\gamma}(x,D_x)\frac{\partial}{\partial\nu_x}+M_{2,\gamma}(x,D_x)=$$

$$=M_{0,\gamma}(x,D_x)(\Delta_x-D_t^\beta)+M_{1,\gamma}(x,D_x)\frac{\partial}{\partial\nu_x}+M_{2,\gamma}(x,D_x)+D_t^\beta,$$

де $M_{0,\gamma}(x,D_x)$– диференціальний оператор порядку $|\gamma|$, $M_{j,\gamma}(x,D_x)$ – "дотичні"диференціальні оператори) порядків $|\gamma|-j$, $j=1,2$. Тоді, враховуючи, що $(\Delta_x-D_t^\beta)G_i(x-y,t)=0$, $i=0,1,2$ при $x\neq y$, $t>0$ дослідження поверхневих інтегралів зводиться до дослідження

$$\int\limits_{Q_{1T,\varepsilon}} M_{1,\gamma}(x,D_x)\frac{\partial G_i(x-y,t-\tau)}{\partial\nu_x}\varphi(x)dSdt= \tag{5.88}$$

$$\int\limits_{Q_{1T,\varepsilon}} \frac{\partial G_i(x-y,t-\tau)}{\partial \nu_x} M^*_{1,\gamma}(x,D_x)\varphi(x,t)dSdt,$$

$$\int\limits_{Q_{1T,\varepsilon}} M_{2,\gamma}(x,D_x)G_i(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dSdt = \tag{5.89}$$

$$\int\limits_{Q_{1T,\varepsilon}} G_i(x-y,t)M^*_{2,\gamma}(x,D_x)\varphi(x,t)dSdt, i=1,2,3$$

($\tau = 0$ при $i = 2$), де $M^*_{j,\gamma}(x,D_x)$ – диференціальні оператори, спряжені до $M_{j,\gamma}(x,D_x)$ на $Q_{1T,\varepsilon}$ $\quad (\int\limits_{Q_{1T,\varepsilon}} [M_{j,\gamma}(x,D_x)\psi(x,t)]\varphi(x,t)dSdt =$
$= \int\limits_{Q_{1T,\varepsilon}} \psi(x,t)[M^*_{j,\gamma}(x,D_x)\varphi(x,t)]dSdt\,,\ t\in[0,T]\,),\ j=1,2\,.$

За властивістю диференціювання H-функцій Фокса одержуємо оцінку

$$\left|\frac{\partial G_2(x,t)}{\partial \nu_x}\right| \le P_2 \frac{\pi^{-N/2}}{|x|^{N+1}} \left| H^{3,0}_{2,3}\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^\beta}\middle| \begin{matrix} (1,\beta) & (N,2) & \\ (N+1,2) & (1,1) & (N/2,1)\end{matrix}\right)\right|,$$

$P_2 = const > 0\,.$

У [207] побудована асимптотика для H-функцій Фокса. Враховуючи, що виконуються умови (1.1.6) та (1.3.2) із [207], $a^* = 2-\beta > 0$, для одержання оцінок Н-функцій використаємо наслідок 1.10.2 із [207], за яким при дійсних $z\to\infty$

$$\left| H^{q,0}_{p,q}\left(z\middle| \begin{matrix} (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)\right| \le C|z|^{\frac{\mu+\frac12}{\Delta^*}} e^{-h|z|^{\frac{1}{\Delta^*}}},$$

а при дійсних $z\to 0$

$$\left| H^{0,p}_{p,q}\left(z\middle| \begin{matrix} (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)\right| \le C|z|^{-\frac{\mu+\frac12}{|\Delta^*|}} e^{-h|z|^{-\frac{1}{|\Delta^*|}}},$$

де $\mu = \sum\limits_{j=1}^{q} b_j - \sum\limits_{i=1}^{p} a_i + \frac{p-q}{2}$, $h = h(a,\beta) > 0$, C і далі C_i, C_i^*, c_i, c_i^* ($i = 0,1,2,3$)– додатні сталі.

Знаходимо $\quad \Delta^* = 2-\beta\,,$

$\mu_0 + \frac12 = \frac{N}{2} + 1 - \beta$ для функції $G_0\,,$

$\mu_1 + \frac12 = \frac{N+1}{2} + 2 - \beta$ для функції $\frac{dG_1(x,t)}{d|x|}\,,$

$\mu_2 + \frac12 = \frac{N}{2}$ для функції $G_2\,,$

а тоді за наслідком 1.10.2 із [207] при $|x|^2 > t^\beta$

$$|G_0(x,t)| \le \frac{C_0 t^{\beta-1}}{|x|^N} \cdot \left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{N+2-2\beta}{2(2-\beta)}} e^{-h\left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \le \frac{c_0}{t^{1-\beta}|x|^N},$$

$$|G_1(x,t)| \le \frac{C_1 t^{\beta-1}}{|x|^{N+1}} \cdot \left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{(\frac{N+1}{2}+2-\beta)\frac{1}{2-\beta}} e^{-h\left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \le \frac{c_1}{t^{1-\beta}|x|^{N+1}} \le \frac{c_1^*}{t|x|^{N-2}},$$

$$|G_2(x,t)| \le \frac{C_2}{|x|^N} \cdot \left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{N}{2(2-\beta)}} e^{-h\left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \le \frac{c_2}{|x|^N}$$

$$|\frac{\partial}{\partial \nu_x} G_2(x,t)| \le \frac{C_3}{|x|^{N+1}} \cdot \left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{N+1}{2(2-\beta)}} e^{-h\left(\frac{|x|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \le \frac{c_3}{|x|^{N+1}}.$$

За наслідком з теореми 1.12 [207] при $z \to 0$ для H-функцій правильні оцінки

$$\left| H_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} (a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q) \end{matrix}\right) \right| \le C|z|^\varrho |logz|^{N^*-1},$$

де $\varrho = \min\limits_{1\le j\le m} \frac{Reb_j}{\beta_j}$, N^* – найбільший порядок полюсів $b_{jl} = \frac{-b_j-l}{\beta_j}$, $1 \le j \le m$, $l = 0,1,\dots$ функції $\Gamma(b_j + \beta_j s)$.

Звідси, враховуючи, що у всіх наших випадках $\varrho = \min\{1, \frac{N}{2}\}$, а отже, $\varrho = 1$ при $N \ge 2$, $\varrho = 1/2$ при $N = 1$, у випадку простих полюсів b_{jl} при $|x|^2 < t^\beta$ матимемо оцінки:

$$|G_0(x,t)| \le \frac{C_0^*}{t|x|^{N-2}}, \quad |\frac{\partial G_0(x,t)}{\partial |x|}| \le \frac{C_1^*}{t|x|^{N-1}},$$
$$|G_2(x,t)| \le \frac{C_2^*}{t^\beta |x|^{N-2}}, \qquad |\frac{\partial G_2(x,t)}{\partial |x|}| \le \frac{C_3^*}{t^\beta |x|^{N-1}}, \qquad N \ge 2,$$
$$|G_0(x,t)| \le \frac{C_0^*}{t^{1-\frac{\beta}{2}}}, \quad |\frac{\partial G_1(x,t)}{\partial |x|}| \le \frac{C_1^*}{t^{1-\frac{\beta}{2}}|x|},$$
$$|G_2(x,t)| \le \frac{C_2^*}{t^{\beta/2}}, \qquad |\frac{\partial G_2(x,t)}{\partial |x|}| \le \frac{C_3^*}{t^{\beta/2}|x|}, \quad N = 1.$$

Тепер оцінимо інтеграли (5.87)-(5.89), враховуючи, що функції $D^\gamma \varphi(x,t)$, $M_{j,\gamma}^*(x, D_x')\varphi(x,t)$, $j = 1,2$ неперервні й обмежені в $\bar{Q}_T$ для всіх γ. У випадку $N \ge 2$ матимемо

$$|\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} G_2(x-y,0) D_x^\gamma \varphi(x,t) dxdt| \le$$
$$\le C[\int\limits_{(x,t)\in Q_{T,\varepsilon}:|x-y|^2<t^\beta} |G_2(x-y,t)| dxdt + \int\limits_{(x,t)\in Q_T:|x-y|^2>t^\beta} |G_2(x-y,t)| dxdt] \le$$

$$\leq CC_2^* \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} t^{-\beta}dt \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|^2<t^\beta} |x-y|^{2-N}dx+$$

$$+CC_2 \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} dt \int\limits_{x\in\Omega:|x-y|^2>t^\beta} |x-y|^{-N}dx] \leq$$

$$\leq c_2 \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [t^{-\beta} \int\limits_0^{t^{\beta/2}} rdr + \int\limits_{t^{\beta/2}}^{\varepsilon} r^{-1}dr]dt \leq c_2^* \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [t^{\beta/2} + ln\tfrac{\varepsilon}{t^{\beta/2}}]dt < +\infty\,,$$

$$|\int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} dt \int\limits_S G_2(x-y,t)M_{2,\gamma}^*(x,D_x)\varphi(x,t)dx| \leq$$

$$\leq C \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [\int\limits_{x\in S:|x-y|^2<t^\beta} |G_2(x-y,t)|dS + \int\limits_{x\in S:|x-y|^2>t^\beta} |G_2(x-y,t)|dS]dt \leq$$

$$\leq C \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [C_2^* t^{-\beta} \int\limits_{x\in S:|x-y|<t^\beta} |x-y|^{2-N}dS + \int\limits_{x\in S:|x-y|^2>t^\beta} C_2|x-y|^{-N}dS]dt \leq$$

$$\leq c_2 \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [t^{\beta(N-3)/2} + (t^{-\beta/2} - \varepsilon^{-1})]dt < \infty\,,$$

$$|\int\limits_{Q_T} \tfrac{\partial G_2(x-y,t)}{\partial \nu_x} D_x^\gamma \varphi(x)dx| \leq C[C_3^* \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [t^{-\beta}dt \int\limits_{x\in S:|x-y|^2<t^\beta} |x-y|^{1-N+\varepsilon_1}dx+$$

$$+C_3 \int\limits_{x\in S:|x-y|^2>t^\beta} |x-y|^{-1-N+\varepsilon_1}dx]dt \leq$$

$$\leq c_3^* \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [t^{-\beta} \int\limits_0^{t^{\beta/2}} r^{\varepsilon_1-1}dr + \int\limits_{t^{\beta/2}}^{\varepsilon} r^{\varepsilon_1-3}dr]dt \leq c_3 \int\limits_0^{\varepsilon^{2/\beta}} [t^{-\beta+\varepsilon_1\beta/2} + \varepsilon^{\varepsilon_1-2}]dt < +\infty\,,$$

де число $\varepsilon_1 \in (0,1)$ (враховано гладкість поверхні S).

Випадок $N=1$ та інші інтеграли оцінюємо так само.

За властивістю згортки узагальненої функції та основної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$

$$\tfrac{\partial}{\partial\tau} \int\limits_\tau^T G_i(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dt = \tfrac{\partial}{\partial\tau}(G_i(x,\tau)\hat{*}\varphi(x,\tau) =$$

$$= G_i(x,\tau)\hat{*}\tfrac{\partial\varphi(x,\tau)}{\partial\tau} = \int\limits_{Q_T} G_i(x-y,t-\tau)\tfrac{\partial}{\partial\tau}\varphi(x,t)dt\,,\ i=0,1\,.$$

Тому

$$(\tfrac{\partial}{\partial\tau})^{\gamma_0} \int\limits_{Q_T} G_i(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} G_i(x-y,t-\tau)(\tfrac{\partial}{\partial\tau})^{\gamma_0}\varphi(x,t)dxdt\,,$$

$i=0,1$, і такі інтеграли досліджуються як попередні, враховуючи нескінченну диференційовність φ в $\bar{Q}_T$. Лему доведено. $\square$

Лема 5.16. *Для кожної* $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ *існує така* $\psi \in X(\bar{Q}_T)$, *що*

$$(\hat{L}\psi)(x,t) = \varphi(x,t)\,,\ (x,t) \in Q_T\,.$$

Доведення. Як у попередніх підрозділах показуємо, що шуканою є функція

$$\psi(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\Omega} G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dx.$$

Справді, за лемою 5.15 $\psi \in C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$ при $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$. Оскільки $G_0(x,t) = 0$ при $x \in S$, то $\psi|_S = 0$, а тоді

$$(\hat{L}\psi)(y,\tau) = \hat{L}(G_0(x-y,t-\tau),\varphi(x,t)) = \hat{L}(G_0(x,t),\varphi(x+y,t+\tau)) =$$

$$= (G_0(x,t),(\hat{L}\varphi)(x+y,t+\tau)) = ((LG_0)(x,t),\varphi(x+y,t+\tau)) =$$

$= (\delta(x,t),\varphi(x+y,t+\tau)) = \varphi(y,\tau)\,,\ (y,\tau) \in Q_T$. Отже, $\psi \in X(\bar{Q}_T)$. $\square$

Тепер із лем 5.15, 5.16 випливає, що $\hat{\mathcal{G}}_0 : D(\bar{Q}_T) \to X(\bar{Q}_T)$.

Теорема 5.13. *За припущення* (L_b) *існує єдиний розв'язок* $u \in D'(\bar{Q}_T)$ *задачі (5.69), (5.70). Він визначений формулою*

$$(u,\varphi)_0 = (F,\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)_0 + (F_1,\hat{\mathcal{G}}_1\varphi)_1 + (F_2,\hat{\mathcal{G}}_2\varphi)_2 \quad \forall\varphi \in D(\bar{Q}_T). \tag{5.90}$$

Доведення. На підставі лем 5.15, 5.16

$$\hat{\mathcal{G}}_0\varphi \in X(\bar{Q}_T), \quad \hat{\mathcal{G}}_1\varphi \in C^{\infty,(0)}(Q_{1T}), \quad \hat{\mathcal{G}}_2\varphi \in D(\bar{Q}_2) \quad \forall\varphi \in D(\bar{Q}_T).$$

Отож, права частина в формулі (5.90) має сенс і формулою (5.90) визначено $u \in D'(\bar{Q}_T)$.

Підставляючи функцію (5.90) у тотожність (5.71), використовуючи лему 5.14, показуємо, що функція (5.90) є розв'язком задачі (5.69), (5.70):

$$(u,\hat{L}\psi)_0 = (F,\hat{\mathcal{G}}_0(\hat{L}\psi))_0 + (F_1,\hat{\mathcal{G}}_1(\hat{L}\psi))_1 + (F_2,\hat{\mathcal{G}}_2(\hat{L}\psi))_2 =$$

$$= (F,\psi)_0 + (F_1,\tfrac{\partial\psi}{\partial\nu})_1 + (F_2(x),\int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt)_2 \ \ \forall\psi \in X(\bar{Q}_T)$$

Якщо u_1, u_2 – розв'язки задачі (5.69), (5.70), то функція $u = u_1 - u_2$ задовольняє умову

$$(u, \hat{L}\psi)_{Q_T} = 0 \quad \forall \psi \in X(\bar{Q}_T)\,.$$

За лемою 5.16 для довільної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ існує така функція $\psi \in X(\bar{Q}_T)$, що $\hat{L}\psi = \varphi$ в Q_T. Тоді з попередньої тотожності $(u, \varphi)_{Q_T} = 0$ для кожної $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$, тобто $u = 0$ в $D'(\bar{Q}_T)$. Теорема доведена. $\square$

Результат поширюється на випадок рівняння зі змінними нескінченно диференційовними коефіцієнтами.

5.7.2 Розв'язок зі значеннями в просторах беселевих потенціалів

Одержано розв'язність першої крайової задачі для рівняння з дробовою похідною за часом у шкалі просторів

$$C_{2,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\Omega)\big) = \\ \{v \in C\big([0,T]; H^{s+2,p}(\Omega)\big) : D_t^\beta v, \Delta v \in C_b\big((0,T]; H^{s,p}(\Omega)\big)\}\,,$$

$$\|v\|_{C_{2,\beta}\left([0,T]; H^{s,p}(\Omega)\right)} = \\ = \max\{\|v\|_{C\left([0,T]; H^{s+2,p}(\Omega)\right)}, \|\Delta v\|_{C_b\left((0,T]; H^{s,p}(\Omega)\right)}, \|D_t^\beta v\|_{C_b\left((0,T]; H^{s,p}(\Omega)\right)}\}\,.$$

Вивчаємо задачу

$$D_t^\beta u(x,t) - (\Delta u)(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{5.91}$$

$$u(x,t) = F_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_{1T}, \qquad u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \Omega. \tag{5.92}$$

у класах $C_{2,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\Omega)\big)$ за наступних припущень.

Припущення (Bb): $\beta \in (0,1]$, $\theta \in (0,1)$, $1 < p < \frac{1}{1-\beta\theta}$, $s \in \mathbb{R}$,

$F_0 \in C\big([0,T]; H^{s+2\theta,p}(\Omega)\big)$, $F_1 \in C\big([0,T]; B^{s+2\theta+1-\frac{1}{p},p}(S)\big)$, $F_2 \in H^{s+2,p}(\Omega)$.

Теорема 5.14. *Нехай виконується припущення (Bb). Тоді існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\beta}\big([0,T]; H^{s+2,p}(\Omega)\big)$ задачі (5.91), (5.92). Він визначений формулою*

$$u = F_0 * G_0 + F_1 * G_1 + F_2 * G_2, \tag{5.93}$$

та правильна оцінка

$$\|u\|_{C_{2,\beta}\left([0,T]; H^{s+2,p}(\Omega)\right)} \le \tag{5.94}$$

$$\leq b_0\|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s+2\theta,p}(\Omega)\right)} + b_1\|F_1\|_{C\left([0,T];B^{s+1+2\theta,p}(S)\right)} + b_2\|F_2\|_{H^{s+2,p}(\Omega)},$$

де b_0, b_1, b_2 *– додатні сталі.*

Доведення. Із побудови та властивостей вектор-функції Гріна

$$|\mathcal{F}[G_0](\xi,t)| \leq \hat{C}_0 t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-a^2|\xi|^2 t^\beta)\,,$$

$$|\mathcal{F}[G_1](\xi,t)| \leq \hat{C}_1 t^{\beta-1}(1+|\xi|) E_{\beta,\beta}(-a^2|\xi|^2 t^\beta)\,,$$

$$|\mathcal{F}[G_2](\xi,t)| \leq \hat{C}_2 E_{\beta,1}(-a^2|\xi|^2 t^\beta)\,.$$

Тому, як при доведенні теореми 5.5, за допомогою лем 5.6, 5.7, при $s \geq 0$ знаходимо оцінки

$$\left\|F_0 * G_0\right\|_{C\left([0,T];H^{s+2,p}(\Omega)\right)} =$$

$$= \max_{t\in[0,T]} \inf_{v(\cdot,t)\in H^{s+2,p}(\mathbb{R}^n):v\Big|_\Omega = F_0(\cdot,t)} \left\|v * G_0\right\|_{C\left([0,T];H^{s+2,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq$$

$$\leq C_0\|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s+2\theta,p}(\Omega)\right)},$$

$\left\|F_2 * G_2\right\|_{C\left([0,T];H^{s+2+2\eta,p}(\Omega)\right)} \leq C\|F_2\|_{H^{s+2\theta,p}(\Omega)}$, де C_0, C – додатні сталі.

Для довільних $\theta_1 \in (0,1)$, $v \in C\big([0,T];H^{s+2\theta_1,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ з носієм у $\bar{Q}_0$ та слідами $F_1 \in C\big([0,T];B^{s+2\theta_1-\frac{1}{p},p}(\Omega_1)\big)$, як вище, одержуємо $\left\|\big(v\,o\,G_1\big)(\cdot,t)\right\|_{H^{s+2,p}(\Omega)}$

$$\leq c_{\beta,1} t^{1-\frac{1}{p}} \Big\{ \int\limits_0^t (t-\tau)^{p(\beta-1)} w^p(t-\tau, 3-2\theta_1)\, d\tau \Big\}^{1/p} \left\|v\right\|_{C\left([0,T];H^{s+2\theta_1,p}(\mathbb{R}^n)\right)}$$

де $c_{\beta,1} = const > 0$. При $p(1-\beta(\theta_1-\frac{1}{2})) < 1$ існує інтеграл

$$\int\limits_0^t (t-\tau)^{p(\beta-1)} w^p(t-\tau, 3-2\theta_1) d\tau$$

Оскільки $p(1-\beta(\theta_1-\frac{1}{2})) = p(1-\beta\theta)$ при $\theta_1 = \theta + \frac{1}{2}$, то для довільних $\theta \in (0,1)$ з попередньої оцінки випливає нерівність

$$\left\|F_1\,o\,G_1\right\|_{C\left([0,T];H^{s+2,p}(\Omega)\right)} \leq C_1\left\|F_1\right\|_{C\left([0,T];B^{s+2\theta+1-\frac{1}{p},p}(\Omega_1)\right)},\ C_1 = const > 0.$$

Отож, враховуючи формулу (5.93), у випадку $s \geq 0$ одержуємо оцінку

$$\|u\|_{C\left([0,T];H^{s+2,p}(\Omega)\right)} \leq \tag{5.95}$$

$$\leq C_0\|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s+2\theta,p}(\Omega)\right)} + C_1\|F_1\|_{C\left([0,T];B^{s+1+2\theta,p}(S)\right)} + C\|F_2\|_{H^{s+2,p}(\Omega)},$$

де C, C_0, C_1 – додатні сталі.

У випадку $s < 0$ простір $H^{s,p}(\Omega)$ є спряженим до простору $H^{-s,p}(\Omega)$ відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$,

$$|(v,\psi)| \le \|v\|_{H^{s,p}(\Omega)} \cdot \|\psi\|_{H^{-s,p}(\Omega)} \qquad \forall v \in H^{s,p}(\Omega), \psi \in H^{-s,p}(\Omega)$$

і для $s < 0$, довільних $\varphi \in H^{-s-2,p}(\Omega)$, $t \in [0,T]$ розглянемо

$$\sup_{\varphi \in H^{-s-2,p}(\Omega)} \frac{|(u,\varphi)_{Q_T}|}{\|\varphi(\cdot,t)\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)}} \le$$

$$\le \sup_{\varphi \in H^{-s-2,p}(\Omega)} \frac{\big[|(F_0, \hat{\mathcal{G}}_0\varphi)_0| + |(F_1, \hat{\mathcal{G}}_1\varphi)_1| + |(F_2, \hat{\mathcal{G}}_2\varphi)_2|\big]}{\|\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)}} \le$$

$$\le \sup_{\varphi \in H^{-s-2,p}(\Omega)}\Big) \Big[\frac{\int\limits_0^t \|F_0(\cdot,\tau)\|_{H^{s+2\theta,p}(\Omega)} \cdot \|(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\|_{H^{-s-2\theta,p}(\Omega)} d\tau}{\|\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)}} +$$

$$+ \frac{\int\limits_0^t \|F_1(\cdot,\tau)\|_{B^{s+1-\frac{1}{p}+2\theta,p}(S)} \cdot \|(\hat{\mathcal{G}}_1\varphi(\cdot,t-\tau))\|_{B^{-s+\frac{1}{p}-2\theta,p}(S)} d\tau}{\|\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)}} +$$

$$+ \frac{\|F_2\|_{H^{s+2,p}(\Omega)} \cdot \|\hat{\mathcal{G}}_2\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)}}\Big].$$

Зауважимо, що $\hat{\mathcal{G}}_j\varphi = \hat{G}_j \hat{*} \varphi$, $j = 0,1,2$. За доведеним (в лемах 5.6, 5.7 використовувались спільні властивості для операцій $*$ та $\hat{*}$) при $\varphi \in H^{-s-2,p}(\Omega)$, $0 \le \tau < t \le T$ маємо

$$\|(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\|_{H^{-s-2\theta,p}(\Omega)} \le c_0\|\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)},$$

$$\|(\hat{\mathcal{G}}_1\varphi)(\cdot,t-\tau)\|_{B^{-s-1-2\theta,p}(S)} \le c_1\|\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)},$$

$$\|(\hat{\mathcal{G}}_2\varphi)(\cdot,t)\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)} \le c_2\|\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)}\Big), \quad \text{а звідси}$$

$$\int\limits_0^t \|F_0(\cdot,\tau)\|_{H^{s+2\theta,p}(\Omega)} \cdot \|(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\|_{H^{-s-2\theta,p}(\Omega)} d\tau \le$$

$$\le c_3 \int\limits_0^t (t-\tau)^{\beta-1} d\tau \|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s+2\theta,p}(\Omega)\right)} \|\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)} =$$

$$= \frac{c_3 t^\beta}{\beta} \|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s+2\theta,p}(\Omega)\right)} \|\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)},$$

$$\int\limits_0^t \|F_1(\cdot,\tau)\|_{B^{s-\frac{1}{p}+2\theta,p}(S)} \cdot \|(\hat{\mathcal{G}}_1\varphi)(\cdot,t-\tau)\|_{B^{-s+\frac{1}{p}-2\theta,p}(S)} d\tau \leq$$

$$\leq \frac{c_4 t^\beta}{\beta} \|F_1\|_{C\left([0,T];B^{s+1-\frac{1}{p}+2\theta,p}(S)\right)} \|\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)},$$

$$\|F_2\|_{H^{s+2,p}(\Omega)} \cdot \|\hat{\mathcal{G}}_2\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)} \leq c_5 \|F_2\|_{H^{s+2\theta,p}(\Omega)} \|\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)}.$$

Тут і далі c_i $(i = 0, 1, \ldots 8)$ – додатні сталі.

Тепер із попередніх оцінок для довільних $t \in [0,T]$ одержуємо

$$\|u\|_{C\left([0,T];H^{s+2,p}(\Omega)\right)} = \sup_{\varphi \in H^{-s-2,p}(\Omega)\big)} \frac{|(u,\varphi)_{Q_T}|}{\|\varphi\|_{H^{-s-2,p}(\Omega)}} \leq$$

$$\leq c_6 \|F_0\|_{C\left([0,T];H^{s+2\theta,p}(\Omega)\right)} + c_7 \|F_1\|_{C\left([0,T];B^{s+1-\frac{1}{p}+2\theta,p}(S)\right)} + c_8 \|F_2\|_{H^{s+2,p}(\Omega)}.$$

Ми показали, що при $s < 0$ функція (5.93) також належить простору $C\big([0,T]; H^{s+2,p}(\Omega)\big)$ та задовольняє нерівність коерцитивності (5.95). Далі залишається повторити схему доведення теореми 5.5. $\square$

Одержаний результат правильний для рівняння

$$D_t^\beta u(x,t) - (Au)(x,t) = F_0(x,t),\ (x,t) \in Q_0,$$

з еліптичним диференціальним оператором $A = A(x,D)$ з нескінченно диференційовними коефіцієнтами за умови існування вектор-функції Гріна задачі. При доведенні замість лем 5.6, 5.7 потрібно використовувати лему 5.10.

Висновки до розділу 5

Доведено теореми існування та єдиності, одержано зображення за допомогою вектор-функції Гріна розв'язків задач Коші для рівнянь вигляду

$$u_t^{(\beta)}(x,t) + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T], \quad a = const$$

з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними та правими частинами із просторів узагальнених функцій D', вагових просторів узагальнених функцій, а для такого ж рівняння з регуляризованою дробовою похідною за часом – теореми про існування та єдиність класичних за часом розв'язків зі значеннями в просторах беселевих потенціалів. При $\alpha = 2$ (також при змінному коефіцієнті) в одновимірному просторовому випадку одержано теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші зі значеннями в просторі S' повільно зростаючих на безмежності узагальнених функцій, у просторах S'_γ, у просторах беселевих потенціалів.

Доведено теорему про існування, єдиність та зображення розв'язку першої крайової задачі для рівняння дифузії з дробовою похідною Рімана-Ліувілля та правими частинами із просторів узагальнених функцій типу D', а для рівняння з регуляризованою дробовою похідною за часом одержано теорему існування та єдиності класичного за часом розв'язку неоднорідної крайової задачі зі значеннями в просторах беселевих потенціалів.

Знайдено оцінки фундаментального розв'язку рівняння

$$u_t^{(\beta)} - \sum_{j=1}^{N} b_j u_{x_j}^{(\alpha)} = F(x,t), \quad (x,t) \in Q_T$$

з дробовими похідними Рімана-Ліувілля $u_{x_j}^{(\alpha)}$ і сталими коефіцієнтами b_j, $j = \overline{1,N}$ за умови $\sum\limits_{j=1}^{N} b_j p_j^\alpha \geq C_0$ для всіх $p \in \mathbb{R}^N, |p| = 1$. Отож, названі вище результати можуть бути поширені на рівняння такого вигляду.

Результати цього розділу опубліковано у статтях [58, 56, 62, 63, 64, 65, 89, 91, 102, 218].

Розділ 6

Обернені задачі для дифузійно-хвильових рівнянь

6.1 Обернена крайова задача у класі гладких функцій

Доводимо теореми про існування та єдиність розв'язку (u, a) оберненої крайової задачі

$$D_t^\beta u - a(t)u_{xx} = F_0(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T], \tag{6.1}$$

$$a(t) > 0, \quad t \in [0,T],$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{6.2}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad x \in [0,l] \tag{6.3}$$

$$u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in [0,l], \tag{6.4}$$

$$a(t)u_x(0,t) = F_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{6.5}$$

де $\beta \in (0,2)$, F_0 - F_3 – задані функції, умова (6.4) відсутня у випадку $\beta \in (0,1]$.

Зауважимо, що у випадку $\beta = 1$ такого типу обернені коефіцієнтні крайові задачі вивчались у [203] та інших працях, де доведено теореми існування та єдиності. У [175] доведена єдиність розв'язку оберненої крайової задачі для рівняння вигляду (6.1) із невідомими $u(x,t)$, $a = a(x)$, $\beta \in (0,1)$ при крайових умовах Неймана та додатково заданій $u(0,t)$. Обернені крайові задачі для рівняння дифузії з дробовою похідною з іншими невідомими функціями та параметрами вивчались у [243, 261] та інших працях.

6.1.1 Зведення задачі до операторного рівняння

Нехай $Q=(0,l)\times(0,T]$, $C_+^k[0,T]$ – клас функцій із $C^k[0,T]$, обмежених знизу додатним числом, $k\in\mathbb{Z}_+$, $C_+[0,T]=C_+^0[0,T]$,

$C_\beta(0,T]=\{v\in C(0,T]|\quad t^\beta v\in C_+[0,T]\}$, $\quad v_0=\inf\limits_{t\in(0,T]} t^\beta|v(t)|>0$,

$C^{2,\beta}(Q)$ – клас неперервних функцій $v(x,t)$, $(x,t)\in\bar{Q}$, рівних нулю при $t\geq T$ та з неперервними функціями v_x, v_{xx}, $D_t^\beta v$ в Q.

Означення 6.1. Розв'язком задачі (6.1)-(6.5) називається пара функцій

$$(u,a)\in\mathcal{M}_\beta:=C^{2,\beta}(Q)\times C_+[0,T],$$

що задовольняє рівняння (6.1) в Q та умови (6.2)-(6.5).

Введемо оператори

$$L:\qquad (Lv)(x,t)\equiv v_t^{(\beta)}(x,t)-a(t)v_{xx}(x,t),\quad (x,t)\in Q,\quad v\in\mathcal{D}'(\bar{Q}),$$

$$L^{reg}:\quad (L^{reg}v)(x,t)\equiv D_t^\beta v(x,t)-a(t)v_{xx}(x,t),\qquad (x,t)\in Q,\ v\in C^{2,\beta}(Q),$$

$$\hat{L}:\qquad (\hat{L}v)(x,t)\equiv f_{-\beta}\hat{*}v(x,t)-a(t)v_{xx}(x,t),\quad (x,t)\in Q,\quad v\in\mathcal{D}(\bar{Q}).$$

та функційний простір

$$X(\bar{Q})=\{v\in\mathcal{D}(\bar{Q}):v(0,t)=v(l,t)=0,\quad t\in[0,T]\}.$$

Використовуємо формулу Гріна

$$\int\limits_Q v(y,\tau)(\hat{L}\psi)(y,\tau)dyd\tau=\int\limits_Q(L^{reg}v)(y,\tau)\psi(y,\tau)dyd\tau+ \tag{6.6}$$

$$+\int\limits_0^T a(\tau)[v(0,\tau)\psi_y(0,\tau)-v(l,\tau)\psi_y(l,\tau)]d\tau+$$

$$+\int\limits_0^l v(y,0)\big(f_{1-\beta}(\tau),\psi(y,\tau)\big)dy+\int\limits_0^l v_\tau(y,0)\big(f_{2-\beta}(\tau),\psi(y,\tau)\big)dy,$$

$v\in C^{2,\beta}(Q)$, $\psi\in X(\bar{Q})$.

Нехай $(G_0(x,t,y,\tau),G_1(x,t,y,\tau),G_2(x,t,y,\tau))$ – вектор-функція Гріна першої крайової задачі (6.1)–(6.4) (з відомою функцією $a(t)$ та нульовими крайовими умовами), тобто при достатньо регулярних F_0,F_1,F_2 функція

$$v(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau)F_0(y,\tau)dy+ \tag{6.7}$$

$$+\int\limits_{\Omega} G_1(x,t,y,0)F_1(y)dy+\int\limits_{\Omega} G_2(x,t,y,0)F_2(y)dy, \quad (x,t)\in\bar{Q}_0$$

є класичним (із $C^{2,\beta}(Q)$) розв'язком цієї задачі. Останній доданок у формулі (6.7) відсутній, якщо $\beta\in(0,1]$.

З означення вектор-функція Гріна

$(LG_0)(x,t,y,\tau)=\delta(x-y,t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau)\in Q$, де δ – дельта-функція,

$(L^{reg}G_i)(x,t,y,0)=0, \quad (x,t)\in Q, \quad y\in(0,l), \quad i=1,2,$

$G_i(0,t,y,0)=G_i(l,t,y,0)=0, \quad (y,\tau)\in Q, \ t\in[0,T] \quad i=0,1,2,$

$G_1(x,0,y,0)=\delta(x-y), \quad G_{1t}(x,0,y,0)=0,$
$G_2(x,0,y,0)=0, \quad G_{2t}(x,0,y,0)=\delta(x-y), \quad x,y\in[0,l].$

Із принципу максимуму [231] випливає додатність функцій $G_0(x,t,y,\tau)$, $G_1(x,t,y,0)$, $G_2(x,t,y,0)$ при $(x,t)\in Q,(y,\tau)\in\bar{Q}$ та $\frac{\partial G_0(0,t,y,\tau)}{\partial x}$, $\frac{\partial G_1(0,t,y,0)}{\partial x}$, $\frac{\partial G_2(0,t,y,0)}{\partial x}$ при $y\in[0,l]$, $t,\tau\in[0,T]$.

Теорема 6.1. *При $a\in C_+[0,T]$ вектор-функція Гріна першої крайової задачі (6.1)–(6.4) існує.*

Доведення. Теорема доводиться за схемою доведення теореми 5.12. Головну функцію Гріна $G_0(x,t,y,\tau)$ шукаємо у вигляді (5.80), де функції $S_m(x,t,\tau)$ – розв'язки лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри

$$S_m(x,t,\tau)+\lambda_m a(t)f_\beta(\tau)\hat{*}S_m(x,t,\tau)=f_\beta(t-\tau)\omega_m(x). \tag{6.8}$$

Методом послідовних наближень знаходимо розв'язки рівнянь (6.8) у вигляді рівномірно збіжних при $x\in\bar{Q}, \quad 0\le\tau<t\le T$ рядів

$$S_m(x,t,\tau)=\Big[f_\beta(t-\tau)+$$

$$+\sum_{p=0}^{\infty}(-\lambda_m)^p\underbrace{f_\beta(\tau)\hat{*}\big(a(\tau)\big(f_\beta(\tau)\hat{*}\big(\ldots a(\tau)\big(f_\beta(\tau)\hat{*}\big(a(\tau)}_{p}f_\beta(t-\tau)\big)\big)\big)\big)\big)\Big]\omega_m(x).$$

Оцінивши у виразі для $S_m(x,t,\tau)$ суму двох сусідніх доданків

$$\lambda_m^{2k}\underbrace{f_\beta(\tau)\widehat{*}\big(a(\tau)\big(f_\beta(\tau)\widehat{*}\big(\dots a(\tau)f_\beta(\tau)\widehat{*}\big(a(\tau)}_{2k}f_\beta(t-\tau)\big)\big)\big)\big)$$

$$-\lambda_m^{2k+1}\underbrace{f_\beta(\tau)\widehat{*}\big(a(\tau)\big(f_\beta(\tau)\widehat{*}\big(\dots a(\tau)f_\beta(\tau)\widehat{*}\big(a(\tau)}_{2k+1}f_\beta(t-\tau)\big)\big)\big)\big)\le$$

$$\le\lambda_m^{2k}\Big[A_0^{2k}f_{(2k+1)\beta}(t-\tau)-\lambda_m a_0^{2k+1}f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)\Big]\le$$

$$\le\lambda_m^{2k}\Big[c^{2k}f_{(2k+1)\beta}(t-\tau)-\lambda_m c^{2k+1}f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)\Big]$$

при деякому $c<a_0=\min\limits_{t\in[0,T]}a(t)\le\max\limits_{t\in[0,T]}a(t)=A_0$ та при $\lambda_m\ge\frac{A_0^{2k}-c^{2k}}{a_0^{2k}-c^{2k}}\cdot\frac{f_{(2k+1)\beta}(t-\tau)}{f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)}=\frac{A_0^{2k}-c^{2k}}{a_0^{2k}-c^{2k}}\cdot\frac{\Gamma(2k\beta+2\beta)}{\Gamma(2k\beta+\beta)(t-\tau)^\beta}$, при великих $\lambda_m(t-\tau)^\beta$ матимемо

$$|S_m(x,t,\tau)|\le 2(t-\tau)^{\beta-1}E_\beta(-c\lambda_m(t-\tau)^\beta)|\omega_m(x)|,\quad x\in[0,l],\quad 0\le\tau<t\le T.$$

Зауважимо, що згідно з [139, с. 67], $\frac{\Gamma(p\beta+2\beta)}{\Gamma(p\beta+\beta)}=O((p\beta)^\beta)$ для великих p. Тут $E_\beta(x)=E_{\beta,1}(x)$.

Отже, при $a\in C_+[0,T]$ матимемо аналогічну до випадку сталої функції a оцінку розв'язку рівняння (6.8) при великих $\lambda_m(t-\tau)^\beta$, а звідси рівномірну при $x,y\in[0,l], 0\le\tau<t\le T$ збіжність ряду для функції G_0. $\square$

Знайдемо оцінки компонент вектор-функції Гріна, їхніх похідних та їх залежність від коефіцієнта $a(t)$. Використовуємо далі позначення $G_i(x,t,y,\tau,a)$ замість $G_i(x,t,y,\tau)$, $i=0,1,2$. Нехай

$$[a(t)]^{-1}\le R \text{ для всіх } t\in[0,T].$$

Лема 6.1. *Правильні оцінки*

$$\Big|\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\Big|\le C_k^* R^{\frac{k+1}{2}}(t-\tau)^{\frac{\beta(1-k)}{2}-1},\quad |x-y|^2<4(t-\tau)^\beta/R,$$

$$\Big|\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\Big|\le\frac{C_k(t-\tau)^{\beta-1}}{|x-y|^{k+1}},\quad |x-y|^2>4(t-\tau)^\beta/R,\quad k\in\mathbb{Z}_+,$$

$$\Big|\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^k G_j(x,t,y,0,a)\Big|\le\hat{C}_{jk}R^{\frac{k+1}{2}}t^{j-1-(k+1)\frac{\beta}{2}},\qquad |x-y|^2<4t^\beta/R,$$

$$\Big|\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^k G_j(x,t,y,0,a)\Big|\le\frac{\hat{C}_{jk}^*t^{j-1}}{|x-y|}\big(\frac{R|x|^2}{4t^\beta}\big)^{\frac{1-j+k+\frac{1}{2}}{2-\beta}}e^{-c\left(\frac{R|x|^2}{4t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}\le$$

$$\leq \hat{C}_{jk} R^{-\frac{1}{2-\beta}} |x-y|^{-1-\frac{2}{2-\beta}} t^{j-1+\frac{\beta}{2-\beta}}, \qquad |x-y|^2 > 4t^\beta/R, \quad j=1,2,\ k\in\mathbb{N},$$

де $c=(2-\beta)\beta^{\beta(2-\beta)}$, $C_k, C_k^*, \hat{C}_{jk}, \hat{C}_{jk}^*$ $(j=1,2,\ k\in\mathbb{Z}_+)$*– додатні сталі,*

$$|G_i(x,t+\Delta t,y,\tau,a)-G_i(x,t,y,\tau,a)| \leq A_i(x,t,y,\tau,a)|\Delta t|^\gamma, \quad (x,t),(y,\tau)\in\bar{Q}_0, \tag{6.9}$$

$$\left|\frac{\partial G_i(0,t+\Delta t,y,\tau,a)}{\partial x} - \frac{\partial G_i(0,t,y,\tau,a)}{\partial x}\right| \leq B_i(t,y,a)|\Delta t|^\gamma, \tag{6.10}$$

$y\in[0,l], 0\leq\tau<t\leq T$, *де* $0<\gamma<\beta$, *невід'ємні функції* $A_i(x,t,y,\tau,a)$ *та* $B_i(t,y,\tau,a)$ *мають такі ж оцінки, як* $G_i(x,t,y,\tau,a)$ *та* $\frac{\partial G_i(0,t,y,\tau,a)}{\partial x}$, $i=0,1,2$ *відповідно із заміною* β *на* $\beta-\gamma$.

Доведення. Із результатів [182] випливає, що фундаментальна функція $G(x,t,a)$ оператора L зі сталим коефіцієнтом $a>0$ має вигляд (5.84):

$$G(x,t,a) = \frac{\pi^{-1/2}t^{\beta-1}}{|x|} H_{1,2}^{2,0}\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\middle|\begin{matrix}(\beta,\beta)\\(1,1)\end{matrix}\quad(1/2,1)\right).$$

Використовуючи формулу диференціювання H-функцій (властивість 2.8 із [207]), матимемо

$$\left(\frac{\partial}{\partial|x|}\right)^k G(x,t,a) = \frac{\pi^{-1/2}t^{\beta-1}}{|x|^{1+k}} H_{2,3}^{2,1}\left(\frac{x^2}{4at^\beta}\middle|\begin{matrix}(1,2)\\(1,1)\end{matrix}\quad\begin{matrix}(\beta,\beta)\\(1/2,1)\end{matrix}\quad(k+1,2)\right) \tag{6.11}$$

$$= (-1)^k \frac{\pi^{-1/2}t^{\beta-1}}{|x|^{1+k}} H_{2,3}^{3,0}\left(\frac{x^2}{4at^\beta}\middle|\begin{matrix}(\beta,\beta)\\(k+1,2)\end{matrix}\quad\begin{matrix}(1,2)\\(1,1)\end{matrix}\quad(1/2,1)\right), \quad k=0,1,\ldots,$$

за формулою дробового диференціювання (теорема 2.7 із [207])

$$f_{j-\beta}(t) * G(x,t,a) = \frac{\pi^{-1/2}t^{j-1}}{|x|} H_{2,3}^{2,1}\left(\frac{x^2}{4at^\beta}\middle|\begin{matrix}(1,1)\\(1,1)\end{matrix}\quad\begin{matrix}(j,\beta)\\(1/2,1)\end{matrix}\quad(1,1)\right) = \tag{6.12}$$

$$= \frac{\pi^{-1/2}t^{j-1}}{|x|} H_{1,2}^{2,0}\left(\frac{x^2}{4at^\beta}\middle|\begin{matrix}\\(1,1)\end{matrix}\quad\begin{matrix}(j,\beta)\\(1/2,1)\end{matrix}\right), \quad j=1,2,$$

а звідси знову за властивістю 2.8 із [207]

$$\left(\frac{\partial}{\partial|x|}\right)^k \Big(f_{j-\beta}(t)*G(x,t,a)\Big) = \frac{\pi^{-1/2}t^{j-1}}{|x|} H_{2,3}^{2,1}\left(\frac{x^2}{4at^\beta}\middle|\begin{matrix}(1,2)\\(1,1)\end{matrix}\quad\begin{matrix}(j,\beta)\\(1/2,1)\end{matrix}\quad(1+k,2)\right),$$

$j=1,2$.

Згідно з методом Леві, для функцій $G_0(x,t,y,\tau,a)$, $G_i(x,t,y,0,a)$ та їх похідних правильні такі ж (з іншими сталими) оцінки, як для $G(x-y,t-\tau,a(\tau))$, $f_{i-\beta}(t)*G(x-y,t,a(0))$, $i=1,2$ та їхніх похідних, відповідно. Використовуючи властивості Н-функцій Фокса (як у попердньому розділі), метод Леві та враховуючи результати [9], знаходимо наведені в лемі оцінки компонент вектор-функції Гріна та їхніх похідних.

Використовуючи наведені при доведенні теореми 6.1 зображення функцій, матимемо

$$G_0(x,t+\Delta t,y,\tau,a)-G_0(x,t,y,\tau,a)=$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}[S_m(x,t+\Delta t,\tau,a)-S_m(x,t,\tau,a)]\omega_m(y). \tag{6.13}$$

Для функцій

$$Z_m(x,t,\tau,\Delta t,a)=S_m(x,t+\Delta t,\tau,a)-S_m(x,t,\tau,a)$$

одержуємо інтегральні рівняння

$$Z_m(x,t,\tau,\Delta t,a)+\lambda_m f_\beta(\tau)\hat{*}(a(\tau)S_m(x,t,\tau,\Delta t,a))=$$
$$=[f_\beta(t+\Delta t-\tau)-f_\beta(t-\tau)]\omega_m(x) \tag{6.14}$$

вигляду (5.82). Оскільки

$$f_\beta(t+\Delta t-\tau)-f_\beta(t-\tau)=f_{-\lambda}(t)*[f_{\beta+\lambda}(t+\Delta t-\tau)-f_{\beta+\lambda}(t-\tau)],$$

при $1-\beta<\lambda<1$ маємо $\beta+\lambda-1=\gamma\in(0,1)$ та $\beta-\gamma=1-\lambda>0$, то враховуючи нерівність

$$|(t+\Delta t-\tau)^\gamma-(t-\tau)^\gamma|=(t-\tau)^\gamma|(1+\frac{\Delta t}{t-\tau})^\gamma-1|\le|\Delta t|^\gamma,$$

одержуємо

$$|f_\beta(t+\Delta t-\tau)-f_\beta(t-\tau)|\le f_{1-\lambda}(t-\tau)|\Delta t|^\gamma=f_{\beta-\gamma}(t-\tau)|\Delta t|^\gamma.$$

Як при доведенні теореми 6.1, знаходимо функції $Z_m(x,t,y,\tau,\Delta t,a)$, що матимуть такі ж оцінки, як розв'язки рівнянь (6.8) із заміною β на $\beta-$

γ та множником $|\Delta t|^{\gamma}$. Враховуючи зображення (6.13), одержуємо оцінку (6.9) при $i=0$, де функція A_0 має таку ж оцінку, як $G_0(x,t,y,\tau,a)$, але із заміною β на $\beta-\gamma$. Інші оцінки в лемі одержуємо з таких самих міркувань та враховуючи лему 5.1.

Вводимо оператори Гріна

$$(\mathcal{G}_0\varphi)(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(y,\tau)dy\,,\qquad \varphi\in C^{2,\beta}(Q)\,,$$

$$(\mathcal{G}_i\varphi)(x,t)=\int\limits_0^l G_i(x,t,y,0,a)\varphi(y)dy\,,\quad \varphi\in C[0,l]\,,\ i=1,2\,.$$

Зауважимо, що у [45,155] досліджено властивості таких операторів у випадку $\mathbb{R}^N$ замість $(0,l)$.

Використовуючи оцінки компонент вектор-функції Гріна та їх похідних, при $\varphi\in C(\bar{Q})$, $t\in[0,T]$ знаходимо

$$|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l (\frac{\partial}{\partial x})^k G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(y,\tau)dy|\le$$

$$\int\limits_0^t\Big(\int\limits_{y\in(0,l):|y-x|<2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}}\Big|(\frac{\partial}{\partial x})^k G_0(x,t,y,\tau,a)\Big|dy+$$

$$+\int\limits_{y\in(0,l):|y-x|>2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}}\Big|(\frac{\partial}{\partial x})^k G_0(x,t,y,\tau,a)\Big|dy\Big)d\tau\cdot||\varphi||_{C(\bar{Q}_0)}\le$$

$$\le\int\limits_0^t\Big(\int\limits_{y\in(0,l):|y-x|<2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}}C_k^* R^{\frac{k+1}{2}}(t-\tau)^{\frac{\beta(1-k)}{2}-1}dy+$$

$$+\int\limits_{y\in(0,l):|y-x|>2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}}\frac{C_k(t-\tau)^{\beta-1}}{|y-x|^{k+1}}dy\Big)d\tau\cdot||\varphi||_{C(\bar{Q}_0)},$$

звідки

$$|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(y,\tau)dy|\le c_0t^{\beta/2}(1+\sqrt{R}t^{\beta/2})\cdot||\varphi||_{C(\bar{Q}_0)},$$

$$|\int_0^t d\tau \int_0^l (\frac{\partial}{\partial x})^k G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(y,\tau)dy| \le c_k^* \int_0^t R^{\frac{k}{2}}(t-\tau)^{\frac{\beta(2-k)}{2}-1}d\tau \cdot ||\varphi||_{C(\bar{Q}_0)} \le$$

$$\le c_k \sqrt{R}^k t^{(2-k)\frac{\beta}{2}} \cdot ||\varphi||_{C(\bar{Q}_0)}, \quad \varphi \in C(Q)$$

і при $k \le 2$, $\varphi \in C(\bar{Q})$ функції $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k (\mathcal{G}_0\varphi)(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}$ є неперервними, зокрема

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{G}_0\varphi)(x,t)\right| \le c_1\sqrt{R}t^{\frac{\beta}{2}} \cdot ||\varphi||_{C(\bar{Q})}, \quad (x,t) \in \bar{Q}. \tag{6.15}$$

При $\varphi \in C[0,l]$, $j = 1,2$ оцінимо

$$|\int_0^l (\frac{\partial}{\partial x})^k G_j(x,t,y,0)\varphi(y)dy| \le \Big[\int_{x-\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}}^{x+\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}} \hat{C}_{jk} R^{\frac{k+1}{2}} t^{j-1-(k+1)\frac{\beta}{2}} dy +$$

$$+ \int_{y\in(0,l):|y-x|>\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}} \frac{C_{jk} t^{j-1+\frac{\beta}{2-\beta}}}{R^{\frac{1}{2-\beta}}|y-x|^{1+\frac{2}{2-\beta}}} dy \Big] \cdot ||\varphi||_{C[0,l]} \le$$

$$\le c_{jk}[\sqrt{R}^k t^{j-1-\frac{k\beta}{2}} + t^{j-1}] \cdot ||\varphi||_{C[0,l]},$$

а отже, при $\varphi \in C[0,l]$ матимемо $\mathcal{G}_j\varphi \in C(\bar{Q})$, $j = 1,2$, $\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}_2\varphi \in C(\bar{Q})$ та правильні оцінки

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{G}_1\varphi)(x,t)\right| \le c_{11}[\sqrt{R}t^{-\frac{\beta}{2}} + 1] \cdot ||\varphi||_{C[0,l]}, \quad (x,t) \in Q, \quad \varphi \in C[0,l], \tag{6.16}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{G}_2\varphi)(x,t)\right| \le c_{21}\sqrt{R}t^{1-\frac{\beta}{2}} \cdot ||\varphi||_{C[0,l]}, \quad (x,t) \in \bar{Q}, \quad \varphi \in C[0,l]. \tag{6.17}$$

Інші властивості оператора $\mathcal{G}_0$ встановлені в [48], а операторів $\mathcal{G}_j$, $j = 1,2$ – у [9], зокрема показано, що при $\varphi \in C(\bar{Q})$ функції $\mathcal{G}_j\varphi$, $j = 0,1,2$ належать класу $C^{2,\beta}(Q)$.

Припущення (F0): $F_0 \in C(\bar{Q})$, $F_i \in C[0,l]$, $F_i(0) = F_i(l) = 0$, $i = 1,2$.

Із наведених вище оцінок, результатів [9, 48] та принципу максимуму випливає правильність наступної теореми.

Теорема 6.2. *За умов (F0), при відомій* $a \in C_+[0,T]$ *існує єдиний розв'язок* $u \in C^{2,\beta}(Q)$ *задачі (6.1)–(6.4). Він визначений формулою*

$$u(x,t) = \big(\mathcal{G}_0 F_0\big)(x,t) + \big(\mathcal{G}_1 F_1\big)(x,t) + \big(\mathcal{G}_2 F_2\big)(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}. \tag{6.18}$$

Перейдемо до доведення існування розв'язку оберненої крайової задачі.

Припущення (F): $F_3 \in C_{\beta/2}(0,T]$ та $\inf\limits_{t\in(0,T]} t^{\beta/2}|F_3(t)| = b_0 \ (>0)$,

$F_0(x,t) > 0\,,\ (x,t) \in Q_0\,,\ F_i(x) \geq 0\,,\ x \in [0,l]\,,\ i = 1,2\,,$

$t^{\beta/2}F_3(t) > 0, t \in [0,T]\,,$

або

$F_0(x,t) < 0\,,\ (x,t) \in Q_0\,,\ F_i(x) \leq 0\,,\ x \in [0,l]\,,\ i = 1,2\,,$

$t^{\beta/2}F_3(t) < 0, t \in [0,T]\,,$

також $||F_1||_{C[0,l]} := \max\limits_{x\in[0,l]} |F_1(x)| > 0\,.$

За припущень (F0), (F) підставимо функцію (6.18) в умову (6.5). Одержуємо

$$h(t) = t^{\beta/2}\frac{\partial}{\partial x}\Big[\big(\mathcal{G}_0 F_0\big)(0,t) + \big(\mathcal{G}_1 F_1\big)(0,t) + \big(\mathcal{G}_2 F_2\big)(0,t)\Big] \cdot [t^{\beta/2}F_3(t)]^{-1},$$
$$t \in [0,T], \tag{6.19}$$

де $h(t) = [a(t)]^{-1}$.

Результатом теореми 6.2, додатності функцій $\frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,a)}{\partial x}$, $\frac{\partial G_1(0,t,y,0,a)}{\partial x}$, $\frac{\partial G_2(0,t,y,0,a)}{\partial x}$ при $y \in [0,l]$, $t,\tau \in [0,T]$ та наведених міркувань є наступна лема.

Лема 6.2. *За припущень (F0), (F) пара функцій* $(u,a) \in \mathcal{M}_\beta$ *є розв'язком задачі (6.1)-(6.5) тоді і тільки тоді, коли додатна неперервна функція* $h(t) = [a(t)]^{-1}$, $t \in [0,T]$ *є розв'язком рівняння (6.19).*

6.1.2 Теореми існування та єдиності

Теорема 6.3. *За припущень (F0), (F) розв'язок* $(u,a) \in \mathcal{M}_\beta$ *задачі (6.1)-(6.5) існує: функція* $u(x,t)$ *визначена формулою (6.18),* $a(t) = [h(t)]^{-1}$, *де* $h(t)$ *– розв'язок операторного рівняння (6.19).*

Доведення. Враховуючи лему 6.2, для доведення існування розв'язку задачі залишається довести розв'язність рівняння (6.19) у класі додатних неперервних функцій на $[0,T]$. Доведемо спочатку розв'язність рівняння (6.19) у класі

$$M_R = \{h \in C[0,T] \mid \quad ||h||_{C[0,T]} = \max_{t\in[0,T]} |h(t)| \le R\}$$

при деякому $R > 0$. Для цього використаємо принцип Шаудера. На M_R розглянемо оператор

$$(Ph)(t) := t^{\beta/2}\Big[\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_0F_0\big)(0,t)+$$

$$+\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_1F_1\big)(0,t) + \tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_2F_2\big)(0,t)\Big]\cdot[t^{\beta/2}F_3(t)]^{-1},\ t\in[0,T].$$

Покажемо спочатку, що $P : M_R \to M_R$.

Використовуючи знайдені оцінки операторів Гріна та їх похідних, при $h \in M_R$, $t \in [0,T]$ матимемо

$$|(Ph)(t)| \le b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,1/h)}{\partial x}\cdot|F_0(y,\tau)|dy+$$

$$+\int\limits_0^l \frac{\partial G_1(0,t,y,0,1/h)}{\partial x}\cdot|F_1(y)|dy + \int\limits_0^l \frac{\partial G_2(0,t,y,0,1/h)}{\partial x}\cdot|F_2(y)|dy\Big] \le$$

$$\le b_0^{-1}\Big[\sqrt{R}c_0^*t^{\beta}||F_0||_{C(\bar{Q})} + c_1^*\Big(\sqrt{R}+t^{\beta/2}\Big)||F_1||_{C[0,l]} + c_2^*t\sqrt{R}||F_2||_{C[0,l]} \le$$

$$\le c_1\sqrt{R}+c_2,$$

де $||F_0||_{C(\bar{Q})} := \max\limits_{(x,t)\in\bar{Q}} |F_0(x,t)|$, $c_i^*(i=0,1,2), c_1, c_2$ – додатні числа.

За властивістю функції $c_1\sqrt{R}+c_2$ при довільних додатних числах c_1, c_2 існує таке $R_0 = R_0(c_1,c_2) > 0$, що для всіх $R > R_0$ виконується $c_1\sqrt{R}+c_2 < R$. Тоді при $h \in M_R$ матимемо $||Ph||_{C[0,T]} < R$, а отже, $\quad P : M_R \to M_R$.

Оператор P неперервний на M_R. Справді, при $h_1, h_2 \in M_R$, $t \in [0,T]$

$$(Ph_1)(t) - (Ph_2)(t) =$$

$$= t^{\beta/2}[t^{\beta/2}F_3(t)]^{-1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\Big[\frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,1/h_1)}{\partial x}-$$

$$-\frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,1/h_2)}{\partial x}\Big]F_0(y,\tau)dy+$$

$$+[t^{\beta/2}F_3(t)]^{-1}\int\limits_0^l t^{\beta/2}\Big[\frac{\partial G_1(0,t,y,0,1/h_1)}{\partial x}-\frac{\partial G_1(0,t,y,0,1/h_2)}{\partial x}\Big]F_1(y)dy+$$

$$+[t^{\beta/2}F_3(t)]^{-1}\int\limits_0^l t^{\beta/2}\Big[\frac{\partial G_2(0,t,y,0,1/h_1)}{\partial x}-\frac{\partial G_2(0,t,y,0,1/h_2)}{\partial x}\Big]F_2(y)dy.$$

Згідно з лемою 6.1, підінтегральні вирази інтегровні та дорівнюють нулю при $h_1(t)=h_2(t)$. Тому значення $|(Ph_1)(t)-(Ph_2)(t)|$ малі для всіх $t\in[0,T]$ при малих значеннях $h_1(t)-h_2(t)$, $t\in[0,T]$.

Подібно одержуємо, що оператор P компактний на M_R: вище було встановлено рівномірну обмеженість множини $\{(Ph)(t), t\in[0,T]\}$ при $h\in M_R$, крім того, із властивостей операторів Гріна та леми 6.1 випливає, що для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta=\delta(\varepsilon)$, таке що при $|\Delta t|<\delta$ для довільних $h\in M_R$, $t\in[0,T]$

$$|(Ph)(t+\Delta t)-(Ph)(t)|<\varepsilon,$$

а отже, множина $\{(Ph)(t), t\in[0,T]\}$ при $h\in M_R$ одностайно неперервна.

Згідно з принципом Шаудера, існує розв'язок $h\in M_R$ рівняння (6.19).

Було показано скінченність правої частини в (6.19) для всіх $t\in[0,T]$. Тоді за умов на задані функції

$$t^{\beta/2}\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_1F_1\big)(0,t)>0\,,\quad t^{\beta/2}\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_iF_i\big)(0,t)\geq 0\,,\ i=0,2\,,\quad t\in[0,T]$$

або $\quad t^{\beta/2}\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_1F_1\big)(0,t)<0\,,\quad t^{\beta/2}\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\mathcal{G}_iF_i\big)(0,t)\leq 0\,,\ i=0,2\,,\quad t\in[0,T]\,.$

Звідси, враховуючи також умови щодо функції F_3, одержуємо, що $(Ph)(t)>0$ для всіх $t\in[0,T]$, $h\in M_R$. Отже, враховуючи рівняння (6.19), додатність розв'язку $h(t)$ на $[0,T]$ забезпечується умовами (F0), (F).

Теорема 6.4. *При* $F_3 \in C_{\beta/2}(0,T]$ *розв'язок* $(u,a) \in \mathcal{M}_\beta$ *задачі (6.1)-(6.5) єдиний.*

Доведення. Якщо (u_1,a_1), $(u_2,a_2) \in \mathcal{M}_\beta$ – два розв'язки задачі, $v = u_1 - u_2$, $a = a_1 - a_2$, то

$$D_t^\beta v - a_1(t)v_{xx} = a(t)u_{2_{xx}}, \quad (x,t) \in Q, \tag{6.20}$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \quad v_{|t=0} = 0, \tag{6.21}$$

$$a_1(t)\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = -\frac{a(t)}{a_2(t)}F_3(t), \quad t \in (0,T] \tag{6.22}$$

та для функції v, як розв'язку першої крайової задачі (6.20)-(6.21), правильне зображення

$$v(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau,a_1)\cdot a(\tau)u_{2_{yy}}dy, \quad (x,t) \in \bar{Q}_0. \tag{6.23}$$

Підставляючи функцію (6.23) в умову (6.22), матимемо

$$a_1(t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,a_1)}{\partial x}\cdot a(\tau)u_{2_{yy}}dy = -\frac{a(t)}{a_2(t)}F_3(t),$$

тобто

$$a(t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \frac{a_1(t)a_2(t)}{F_3(t)}\cdot\frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,a_1)}{\partial x}\cdot a(\tau)u_{2_{yy}}dy = 0, \quad t \in [0,T].$$

Одержали, що за припущення теореми функція $a(t)$ задовольняє лінійне однорідне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду з інтегровним ядром, а отже, $a(t) = 0$ на $[0,T]$. Тоді з (6.23) одержуємо $v(x,t) = 0$, $(x,t) \in \bar{Q}$. □

Примітка. Якщо у припущенні (F0) додати умову $F_1 \in C^1[0,l]$, а в умові (F) вважати $F_3 \in C_0(0,T]$, то теорема 6.3 залишається правильною (тепер використовуємо, що

$|\int\limits_0^l \frac{\partial G_1(x,t,y,0)}{\partial x}\varphi(y)dy| = |\int\limits_0^l G_1(x,t,y,0)\varphi'(y)dy| \le d||F_1'||_{C[0,l]}$, $d = const > 0$).

Єдиність розв'язку задачі також одержуємо за припущення $F_3 \in C_0(0,T]$.

Примітка. Результат поширено автором на багатовимірний просторовий випадок у [90], де доведено теорему існування та єдиності розв'язку (u,a) оберненої крайової задачі

$$D_t^\beta u - a(t)\Delta u = F_0(x,t),\ a(t) > 0,\ \ (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T],$$

$$u_{|\partial\Omega_0} = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega_0 \times (0,T],$$
$$a(t)\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial \nu_{x_0}} = F_1(t), \quad t \in (0,T],$$
$$u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \Omega_0.$$

Тут x_0 – довільно задана точка на Ω_1, ν_x – орт внутрішньої нормалі до поверхні Ω_1 в точці $x \in \Omega_1$, F_0- F_2 – задані функції.

6.2 Регулярність розв'язків крайових задач з узагальненими функціями в правих частинах

Використовуємо функційний простір

$$\mathcal{D}'_C(\bar{Q}) = \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}) :\ (v(\cdot,t),\varphi(\cdot)) \in C[0,T] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}[0,l]\}.$$

Для розв'язку першої крайової задачі для рівняння

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F_0(x)g(t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T] := Q \tag{6.24}$$

у випадку узагальненої функції F_0 встановлюємо, що при неперервній $g(t)$ розв'язок $u(x,t)$ задачі є узагальненою функцією, неперервною за змінною t в узагальненому сенсі – належить простору $\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0)$. Цей результат використовується для доведення розв'язності деяких обернених крайових задач для такого рівняння з заданими узагальненими функціями у правих частинах.

Розглядаємо першу крайову задачу

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T],$$

$$u(x,0)=F_1(x),\quad u_t(x,0)=F_2(x),\quad x\in(0,l) \tag{6.25}$$

для рівняння (6.24) при $\beta\in(0,2)$ (друга початкова умова відсутня у випадку $\beta\in(0,1]$) за припущення

(BF): $\quad a\in C_+^\infty[0,T]\,,\ g\in C[0,T]\,,\ F_j\in\mathcal{D}'[0,l]\,,\ j=0,1,2\,.$

Згідно з означенням 5.8, розв'язком задачі (6.24), (6.25) за припущення (BF) є функція $u\in\mathcal{D}'(\overline{Q})$, що задовольняє тотожність

$$(u,\widehat{L}\psi)=\int\limits_0^T g(t)(F_0,\psi(\cdot,t))dt+\sum_{j=1}^{2}\big(F_j(x)\times f_{j-\beta}(t),\psi(\cdot,t)\big)\qquad\forall\psi\in X(\bar{Q}) \tag{6.26}$$

За лемою 5.14 (доведення якої однакове як для сталого, так і для змінного коефіцієнта $a(t)$) для довільної $\psi\in X(\bar{Q})$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y,\tau)=\psi(y,t),\quad (y,t)\in\bar{Q}_0,$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_j(\widehat{L}\psi))(y)=\big(f_{j-\beta}(t),\psi(y,t)\big),\quad y\in[0,l],\quad j=1,2, \tag{6.27}$$

а за лемою 5.15 при $a\in C_+^\infty[0,T]$

$$\widehat{\mathcal{G}}_0:\mathcal{D}(\bar{Q}_0)\to X(\bar{Q}_0),\qquad \widehat{\mathcal{G}}_j:\mathcal{D}(\bar{Q}_0)\to C^\infty[0,l],\quad j=1,2. \tag{6.28}$$

За теоремою 5.13 за припущення (BF) існує єдиний розв'язок $u\in\mathcal{D}'(\overline{Q})$ задачі (6.24), (6.25), який визначений формулою

$$(u,\varphi)=(F,\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)+\sum_{j=1}^{2}(F_j,\widehat{\mathcal{G}}_j\varphi)\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}(\bar{Q}). \tag{6.29}$$

Введемо оператори

$$(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)=\int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx\,,$$

$$(\widehat{G}_j\varphi)(y,t)=\int\limits_0^l G_j(x,t,y,0,a)\varphi(x)dx\,,\qquad j=1,2\,,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\bar{Q})\,.$$

Лема 6.3. *Нехай* $a\in C_+^\infty[0,T]\,,\ \max\limits_{t\in[0,T]}[a(t)]^{-1}\le R$. *Тоді для довільної* $\varphi\in\mathcal{D}[0,l]$ *правильні оцінки*

$$|(\frac{\partial}{\partial y})^k(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)|\le c_{k0}\sqrt{R}||\varphi||_{C^{k-1}[0,l]}\cdot(t-\tau)^{\beta/2-1},$$

$$|(\frac{\partial}{\partial y})^k(\widehat{G}_j\varphi)(y,t)| \le c_{kj}||\varphi||_{C^{k-1}[0,l]} \cdot \sqrt{R}t^{j-1-\beta/2}, \quad j=1,2, \tag{6.30}$$

а також

$$|(\frac{\partial}{\partial y})^k(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)| \le c_{k0}||\varphi||_{C^k[0,l]} \cdot (t-\tau)^{\beta-1},$$

$$|(\frac{\partial}{\partial y})^k(\widehat{G}_j\varphi)(y,t)| \le c_{kj}||\varphi||_{C^k[0,l]} \cdot t^{j-1}, \quad j=1,2, \quad k\in\mathbb{Z}_+, \tag{6.31}$$

c_{kj} *(* $j=0,1,2$ *,* $k=0,1,\dots$ *) – додатні сталі.*

Доведення. Використовуючи доведення леми 6.1, при $\varphi\in C[0,l]$ для всіх $t\in[0,T]$ знаходимо

$$|\int\limits_0^l (\frac{\partial}{\partial y})^k G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx| \le c_k^* R^{\frac{k}{2}}||\varphi||_{C[0,l]} \cdot (t-\tau)^{\frac{\beta(2-k)}{2}-1}, \quad (y,\tau)\in\overline{Q},$$

і при $k\le 1$, $\varphi\in C[0,l]$, $y\in[0,l]$, $0\le\tau<t\le T$ функції $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k(G_0\varphi)(y,t,\tau)$ є неперервними. Також із доведення леми 6.1

$$|\int\limits_0^l (\frac{\partial}{\partial y})^k G_j(x,t,y,0,a)\varphi(x)dx| \le c_{jk}^*\sqrt{R}^k t^{j-1-\frac{k\beta}{2}}\,||\varphi||_{C[0,l]},$$

а отже, при $\varphi\in C[0,l]$ функції $(G_j\varphi)(y,\tau)$ неперервні в $\overline{Q}$, $j=1,2$. Використовуючи одержані оцінки при $k=0$ ($k=1$) та "перекидання"похідних на функцію φ, одержуємо оцінки (6.31) (відповідно (6.30)). Лема доведена.

Теорема 6.5. *За припущення (BF) існує єдиний розв'язок* $u\in\mathcal{D}'_C(\overline{Q})$ *задачі (6.24), (6.25). Він визначений формулою*

$$(u,\varphi) = \int\limits_0^t g(\tau)(F_0,\widehat{G}_0\varphi)d\tau + \sum_{j=1}^2(F_j,\widehat{G}_j\varphi) \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}[0,l], \quad t\in[0,T]. \tag{6.32}$$

Доведення. Ясно, що узагальнена функція $F(x,t)=F_0(x)\cdot g(t)$ належить $\mathcal{D}'_C(\overline{Q})\subset\mathcal{D}'(\overline{Q})$ ($(F_0(x)\cdot g(t),\varphi(x)) = (F_0,\varphi)g(t)$ для довільної $\varphi\in\mathcal{D}[0,l]$ є неперервною на $[0,T]$ при $g\in C[0,T]$). Тому за теоремою 5.13 існує єдиний розв'язок $u\in\mathcal{D}'(\overline{Q})$ задачі (6.24), (6.25), визначений формулою (6.29).

Узагальнені функції в обмеженій області мають скінченні порядки сингулярностей [149]: існують такі цілі числа k_0, k_1, k_2 та функції $g_{0k}, g_{1k}, g_{2k} \in L_1(0,l)$, що

$$(F_j(y), \varphi(y)) = \sum_{k=0}^{k_j} \int_0^l g_{jk}(y) \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k \varphi(y) dy \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}[0,l], \quad j = 0,1,2. \quad (6.33)$$

Використовуючи зображення (6.33) та лему 6.3, переконуємось, що для довільної $\varphi \in \mathcal{D}[0,l]$ функції у правій частині формули (6.32)

$$\int_0^t g(\tau)(F_0(y), (\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)) d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0} \int_0^t g(\tau) \Big[\int_0^l g_{0k}(y) \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k (\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau) dy \Big] d\tau,$$

$$(F_j(y), (\widehat{G_j}\varphi)(y,t)) = \sum_{k=0}^{k_j} \int_0^l g_{jk}(y) \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k (\widehat{G_j}\varphi)(y,t) dy, \quad j = 1,2$$

неперервні на $[0,T]$, при цьому правильні оцінки

$$\Big| \int_0^t g(\tau)(F_0(y), (\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)) d\tau \Big| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{k_0} c_k ||\varphi||_{C^k[0,l]} \cdot \int_0^t |g(\tau)| \Big[\int_0^l |g_{0k}(y)| dy \Big] (t-\tau)^{\beta/2-1} d\tau \le b_0 \sqrt{R} t^{\beta/2},$$

$$|(F_j(y), (\widehat{G_j}\varphi)(y,t))| \le \sum_{k=0}^{k_j} c_{kj} ||\varphi||_{C^k[0,l]} \cdot t^{j-1} \int_0^l |g_{jk}(y)| dy = b_j t^{j-1}, \quad j = 1,2,$$

b_j, b_{kj} – додатні сталі. Отже, права частина у формулі (6.32) визначена та функція (6.32) неперервна за змінною $t \in [0,T]$.

Покажемо, що функція (6.32) задовольняє тотожність (6.26) і тоді за означенням є розв'язком задачі (6.24), (6.25). За лемою 6.3 при довільних

$0 \le \tau < t \le T$, $\varphi \in \mathcal{D}[0,l]$ маємо $\widehat{G}_j\varphi \in \mathcal{D}[0,l]$, а також $\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi) \in \mathcal{D}[0,l]$ для кожної $\psi \in X(\overline{Q})$. Згідно з формулою (6.32),

$$(u,\widehat{L}\psi) = (F_0(y), \int\limits_0^T \big(\int\limits_0^t g(\tau)\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi)d\tau\big)dt + \sum_{j=1}^{2}(F_j, \int\limits_0^T \widehat{G}_j(\widehat{L}\psi)dt) =$$

$$= (F_0(y), \int\limits_0^T g(\tau)(\int\limits_\tau^T \widehat{G}_0(\widehat{L}\psi)dt)d\tau + \sum_{j=1}^{2}(F_j, \int\limits_0^T \widehat{G}_j(\widehat{L}\psi)dt) =$$

$$= (F_0(y)\cdot g(\tau), \widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi)(y,\tau)) + \sum_{j=1}^{2}(F_j, \widehat{\mathcal{G}}_j(\widehat{L}\psi)).$$

Скориставшись формулами (6.27), одержуємо

$$(u,\widehat{L}\psi) = (F_0(y)\cdot g(\tau), \psi(y,\tau)) + \sum_{j=1}^{2}\big(F_j(x)\times f_{j-\beta}(t), \psi(x,t)\big) \qquad \forall \psi \in X(\bar{Q}),$$

тобто тотожність (6.26). Єдиність розв'язку задачі доводиться, як у теоремі 5.13. $\square$

Наслідок 6.1. *1) За умов теореми 6.5 також* $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q})$, $k \in \mathbb{Z}_+$ *для розв'язку* u *задачі.*

2) Якщо існує $g^{(\beta)} \in C[0,T]$, *то за умов теореми 6.5 також для узагальненого розв'язку* u *задачі* $u^{(\beta)} \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q})$ *у вказаному вище сенсі:* $(f_{-\beta}(\cdot) * u(x,\cdot), \varphi(x)) \in C[0,T]$ *для кожної* $\varphi \in \mathcal{D}(0,l)$.

Примітка: Результати поширюються на багатовимірний просторовий випадок.

6.3 Обернені крайові задачі з узагальненими функціями в правих частинах

Встановлюємо однозначну розв'язність трьох обернених крайових задач для дифузійно-хвильового рівняння з заданими узагальненими функціями в правих частинах прямої задачі.

6.3.1 Формулювання задач

ЗАДАЧА 1 полягає в визначенні пари функцій (u, a): розв'язку u першої крайової задачі (6.24), (6.25), де F_j, $j = 0, 1, 2$ – задані узагальнені функції, $g(t)$ – задана неперервна функція, та невідомого коефіцієнта $a(t) > 0$, $t \in [0, T]$ за додаткової умови

$$(a(t)u_x(x,t), \varphi_0(x)) = F_3(t), \quad t \in [0, T] \tag{6.34}$$

– задано значення узагальненої функції $a(t)u_x(x,t)$ на довільно заданій гладкій функції $\varphi_0(x)$. Розглядаємо випадок $\beta \in (0, 2)$. Друга початкова умова в (6.25) відсутня у випадку $\beta \in (0, 1]$.

Припущення:

(FF0) $\quad g \in C[0, T]$, $F_j \in \mathcal{D}'[0, l]$, $j = 0, 1, 2$,

(FF1) $\quad F_3 \in C_+[0, T]$, $\varphi_0 \in \mathcal{D}(0, l)$.

Означення 6.2. Розв'язком задачі 1 за припущень (FF0), (FF1) називається пара функцій $(u, a) \in \mathcal{M}_\beta := \mathcal{D}'_C(\overline{Q}_0) \times C_+[0, T]$, що задовольняє тотожність (6.26) та умову (6.34).

ЗАДАЧА 2 полягає в знаходженні пари функцій (u, g): розв'язку u задачі (6.24), (6.25), де F_j, $j = 0, 1, 2$ – задані узагальнені функції, та невідомої неперервної функції $g(t)$ за додаткової умови

$$(u(x,t), \varphi_0(x)) = F_4(t), \quad t \in [0, T]. \tag{6.35}$$

Припущення:

(FF2) $a \in C^\infty_+[0, T]$, $F_j \in \mathcal{D}'[0, l]$, $j = 0, 1, 2$,

$F_4 \in C^1[0, T]$, $F_4(0) - (F_1, \varphi_0) = 0$, $\varphi_0 \in \mathcal{D}(0, l)$.

Означення 6.3. Розв'язком задачі 2 за припущення (FF2) називається пара функцій $(u, g) \in \mathcal{M}(Q) = \mathcal{M} := \mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0) \times C[0, T]$, що задовольняє тотожність (6.26) та умову (6.35).

ЗАДАЧА 3 полягає в визначенні пари функцій (u,b): розв'язку u першої крайової задачі

$$u_t^{(\beta)} - u_{xx} - b(t)u = g(t)F_0(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T], \tag{6.36}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T],$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in (0,l), \tag{6.37}$$

та невідомого молодшого коефіцієнта $b(t)$ за умови перевизначення

$$(u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot)) = F(t), \quad t \in [0,T], \tag{6.38}$$

де F_0, F_1, F_2 – задані узагальнені функції, g, F – задані неперервні функції. Друга початкова умова в (6.37) відсутня у випадку $\beta \in (0,1]$.

Припущення (FF3):

$F, F^{(\beta)} \in C[0,T]$, $F(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$, $\varphi_0 \in \mathcal{D}(0,l)$.

Означення 6.4. Пара функцій $(u,b) \in \mathcal{M}(Q) := \mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0) \times C[0,T]$ називається розв'язком задачі (6.36)-(6.38) за припущень (FF0), (FF3), якщо вона задовольняє тотожність

$$\int_0^T \big(u(\cdot,t), (\hat{L}\psi)(\cdot,t)\big)dt = \int_0^T g(t)\big(F_0(\cdot), \psi(\cdot,t)\big)dt + \int_0^T b(t)\big(u(\cdot,t), \psi(\cdot,t)\big)dt +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2} \big(F_j(x) \times f_{j-\beta}(t), \psi(\cdot,t)\big) \quad \forall \psi \in X(\bar{Q}) \tag{6.39}$$

та умову (6.38).

Необхідні умови узгодження даних

$$(F_1, \varphi_0) = F(0), \quad (F_2, \varphi_0) = F'(0). \tag{6.40}$$

6.3.2 Розв'язність задач

1. Нехай виконуються припущення (FF0), (FF1) та наступне

Припущення (FF): $\varphi_0(x) \geq 0$, $x \in (0,l)$, $g(t) \geq 0$, $t \in [0,T]$, правильна одна з наступних умов:

1) $(F_0(y), \varphi_y(y,t)) > 0$, $(F_j(y), \varphi_y(y,t)) \geq 0$ для всіх $t \in [0,T]$, кожної невід'ємної $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q}_0)$, $j = 1,2$, $F_3(t) < 0$, $t \in [0,T]$,

2) $(F_0(y), \varphi_y(y,t)) < 0$, $(F_j(y), \varphi_y(y,t)) \leq 0$ для всіх $t \in [0,T]$, кожної невід'ємної $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q}_0)$, $j = 1,2$, $F_3(t) > 0$, $t \in [0,T]$.

Згідно з теоремою 6.5 за припущення (FF0) при кожній відомій $a \in C_+^\infty[0,T]$ існує єдиний розв'язок $u \in \mathcal{D}'_C(\overline{Q})$ задачі (6.24), (6.25), він визначений формулою (6.32).

Підставимо функцію (6.32) в умову (6.34). Як у 6.1, одержуємо

$$a(t)\Big[\int\limits_0^t g(\tau)(F_0, \widehat{G}_0\varphi_0')(t,\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{2}(F_j, \widehat{G}_j\varphi_0')(t)\Big] = -F_3(t), \quad t \in [0,T]$$

звідки

$$h(t) = -\Big[\int\limits_0^t g(\tau)(F_0, \widehat{G}_0\varphi_0')(t,\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{2}(F_j, \widehat{G}_j\varphi_0')(t)\Big] \cdot \Big[F_3(t)\Big]^{-1}, \quad t \in [0,T], \tag{6.41}$$

де $h(t) = [a(t)]^{-1}$. За властивостями компонент вектор-функції Гріна

$$(\widehat{G}_0\varphi_0')(y,t,\tau) = \int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi'(x)dx =$$

$$= -\int\limits_0^l \tfrac{\partial}{\partial x}G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx = \tfrac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(x)dx = \tfrac{\partial}{\partial y}(\widehat{G}_0\varphi_0)(y,t,\tau),$$

так само $\quad (\widehat{G}_j\varphi_0')(y,t) = \frac{\partial}{\partial y}(\widehat{G}_j\varphi_0)(y,t)$, $j = 1,2$.

Тому з додатності функцій $G_j(x,t,y,\tau,a)$, $(x,t),(y,\tau) \in Q$, $j = 0,1,2$ при невід'ємній φ_0 отримуємо $\widehat{G}_j\varphi_0' \geq 0$, $j = 0,1,2$. Наслідком цього та теореми 6.5 є наступна лема.

Лема 6.4. *За припущень (FF0), (FF1), (FF) пара функцій $(u,a) \in \mathcal{M}_\beta$ є розв'язком задачі 1 тоді і тільки тоді, коли додатна неперервна функція $h(t) = [a(t)]^{-1}$, $t \in [0,T]$ є розв'язком рівняння (6.41).*

Теорема 6.6. *За припущень (FF0), (FF1), (FF) розв'язок* $(u,a) \in \mathcal{M}_\beta$ *задачі 1 існує: функція* $u(x,t)$ *визначена формулою (6.32),* $a(t) = [h(t)]^{-1}$, *де* $h(t)$ *– розв'язок рівняння (6.41).*

Доведення. Враховуючи наведені вище міркування, перетворення, лему 6.4, для доведення існування розв'язку задачі залишається довести розв'язність рівняння (6.41) у класі додатних неперервних функцій $h(t)$, $t \in [0,T]$. Доведемо спочатку його розв'язність у класі

$$M_R = \{h \in C[0,T] \quad | \quad ||h||_{C[0,T]} \le R\}.$$

Використаємо принцип Шаудера. На M_R розглянемо оператор

$$(Ph)(t) := -\Big[(F, \widehat{G}_0\varphi_0')(t) + \sum_{j=1}^{2}(F_j, \widehat{G}_j\varphi_0')(t)\Big] \cdot \Big[F_3(t)\Big]^{-1}, \quad t \in [0,T].$$

При доведенні теореми 6.5 за припущення (FF0) були одержані оцінки

$$|\int_0^t g(\tau)(F_0(y), (\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau))d\tau| \le b_0\sqrt{R}t^{\beta/2},$$

$$|(F_j(y), (\widehat{G_0}\varphi)(y,t))| \le b_j t^{j-1}, \quad j = 1,2,$$

b_j, b_{kj} – додатні сталі, $j = 0,1,2$. Тоді при $h \in M_R$, $t \in [0,T]$ одержуємо

$$|(Ph)(t)| \le \Big[b_0\sqrt{R}t^{\beta/2} + b_1 + b_2 t\Big] \cdot \Big[F_3(t)\Big]^{-1} \le A\sqrt{R} + B,$$

де $A = [b_0 T^{\beta/2}]/\inf\limits_{t\in[0,T]}|F_3(t)|$, $B = [b_1 + b_2 T]/\inf\limits_{t\in[0,T]}|F_3(t)|$. За властивістю функції $A\sqrt{R} + B$ при довільних додатних числах A, B існує таке $R_0 = R_0(A,B) > 0$, що для всіх $R > R_0$ виконується нерівність $A\sqrt{R} + B < R$. Ми показали, що для всіх $R > R_0$, $h \in M_R$

$$||Ph||_{C[0,T]} < R, \text{ а отже,} \qquad P : M_R \to M_R.$$

Оператор P неперервний на M_R. Справді, при $h_1, h_2 \in M_R$

$$(Ph_1)(t) - (Ph_2)(t) =$$

$$= [F_3(t)]^{-1} \int\limits_0^T g(\tau)\Big(F_0(y), \int\limits_0^l [G_0(x,t,y,\tau,1/h_1) - G_0(x,t,y,\tau,1/h_2)]\varphi_0(x)dx\Big)d\tau$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} [F_3(t)]^{-1}\Big(F_j(y), \int\limits_0^l [G_j(x,t,y,1/h_1) - G_j(x,t,y,1/h_2)]\varphi_0(x)dx\Big).$$

Використовуючи зображення (6.33) узагальнених функцій F_j, $j = 0,1,2$, бачимо, що підінтегральні функції мають інтегровні особливості та дорівнюють нулю при $h_1 = h_2$. Отже, значення $|(Ph_1)(t) - (Ph_2)(t)|$ малі для всіх $t \in [0,T]$ при малих значеннях $|h_1(t) - h_2(t)|$, $t \in [0,T]$.

Подібно одержуємо, що оператор P компактний на M_R: вище було встановлено рівномірну обмеженість множини $\{(Ph)(t), t \in [0,T]\}$ при $h \in M_R$, її одностайна неперервність випливає з рівномірної збіжності інтегралів у виразі $(Ph)(t+\Delta t) - (Ph)(t)$ при $h \in M_R$ та леми 6.3, за якою

$$|G_i(x,t+\Delta t,y,\tau,a) - G_i(x,t,y,\tau,a)| \le M_i(x,t,y,\tau,a)|\Delta t|^{\gamma}, \quad (x,t),(y,\tau) \in \overline{Q},$$

де $0 < \gamma < \beta$, невід'ємні функції $M_i(x,t,y,\tau,a)$ мають такі ж оцінки, як $G_i(x,t,y,\tau,a)$, $i = 0,1,2$ відповідно із заміною β на $\beta - \gamma$.

Було показано скінченність правої частини в (6.41) для всіх $t \in [0,T]$. Також із оцінок (6.31) та додатності функцій $G_j(x,t,y,\tau,1/h)$, $(x,t) \in Q$, $y \in (0,l)$, $\tau \in [0,T]$ випливає, що за умов (FF) $\int\limits_0^t g(\tau)\big(F_0, \widehat{G}_0\varphi_0'\big)d\tau$, $\big(F_j, \widehat{G}_j\varphi_0'\big)(t)$, $j = 1,2$, $-F_3(t)$, $t \in [0,T]$ є одного знаку та обидва множники у (6.41) відмінні від нуля. Звідси одержуємо, що $(Ph)(t) > 0$ для всіх $t \in [0,T]$, $h \in M_R$. Отже, враховуючи рівняння (6.41), додатність $h(t)$ забезпечується умовами (FF0), (FF1), (FF).

Теорема 6.7. *За умови (FF1) розв'язок $(u,a) \in \mathcal{M}_\beta$ задачі 1 єдиний.*

Доведення. Якщо (u_1,a_1), $(u_2,a_2) \in \mathcal{M}_\beta$ – два розв'язки задачі, $v = u_1 - u_2$, $a = a_1 - a_2$, то

$$v_t^{(\beta)} - a_1(t)v_{xx} = a(t)u_{2_{xx}}, \quad (x,t) \in Q, \tag{6.42}$$

$$v(0,t)=0, \quad v(l,t)=0, \quad t\in[0,T], \quad v_{|t=0}=0, \quad x\in[0,l], \tag{6.43}$$

$$a_1(t)(v_x(x,t),\varphi_0(x)) = -a_1(t)(v(x,t),\varphi_0'(x)) = \frac{a(t)}{a_2(t)}(a_2(t)v_2(x,t),\varphi_0'(x)) =$$

$$= -\frac{a(t)}{a_2(t)}(a_2(t)v_{2_x}(x,t),\varphi_0(x)) = -\frac{a(t)F_3(t)}{a_2(t)}, \quad t\in[0,T],$$

а отже,

$$a_1(t)(v(x,t),\varphi_0'(x)) = \frac{a(t)F_3(t)}{a_2(t)}, \ \ t\in[0,T] \quad \forall\varphi_0\in\mathcal{D}(0,l). \tag{6.44}$$

Для функції v, як розв'язку першої крайової задачі (6.42)-(6.43), правильне зображення

$$(v(\cdot,t),\varphi(\cdot)) = \int\limits_0^t a(\tau)\Big(u_{2_{yy}}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\Big)d\tau \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}[0,l], \quad t\in[0,T]. \tag{6.45}$$

Підставляючи функцію (6.45) в умову (6.44), одержуємо

$$a_1(t)\int\limits_0^t a(\tau)\Big(u_{2_{yy}}(y,\tau),(\widehat{G}_0\varphi_0')(y,t,\tau)\Big)d\tau = \frac{a(t)F_3(t)}{a_2(t)},$$

тобто

$$a(t) - \frac{a_1(t)a_2(t)}{F_3(t)}\cdot\int\limits_0^t a(\tau)\Big(u_{2_{yy}}(y,\tau),(\widehat{G}_0\varphi_0')(y,t,\tau)\Big)d\tau = 0, \quad t\in[0,T],$$

де у підінтегральному виразі є значення узагальненої функції $u_{2_{yy}}(\cdot,\tau)$ на $(\widehat{G}_0\varphi_0')(\cdot,t,\tau)$ для фіксованих $t,\tau\in[0,T]$.

За теоремою 6.5 та наслідком $u_2(y,\tau)$ та $u_{2_{yy}}(y,\tau)$ – неперервні в узагальненому сенсі функції змінної τ. Як узагальнена функція в обмеженій області $\overline{Q}_0$, $u_{2_{yy}}(y,\tau)$ має скінченний порядок s та c-сингулярності. Тому правильне зображення

$$(u_{2_{yy}}(y,\tau),\varphi(y)) = \sum_{k=0}^{p}\int\limits_0^l r_k(y,\tau)\big(\frac{\partial}{\partial y}\big)^k\varphi(y)dy \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}[0,l],$$

де $r_k \in C(\overline{Q}_0)$, $k = 0, 1, \ldots p$, звідки

$$K(t,\tau) = \Big(u_{2_{yy}}(\cdot,\tau), (\widehat{G}_0\varphi_0')(\cdot,t,\tau)\Big) = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_0^l r_k(y,\tau)\big(\frac{\partial}{\partial y}\big)^k (\widehat{G}_0\varphi_0')(\cdot,t,\tau)dy.$$

Використовуючи (6.31), знаходимо оцінку $|K(t,\tau)| \le C(t-\tau)^{\beta-1}$. Ми одержали, що функція $a(t)$ задовольняє лінійне однорідне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду з інтегровним ядром (за умови теореми), яке однозначно розв'язне. Отже, $a(t) = 0$, $t \in [0,T]$. Тоді з (6.45) одержуємо $v(x,t) = 0$, $(x,t) \in \overline{Q}$.

2. Переходимо до *задачі 2*. Підставимо розв'язок (6.32) прямої задачі в умову (6.35). Одержуємо

$$\int\limits_0^t (F_0, \widehat{G}_0\varphi_0)(t,\tau)g(\tau)d\tau = F_4(t) - \sum_{j=1}^{2}(F_j, \widehat{G}_j\varphi_0)(t), \quad t \in [0,T]. \tag{6.46}$$

Це лінійне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду з інтегровним ядром $K_0(t,\tau) = (F_0, \widehat{G}_0\varphi_0)(t,\tau)$, що має оцінку $|K_0(t,\tau)| \le C(t-\tau)^{\beta/2-1} = C\Gamma(\beta/2)f_{\beta/2}(t-\tau)$. Умова $F_4(0) = \sum\limits_{j=1}^{2}(F_j, \widehat{G}_j\varphi_0)(0) = (F_1, \varphi_0)$ є необхідною умовою його розв'язності у $C[0,T]$. Подамо рівняння (6.46) у вигляді

$$f_{1-\beta/2}(t) * \int\limits_0^t (F_0, \widehat{G}_0\varphi_0)(t,\tau)g(\tau)d\tau = g_4(t),$$

де $g_4(t) = f_{1-\beta/2}(t) * [F_4(t) - \sum\limits_{j=1}^{2}(F_j, \widehat{G}_j\varphi_0)(t)]$, звідки одержуємо рівнозначне рівнянню (6.46) лінійне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду

$$\int\limits_0^t K_1(t,\tau)g(\tau)d\tau = g_4(t),$$

ядро якого $K_1(t,\tau) = f_{1-\beta/2}(t) * (F_0, \widehat{G}_0\varphi_0)(t,\tau)$ неперервне та має оцінку

$$|K_1(t,\tau)| \le Cf_{1-\beta/2}(t) * f_{\beta/2}(t-\tau) = C\theta(t-\tau),$$

C – додатна стала. При неперервній диференційовності правої частини $g_4(t)$ матимемо єдиний неперервний розв'язок рівняння (5.14). Із наведених вище

оцінок випливає, що $f_{1-\beta/2}*(F_j,\widehat{G}_j\varphi_0)\in C^1[0,T]$. Тоді за умови $f_{1-\beta/2}*F_4\in C^1[0,T]$ (яка виконується при $F_4\in C^1[0,l]$) одержуємо однозначну розв'язність рівняння (5.14) у класі неперервних функцій на $[0,T]$. Припускаючи існування двох розв'язків (u_1,g_1), (u_2,g_2) задачі, так само приходимо до лінійного однорідного інтегрального рівняння Вольтерри першого роду з ядром $K_1(t,\tau)$ щодо g_1-g_2, звідки одержуємо $g_1(t)=g_2(t)$, а тоді із зображення функції u_1-u_2, що також $u_1-u_2=0$ в $\bar{Q}$. Ми довели наступну теорему.

Теорема 6.8. *За припущення (FF2) пара $(u,g)\in\mathcal{M}$, де функція u задана формулою (6.32), $g(t)$ – розв'язок інтегрального рівняння (6.46), є єдиним розв'язком задачі 2.*

Інший шлях розв'язування задачі 2 (за допомогою зведення задачі до інтегрального рівняння Вольтерри другого роду) наведено у наступному підрозділі.

3. Для доведення розв'язності *задачі 3* також застосовуємо метод функції Гріна та теорему 6.5.

Зауважимо, що при $\beta=1$ (та $\frac{\partial u}{\partial t}$ замість D_t^1u, відповідно) обернені крайові задачі про знаходження пари функцій (u,b) при гладких даних у правих частинах та інших умовах перевизначення досліджувались у [203] та інших роботах, де були доведені теореми існування та єдності.

З теореми 6.5 випливає, що за припущення (FF0) при відомій $b\in C[0,T]$ розв'язок $u\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q})$ задачі (6.36)–(6.37) задовольняє рівняння

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=\int\limits_0^t b(\tau)\big(u(\cdot,t),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)d\tau+h_\varphi(t)\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}[0,l],\quad(6.47)$$

де

$$h_\varphi(t)=\int\limits_0^t g(\tau)\big(F_0(\cdot),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)d\tau+\sum_{j=1}^2\big(F_j(\cdot),(\widehat{G}_j\varphi)(\cdot,t)\big),\quad t\in[0,T]\tag{6.48}$$

та $h_\varphi\in C[0,T]$ для кожної $\varphi\in\mathcal{D}[0,l]$. Навпаки, будь-який розв'зок $u\in$

$\mathcal{D}'_C(\bar{Q})$ рівняння (6.47) (при відомій $b \in C[0,T]$) є розв'язком задачі (6.36)–(6.37). З рівняння (6.36) одержуємо

$$\big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t),\varphi_0(\cdot)\big) = \big(u(\cdot,t),\varphi_0''(\cdot)\big) + b(t)\big(u(\cdot,t),\varphi_0(\cdot)\big) + (F_0,\varphi_0)g(t).$$

Використовуючи умову (6.38) та припущення (FF3), знаходимо вираз

$$b(t) = \big[F^{(\beta)}(t) - \big(u(\cdot,t),\varphi_0''(\cdot)\big) - (F_0,\varphi_0)g(t)\big][F(t)]^{-1}, \quad t \in [0,T]. \tag{6.49}$$

через u. З теореми 6.5 і припущення (FF3) випливає, що права частина (6.49) є неперервною функцією на $[0,T]$. Позначимо

$$r(u,t) = \big[F^{(\beta)}(t) - \big(u(\cdot,t),\varphi_0''(\cdot)\big) - (F_0,\varphi_0)g(t)\big][F(t)]^{-1}, \quad t \in (0,T].$$

Підставляючи $r(u,t)$ в (6.47) замість $b(t)$, отримаємо нелінійне рівняння

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big) = \int\limits_0^t r(u,\tau)\big(u(\cdot,t),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)d\tau + h_\varphi(t)\,\forall\varphi \in \mathcal{D}[0,l], t \in [0,T] \tag{6.50}$$

щодо невідомої $u \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q})$. Ми звели задачу (6.36)–(6.38) до системи (6.50), (6.49). Правильне обернене твердження, і ми отримуємо наступний результат.

Лема 6.5. *За припущень (FF0), (FF3) і (6.40) пара функцій $(u,b) \in \mathcal{M}(Q)$ є розв'язком задачі 3 тоді і лише тоді, коли функція $u \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0)$ є розв'язком рівняння (6.50), функція $b \in C[0,T]$ визначена формулою (6.49).*

Теорема 6.9. *За припущень (FF0), (FF3) і (6.40) існує $T^* \in (0,T]$ (відповідно $Q^* = (0,l) \times (0,T^*]$) і розв'язок $(u,b) \in \mathcal{M}(Q^*) = \mathcal{D}'_C(\bar{Q}^*) \times C[0,T^*]$ задачі (6.36)-(6.38): функція u є розв'язком рівняння (6.50), b визначена згідно з (6.49).*

Теорема 6.10. *За умови $F \in C[0,T]$, $F(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$ розв'язок $(u,b) \in \mathcal{M}(Q)$ задачі (6.36)-(6.38) єдиний.*

Доведення теорем 6.9 та 6.10 наведені у [103]. Автору належить формулювання задачі та методика доведення її розв'язності. Ця методика детально

наведена у наступних підрозділах при дослідженні такого класу обернених задач з заданими в правих частинах прямої задачі функціями із просторів беселевих потенціалів.

Примітка. Розглянуто задачі в одновимірному просторовому випадку. Як у випадку гладких даних [90], так само можемо розглядати випадок крайової задачі в обмеженій області $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а також обернену задачу Коші

$$u_t^{(\beta)} - A(x,D)u - b(t)u = g(t)F_0(x),\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T] := Q_0,$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad u_t(x,0) = F_2(x),\ x \in R^n,$$

$$\big(u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot)\big) = F(t), \quad t \in [0,T],$$

що полягає у знаходженні пари $(u,b) \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0) \times C[0,T]$ при заданих $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $g, F \in C[0,T]$ та F_j $(j = 0,1,2)$ із просторів узагальнених функцій з компактними носіями в $\mathbb{R}^n$. Тут $A(x,D)$ – еліптичний диференціальний оператор зі змінними нескінченно диференційовними коефіцієнтами,

$$\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0) = \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}_0)) \big| \big(v(\cdot,t), \varphi(\cdot)\big) \in C[0,T]\ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}.$$

6.4 Обернена крайова задача у просторах беселевих потенціалів

Доведемо однозначну розв'язність оберненої задачі

$$D_t^\beta u(x,t) - (Au)(x,t) = g(t)F_0(x), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times [0,T], \tag{6.51}$$

$$u(x,t) = F_1(x),\ (x,t) \in \partial\Omega_0 \times [0,T], \tag{6.52}$$

$$u(x,0) = F_2(x),\ x \in \Omega_0, \tag{6.53}$$

$$< u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot) >= \Phi(t), \ \ t \in [0,T], \ \ \Omega_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{6.54}$$

що полягає у визначенні пари функцій (u,g): узагальненого розв'язку u (класичного за часом із значеннями в просторах беселевих потнціалів) та $g \in C[0,T]$. Тут $\beta \in (0,1]$, $A = A(x,D)$ – еліптичний диференціальний оператор другого порядку з нескінченно диференційовними коефіцієнтами,

для якого існує єдина головна функція Гріна прямої задачі, зокрема, $A = \Delta$ (див. теорему 5.12).

Припущення:

(B) $\beta \in (0,1]$, $\theta \in (0,1)$, $1 < p < \frac{1}{1-\beta\theta}$, $s \in \mathbb{R}$,
$F_0 \in H^{s+2\theta,p}(\Omega_0)$, $F_1 \in C\big([0,T]; B^{s+2\theta+1-\frac{1}{p},p}(\Omega_1)\big)$, $F_2 \in H^{s+2,p}(\Omega_0)$;

(C) $\Phi, D^\beta\Phi \in C[0,T]$, $\varphi_0 \in L_{p'}(\Omega_0)$, $< F_0, \varphi_0 > \neq 0$.

Вважаємо при $v \in H^{s,p}(\Omega_0)$, $\varphi_0 \in L_{p'}(\Omega_0)$

$$< v, \varphi_0 > = \int_{\Omega_0} \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}_{z\to\xi}[v(z)]\Big]\varphi_0(x)dx.$$

Тоді умова (6.54) набуває вигдялу

$$\int_{\Omega_0} \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}_{z\to\xi}[u(z,t)]\Big]\varphi_0(x)dx = \Phi(t),\ t \in [0,T]. \tag{6.55}$$

Означення 6.5. Пара $(u,g) \in C_{2,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\Omega_0)\big) \times C[0,T]$, що задовольняє рівняння (6.51) і умови (6.52), (6.53), (6.55), називається розв'язком задачі (6.51)–(6.54).

Із (6.53) та (6.55) випливає необхідна умова узгодження даних задачі

$$< F_2, \varphi_0 > = \Phi(0). \tag{6.56}$$

Як при доведенні теорем 5.14 та 5.9 за припущень (B) та $g \in C[0,T]$ встановлюємо існування та єдиність розв'язку $u \in C_{2,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\Omega_0)\big)$ прямої задачі (6.51)–(6.53). Він визначений формулою

$$u(x,t) = \Big(g(\tau)F_0(y)\Big)\, o\, G_0(x,t,y,\tau) + v_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_0, \tag{6.57}$$

де

$$v_0(x,t) = F_1(y,\tau)\, o\, G_1(x,t,y,\tau) + F_2(y)\, o\, G_2(x,t,y,\tau),\ (x,t) \in Q_0, \tag{6.58}$$

та правильна оцінка

$$\|u\|_{C_{2,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\Omega_0)\big)} \le b_0\|g\|_{C[0,T]}\|F_0\|_{H^{s+2\theta,p}(\Omega_0)}$$

$$+b_1\|F_1\|_{C\left([0,T];B^{s+2\theta+1-\frac{1}{p},p}(\Omega_1)\right)}+b_2\|F_2\|_{H^{s+2,p}(\Omega_0)} \tag{6.59}$$

з додатними сталими b_0, b_1, b_2.

З рівняння (6.51) та умови (6.54)

$$D^\beta\Phi(t)- < (Au)(\cdot,t),\varphi_0(\cdot) >= g(t) < F_0,\varphi_0 > .$$

Нехай

$$r_u(t) =< (Au)(\cdot,t),\varphi_0(\cdot) > .$$

Тоді, враховуючи припущення (C), знаходимо функцію

$$g_u(t)=\frac{D^\beta\Phi(t)-r_u(t)}{< F_0,\varphi_0 >},\ \ t\in[0,T]. \tag{6.60}$$

Лема 6.6. *За припущення (C) для всіх* $s\in\mathbb{R}$, $u\in C\big([0,T];H^{s+2,p}(\Omega_0)\big)$ *визначена формулою (6.60) функція* g_u *належить до* $C[0,T]$ *і*

$$|g_u(t)|\le\frac{C_2\big\|u\big\|_{C\left([0,T];H^{s+2,p}(\Omega_0)\right)}+C_3}{|< F_0,\varphi_0 >|},\quad t\in[0,T],$$

де $C_2=C_2(\varphi_0)=const>0$, $C_3=\|D^\beta\Phi\|_{C[0,T]}$.

Доведення. Як при доведенні теорем 5.14 та 5.9, для всіх $t\in[0,T]$, $v\in C\big([0,T];H^{s+2,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ таких, що $v(x,t)=u(x,t)$ при $x\in\Omega_0$, $s\ge-2$ знаходимо

$$\begin{aligned}&|< (Av)(\cdot,t),\varphi_0(\cdot) >|\\&\quad\le c_3\big\|\mathcal{F}^{-1}\big[|\xi|^2(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[v]\big]\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\big\|\varphi_0\big\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}\\&\quad\le C_2\big\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2}{2}}\mathcal{F}[v]\big]\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}=C_2\big\|v(\cdot,t)\big\|_{H^{s+2,p}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

і таку ж оцінку матимемо при $s<-2$, а тоді для всіх $t\in[0,T]$, $u\in C\big([0,T];H^{s+2,p}(\Omega_0)\big)$ одержуємо

$$|r_u(t)|=|< (Au)(\cdot,t),\varphi_0(\cdot) >|\le C_2\big\|u\big\|_{C\left([0,T];H^{s+2,p}(\Omega_0)\right)}.\ \ \square$$

Теорема 6.11. *За припущень (B), (C) і (6.56) існує єдиний розв'язок* $(u,g)\in C_{2,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\Omega_0)\big)\times C[0,T]$ *задачі (6.65)–(6.67): u визначено формулами (6.57), (6.58),*

$$g(t)=\frac{D^\beta\Phi(t)-r(t)}{< F_0,\varphi_0 >},\ \ t\in[0,T], \tag{6.61}$$

де $r(t)$ *– розв'язок рівняння*

$$r(t) + \int_0^t K(t,\tau) r(\tau) d\tau = R(t), \quad t \in [0,T] \tag{6.62}$$

з інтегровним ядром

$$K(t,\tau) = \frac{< A(x,D)\big(F_0(\cdot)\, o\, G_0(x,t,\cdot,\tau)\big), \varphi_0(x) >}{< F_0, \varphi_0 >},$$

$$R(t) =< (Av_0)(\cdot,t), \varphi_0(\cdot) > + \int_0^t K(t,\tau) D^\beta F(\tau) d\tau, \quad t \in [0,T].$$

Доведення. Підставляючи $g_u(t)$, визначену формулою (6.60) та неперервною за лемою 6.6, у (6.57) замість $g(t)$, одержуємо

$$u(x,t) = v_0(x,t) - \tfrac{1}{<F_0,\varphi_0>}\Big(r_u(\tau) F_0(y)\Big)\, o\, G_0(x,t,y,\tau)$$
$$+ \tfrac{1}{<F_0,\varphi_0>}\Big(D^\beta \Phi(\tau) F_0(y)\Big)\, o\, G_0(x,t,y,\tau), \quad (x,t) \in Q_0.$$

Тоді

$$< (Au)(x,t), \varphi_0(x) >=< (Av_0)(x,t), \varphi_0(x) >$$
$$+ \int_0^t < A(x,D)\big(F_0(\cdot)\, o\, G_0(x,t,\cdot,\tau)\big), \varphi_0(x) > \frac{\big[D^\beta \Phi(\tau) - r_u(\tau)\big]}{< F_0, \varphi_0 >} d\tau,$$

тобто

$$r_u(t) = -\int_0^t K(t,\tau) r_u(\tau) d\tau + R(t), \ t \in [0,T].$$

Одержали лінійне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду (6.62) відносно невідомої $r(t) = r_u(t)$. Враховуючи теорему 5.14 і лему 6.6, одержуємо, що $R \in C[0,T]$ і ядро $K(t,\tau)$ інтегровне. Тому існує єдиний неперервний розв'язок $r(t)$ цього рівняння. Маючи $r(t)$, знаходимо $g \in C[0,T]$ за формулою (6.61) та $u \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\Omega_0)\big)$ за формулами (6.57), (6.58).

Якщо (u_1, g_1), (u_2, g_2) – два розв'язки задачі (6.51)–(6.54), то при $u = u_1 - u_2$, $g = g_1 - g_2$ маємо задачу

$$L^{reg} u(x,t) = g(t) F_0(x), \quad (x,t) \in Q_T,$$

$$u(x,0)=0, \quad x\in\mathbb{R},$$

$$< u(\cdot,t),\varphi_0(\cdot) >= 0, \quad t\in[0,T].$$

Як вище, знаходимо

$$g(t)=-\frac{r(t)}{< F_0,\varphi_0 >}, \quad t\in[0,T], \tag{6.63}$$

$$u(x,t)=-\frac{1}{< F_0,\varphi_0 >}\int\limits_0^t F_0(\cdot)\, o\, G_0(x,t,\cdot,\tau)r(\tau)d\tau, \tag{6.64}$$

де $r(t)$ – розв'язок лінійного інтегрального рівняння Вольтерри другого роду

$$r(t)=-\int\limits_0^t K(t,\tau)r(\tau)d\tau, \quad t\in[0,T].$$

За єдиністю розв'язку цього рівняння $r(t)=0$, $t\in[0,T]$. Тоді $g(t)=0$, $t\in[0,T]$ (за (6.63)) та $u=0$ on Q_0 (згідно з (6.64)). □

6.5 Обернені задачі Коші у просторах беселевих потенціалів

6.5.1 Задача про відновлення правої частини рівняння

Припущення (LK2): $\beta\in(0,1]$, $a,b,c\in C^\infty(\bar{Q}_T)$, $\inf\limits_{(x,t)\in\bar{Q}_T} a(x,t)=a_0>0$.

У цьому пункті вважаємо $Q_T=\mathbb{R}\times(0,T]$,

$$(Av)(x,t)\equiv a(x,t)v_{xx}(x,t)+b(x,t)v_x(x,t)+c(x,t)v(x,t), \quad (x,t)\in Q_T,$$

вираз $\hat{A}v$ формально спряжений до Av,

$$(\hat{L}v)(x,t)\equiv f_{-\beta}(t)\hat{*}v(x,t)-(\hat{A}v)(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \quad v\in D_S(\bar{Q}_T),$$

$$(Lv)(x,t)\equiv f_{-\beta}(t)*v(x,t)-(Av)(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \quad v\in D'(\bar{Q}_T),$$

$$(L^{reg}v)(x,t)\equiv D_t^\beta v(x,t)-(Av)(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \quad v\in C^{2,\beta}(Q_T),$$

$$X_S(\bar{Q}_T)=\{\varphi\in D(\bar{Q}_T):\hat{L}\varphi\in D_S(\bar{Q}_T)\},$$

непорожній за припущень (LK) та $X_S'(\bar{Q}_T)$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $X_S(\bar{Q}_T)$, позначаємо через (f,φ) значення $f\in X_S'(\bar{Q}_T)$ на $\varphi\in X_S(\bar{Q}_T)$ також.

У розділі 5 була вивчена задача Коші в $D'_S(\bar{Q}_T)$ та деяких його підпросторах.

Вивчаємо обернену задачу Коші

$$Lu(x,t) = g(t)F_0(x), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{6.65}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.66}$$

$$\big(u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot)\big) = F(t), \quad t \in [0,T] \tag{6.67}$$

при заданих $F \in C[0,T]$, F_0, u_0 із просторів узагальнених функцій Шварца та основній функції φ_0.

Припущення (LS2): $F_0 \in X'_S(\bar{Q}_T)$, $u_0 \in S'(\mathbb{R})$, $F, F^{(\beta)} \in C[0,T]$, $\varphi_0 \in S(\mathbb{R})$, $(F_0, \varphi_0) \neq 0$.

Нехай $\quad D'_{S,C}(\bar{Q}_T) = D'_S(Q_T) \cap C[0,T]$.

Означення 6.6. Пара $\quad (u,g) \in D'_{S,C}(\bar{Q}_T) \quad$ називається розв'язком оберненої задачі (6.65)–(6.67), якщо вона задовольняє тотожність (5.32) (із $F_0(x)g(t)$ замість $F_0(x,t)$), тобто

$$(u(x,t), (\hat{L}\psi)(x,t)) = (F_0, \psi) + (u_0(x), \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt) \ \forall \psi \in X_S(\bar{Q}_T),$$

та умову (6.67).

Із (6.66) і (6.67) одержуємо необхідну умову узгодження даних

$$(u_0, \varphi_0) = F(0). \tag{6.68}$$

Повторюючи доведення теореми 5.7, показуємо, що єдиний розв'язок $u \in D'_{S,C}(\bar{Q}_T)$ задачі Коші (6.65), (6.66) має вигляд

$$u(x,t) = \int\limits_0^t g(\tau)\big(F(\cdot)\, o\, G_0(x,t,\cdot,\tau)\big)d\tau \tag{6.69}$$

$$+u_0(\cdot)\, o\, G_1(x,t,\cdot,0), \ (x,t) \in Q_T,$$

де $\quad \big(F_0(\cdot)\, o\, G_0(x,t,\cdot,\tau), \varphi(x)\big) = \big(F_0(\cdot), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)$, відповідно

$$\big(u_0(\cdot)\, o\, G_1(x,t,\cdot,0), \varphi(x)\big) = \big(u_0(\cdot), (\widehat{G}_1\varphi)(\cdot,t,0)\big) \ \ \forall \varphi \in S(\mathbb{R}).$$

Теорема 6.12. *За припущень (LK2), (LS2) і (6.68) існує єдиний розв'язок* $(u,g) \in D'_{S,C}(\bar{Q}_T) \times C[0,T]$ *задачі (6.65)–(6.67): u визначена формулою (6.69),*

$$g(t) = \frac{F^{(\beta)}(t) - r(t)}{(F_0, \varphi_0)}, \quad t \in [0,T], \tag{6.70}$$

де $r(t)$ *– розв'язок рівняння*

$$r(t) + \int\limits_0^t K(t,\tau) r(\tau) d\tau = R(t), \quad t \in [0,T] \tag{6.71}$$

з інтегровним ядром

$$K(t,\tau) = \frac{\big(F_0(y), (\widehat{G}_0 \hat{A}\varphi_0)(y,t,\tau)\big)}{(F_0, \varphi_0)},$$

$$R(t) = \big(u_0(y), (\widehat{G}_1 \hat{A}\varphi_0)(y,t,0)\big) + \int\limits_0^t K(t,\tau) F^{(\beta)}(\tau) d\tau, \quad (x,t) \in Q_T.$$

Доведення. Згідно з (6.65) і (6.67),

$$F^{(\beta)}(t) - \big(u(\cdot,t), (\hat{A}\varphi_0)(\cdot)\big) = g(t)(F_0, \varphi_0).$$

Тоді за умови (LS2) визначена неперервна $g(t)$, якщо відома неперервна функція $\big(u(\cdot,t), (\hat{A}\varphi_0)(\cdot,t)\big)$. Позначимо

$$r_u(t) = \big(u(\cdot,t), (\hat{A}\varphi_0)(\cdot,t)\big), \quad g_u(t) = \frac{F^{(\beta)}(t) - r_u(t)}{(F_0, \varphi_0)}, \quad t \in [0,T]. \tag{6.72}$$

Підставляючи функцію $g_u(t)$ в (6.69) замість $g(t)$, знаходимо

$$u(x,t) = \frac{\int\limits_0^t \big[F^{(\beta)}(\tau) - r_u(\tau)\big] F_0(\cdot)\, o\, G_0(x,t,\cdot,\tau) d\tau}{(F_0, \varphi_0)} + v_0(x,t),$$

тобто

$$u(x,t) = -\frac{1}{(F_0, \varphi_0)} \int\limits_0^t r_u(\tau) F_0(\cdot)\, o\, G_0(x,t,\cdot,\tau) d\tau +$$

$$+ v_0(x,t) + \frac{1}{(F_0, \varphi_0)} \int\limits_0^t F^{(\beta)}(\tau) F_0(\cdot)\, o\, G_0(x,t,\cdot,\tau) d\tau, \quad (x,t) \in Q_T,$$

де

$$v_0(x,t) = u_0(\cdot)\, o\, G_1(x,t,\cdot,0), \quad (x,t) \in Q_T.$$

Тоді

$$\Big(u(x,t), (\hat{A}\varphi_0)(x,t)\Big) = -\frac{1}{(F_0,\varphi_0)} \int\limits_0^t r_u(\tau)\Big(F_0(y), (\widehat{G}_0\hat{A}\varphi_0)(y,t,\tau)\Big)d\tau$$

$$+(v_0(x,t), (\hat{A}\varphi_0)(x,t))$$

$$+\frac{1}{(F_0,\varphi_0)} \int\limits_0^t F^{(\beta)}(\tau)\Big(F_0(y), (\widehat{G}_0\hat{A}\varphi_0)(y,t,\tau)\Big)d\tau, \;\; t \in [0,T],$$

тобто

$$r_u(t) = -\int\limits_0^t K(t,\tau) r_u(\tau) d\tau + R(t), \quad t \in [0,T].$$

Для невідомої $r(t) = r_u(t)$ ми одержали інтегральне рівняння Вольтерри другого роду (6.71). Як у теоремі 6.11 одержуємо, що $R \in C[0,T]$ та ядро $K(t,\tau)$ інтегровне. Тому існує єдиний неперервний розв'язок $r(t)$ цього рівняння. Маючи $r(t)$, знаходимо неперервну $g(t)$ за формулою (6.70), $u(x,t)$ – згідно з (6.69).

Якщо (u_1, g_1), (u_2, g_2) – два розв'язки задачі (6.65)–(6.67), то при $u = u_1 - u_2$, $g = g_1 - g_2$ одержуємо задачу

$$Lu(x,t) = g(t)F_0(x), \quad (x,t) \in Q_T,$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\big(u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot)\big) = 0, \quad t \in [0,T].$$

Як вище, знаходимо

$$g(t) = -\frac{r(t)}{(F_0,\varphi_0)}, \;\; t \in [0,T], \tag{6.73}$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{(F_0,\varphi_0)} \int\limits_0^t r(\tau) F_0(y)\, o\, G_0(x,t,y,\tau) d\tau, \tag{6.74}$$

де $r(t)$ – розв'язок інтегрального рівняння Вольтерри другого роду

$$r(t) = -\int_0^t K(t,\tau)r(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T].$$

За єдиністю розв'язку цього рівняння $r(t) = 0$, $t \in [0,T]$. Тоді $g(t) = 0$, $t \in [0,T]$ (згідно з (6.73)) та $u(x,t) = 0$, $(x,t) \in Q_T$ (згідно з (6.74)).

6.5.2 Задача про знаходження молодшого коефіцієнта

Розглядаємо задачу

$$L^{reg}u \equiv D_t^\beta u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u - b(t)u = F_0(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T], \tag{6.75}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in R^n, \tag{6.76}$$

$$< u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot) >= F(t), \quad t \in [0,T], \tag{6.77}$$

яка полягає у знаходженні пари функцій

$$(u,b) \in \mathcal{M} := C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big) \times C[0,T],$$

що задовольняє задачу Коші (6.75), (6.76) та умову перевизначення (6.77) при заданих $\varphi_0 \in L_q(\mathbb{R}^n)$ ($\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$), $F \in C[0,T]$ і F_0, u_0 із просторів беселевих потенціалів. Необхідна умова узгодження даних

$$< u_0, \varphi_0 >= F(0). \tag{6.78}$$

Припущення:

(F0) $\quad 0 < \theta < 1$, $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \frac{1}{1-\beta\theta}$,

$\quad F_0 \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)\big)$, $u_0 \in H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$;

(F) $\quad F, D^\beta F \in C[0,T]$, $|F(t)| \geq f = const > 0$, $t \in [0,T]$, $\varphi_0 \in L_q(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 6.13. *За припущень* $(L_{\alpha,\beta})$, *(F0), (F) та* (6.78) *існує* $T^* \in (0,T]$ *(відповідно* $Q_{T^*} = \mathbb{R}^n \times (0,T^*]$ *) і розв'язок* $(u,b) \in \mathcal{M}(Q_{T^*})$ *задачі (6.75)–(6.77): функція* u *є розв'язком рівняння*

$$u(x,t) = h_u(t)u(x,t)*G_0(x,t)+F_0(x,t)*G_0(x,t)+u_0(x)*G_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{6.79}$$

$$b(t)=h_u(t)=[F(t)]^{-1}\big[D^\beta F(t)+a^2\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{F}^{-1}\big[|\xi|^\alpha(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[u]\big]\big)(x,t)\varphi_0(x)dx-$$

$$-<F_0(\cdot,t),\varphi_0(\cdot)>\big],\ t\in[0,T^*]. \tag{6.80}$$

Враховуючи теорему 5.9, одержуємо, що розв'язок $u\in C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ задачі (6.75)–(6.77) задовольняє рівняння

$$u(x,t)=\big(b(t)u(x,t)\big)*G_0(x,t)+F_0(x,t)*G_0(x,t)+u_0(x)*G_1(x,t),\quad (x,t)\in Q_T. \tag{6.81}$$

Для доведення теореми 6.13 використовуємо лему 5.7 та наступні леми.

Лема 6.7. *Якщо* $s\in\mathbb{R}$, $1<p<\frac{1}{1-\beta}$, $u\in C\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$, $b\in C[0,T]$, *то* $(bu)*G_0\in C\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *та правильна оцінка*

$$\big\|\big((bu)*G_0\big)(\cdot,t)\big\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\le C_1t^\beta\big\|b\big\|_{C[0,T]}\cdot\big\|u\big\|_{C\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)},\quad t\in[0,T]. \tag{6.82}$$

Тут і далі c_i,C_i $(i=1,2,\dots)$ – додатні сталі.

Доведення. Було встановлено [48], що

$$\mathcal{F}[G_1](\xi,t)=E_{\beta,1}\left(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta\right),\qquad \mathcal{F}[G_0](\xi,t)=t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-a^2|\xi|^\alpha t^\beta\right).$$

За означенням норми

$$\big\|\big((bu)*G_0\big)(\cdot,t)\big\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}=$$

$$=\Big[\int_{\mathbb{R}^n}\big|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}\big[\int_0^t b(\tau)\big(u(\cdot,\tau)*G_0(\cdot,t-\tau)\big)d\tau\big]\big]\big|^p dx\Big]^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}dx\int_0^t\left|b(\tau)\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[u(\cdot,\tau)*G_0(\cdot,t-\tau)]\right]\right|^p d\tau\right\}^{1/p}\le$$

$$\le t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^t|b(\tau)|^p d\tau\int_{\mathbb{R}^n}\big|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}\big[u(\cdot,\tau)*G_0(\cdot,t-\tau)\big]\big]\big|^p dx\right\}^{1/p}$$

і для всіх $0\le\tau<t\le T$

$$g(\cdot,t,\tau)=\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[u(\cdot,\tau)*G_0(\cdot,t-\tau)]\right]=$$

$$=\mathcal{F}^{-1}\Big[\mathcal{F}[G_0](\xi,t-\tau)\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[u](\xi,\tau)\Big]=$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[G_0](\xi,t-\tau)\mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[u](\xi,\tau)]\big]\right].$$

За умовою леми $\mathcal{F}^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[u](\xi,\tau)\right] \in L_p(\mathbb{R}^n)$ при $\tau < t$. Тоді, враховуючи лему 5.4, одержуємо

$$\big\|g(\cdot,t,\tau)\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c_1(t-\tau)^{\beta-1}\,\big\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[u](\xi,\tau)\big]\,\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Із попередніх перетворень

$$\big\|\big((bu)*G_0\big)(\cdot,t)\big\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^t |b(\tau)|^p d\tau \int_{\mathbb{R}^n}\big|g(x,t,\tau)\big|^p\,dx\right\}^{1/p} \le$$

$$\le c_1 t^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^t |b(\tau)|^p(t-\tau)^{p(\beta-1)}\,\big\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[u](\xi,\tau)\big]\,\big\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}\,d\tau\right\}^{1/p},$$

та при $p < \frac{1}{1-\beta}$ (умові існування інтегралу $\int_0^t (t-\tau)^{p(\beta-1)}\,d\tau$), для всіх $t \in [0,T]$, $s \in \mathbb{R}$ згортка $\int_0^t b(\tau)u(\cdot,\tau)*G_0(\cdot,t-\tau)\,d\tau$ існує в $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ та

$$\left\|\int_0^t b(\tau)u(\cdot,\tau)*G_0(\cdot,t-\tau)\,d\tau\right\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le c_1 t^{1-\frac{1}{p}}\left[\int_0^t (t-\tau)^{p(\beta-1)}\,d\tau\right]^{\frac{1}{p}}\big\|b\big\|_{C[0,T]}\cdot\big\|u\big\|_{C\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)} =$$

$$= C_1 t^{\beta}\big\|b\big\|_{C[0,T]}\cdot\big\|u\big\|_{C\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)}.$$

Отже, $(bu)*G_0 \in C\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та правильна оцінка (6.82). $\square$

Примітка. Якщо $u \in C\big([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$, $b \in C[0,T]$, то насправді $(bu)*G_0 \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$. Доведення цього факту таке саме, як доведення відповідного твердження у теоремі 5.9.

Із рівняння (6.75) та умови (6.77) одержуємо

$$D^{\beta}F(t) + a^2 < (-\Delta)^{\alpha/2}u(\cdot,t),\varphi_0(\cdot) > -b(t)F(t) =< F_0(\cdot,t),\varphi_0(\cdot) > .$$

Тоді із рівності

$$\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}u]\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s}{2}}|\xi|^{\alpha}\mathcal{F}[u]\right]$$

та умови (F) одержуємо вираз (6.80) для визначення $b(t)$ за відомою u.

Лема 6.8. *За припущень (F0), (F) для кожної* $u \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *визначена формулою (6.80) функція* $b(t)$ *є неперервною на* $[0,T]$ *та задовольняє оцінку*

$$|b(t)| \le \frac{C_2\big\|u\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + C_3}{f}, \quad t \in [0,T],$$

де $C_2 = C_2(\varphi_0) = const > 0$, $C_3 = \|D^\beta F - < F_0(x,\cdot), \varphi_0(x) > \|_{C[0,T]}$.

Доведення. Оскільки

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s}{2}}|\xi|^\alpha \mathcal{F}[u]\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{|\xi|^\alpha}{\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{\alpha}{2}}}\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u]\right],$$

$\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u]\big] \in L_p(\mathbb{R}^n)$ для всіх $t \in [0,T]$, функція $\frac{|\xi|^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$ є мультиплікатором у $L_p(\mathbb{R}^n)$, то для всіх $t \in [0,T]$

$$\big\|\mathcal{F}^{-1}\big[|\xi|^\alpha(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[u]\big]\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c_2\left\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\alpha}{2}}\mathcal{F}[u]\big]\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Встановили твердження леми при $C_2 = a^2 c_2 \|\varphi_0\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}$.

Враховуючи теорему 5.9, одержуємо, що за припущення (F0) функція

$$v_0(x,t) = F_0(x,t) * G_0(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_T,$$

належить до $C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big) \subset C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ та

$$\big\|v_0(\cdot,t)\big\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \le \big\|v_0\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le$$

$$c_3\big\|F_0\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + c_4\big\|u_0\big\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} := K_0 \quad \forall t \in [0,T]$$

із деякими додатними сталими c_3, c_4. $\square$

Наступну лему одержуємо, підставляючи (6.80) у рівняння (6.79), застосовуючи леми 5.4, 6.7, 6.8, вищенаведені примітку та властивість функції v_0.

Лема 6.9. *За припущень* $(L_{\alpha,\beta})$, *(F0), (F) і (6.78) пара функцій* $(u,b) \in \mathcal{M}$ *є розв'язком задачі (6.75)–(6.77) тоді і тільки тоді, коли* $u \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ *задовольняє рівняння (6.79),* $b(t)$ *визначена формулою (6.80).*

Доведення теореми 6.13. Враховуючи лему 6.9, достатньо довести розв'язність рівняння (6.79) у класі $C\big([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$. При $R = const > 0$ визначаємо

$$M_R = M_R(Q_T) = \{v \in C\big([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big) \mid \|v\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le R\}$$

та оператор P на M_R:

$$(Pv)(x,t) = h_v(t)v(x,t) * G_0(x,t) + v_0(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q_T, \quad v \in M_R.$$

Тоді рівняння (6.79) набуває вигляду

$$u = Pu, \qquad u \in M_R.$$

Використаємо теорему Банаха. Спочатку покажемо існування $t^* \in (0,T]$ (і відповідно, $Q^* = \mathbb{R}^n \times (0,t^*]$, $M_R^* = M_R(Q^*)$), таких що $P : M_R^* \to M_R^*$.

На підставі лем 6.7 і 6.8 $h_v v \in C\big([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$, $(h_v v) * G_0 \in C\big([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$. Крім того, при $t \in [0,T]$

$$\|h_v(t)v(\cdot,t)\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le \|h_v v\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le C_1 t^\beta \big\|h_v\big\|_{C[0,T]} \cdot \big\|v\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le$$

$$\le \frac{C_1 t^\beta}{f}\big[C_2\big\|v\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + C_3\big] \cdot \big\|v\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)}.$$

Значить, для всіх $t \in [0,T]$, $v \in M_R$

$$\|(Pv)(\cdot,t)\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \le C_1 t^\beta \big\|h_v\big\|_{C[0,T]} \cdot \big\|v\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + \|v_0(\cdot,t)\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le \frac{C_1 t^\beta}{f}\big[C_2 R + C_3\big] \cdot R + K_0.$$

Для доведення виконання нерівності

$$\max\{d_0 t^\beta R^2 + K_0, 1\} \le R \quad \forall t \in [0,t^*]$$

при деякому $t^* > 0$, $R \ge \max\{1, K_0\}$ і $d_0 = \frac{C_1(C_2+C_3)}{f}$ розглянемо функцію

$$f(s) = d_0 t^\beta s^2 - s, \quad s \ge 0.$$

Оскільки $f'(s) = 2d_0t^\beta s - 1$ і $s_0 = s_0(t) = [2d_0t^\beta]^{-1}$ є точкою мінімуму функції $f(s)$, то нерівність $\|Pv\|_{C\left([0,t^*];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \le R$ для всіх $v \in M_R^*$ виконується при $R = s_0 \ge \max\{1, K_0\}$, $t \in [0, t^*]$, якщо $f(s_0) \le -K_0$ і $[2d_0t^\beta]^{-1} \ge \max\{1, K_0\}$ для всіх $t \in [0, t^*]$, тобто якщо $4d_0K_0t^\beta \le 1$ і $2\max\{1, K_0\}d_0t^\beta \le 1$ для всіх $t \in [0, t^*]$. Знаходимо $t^* = \min\{\left[4d_0K_0\right]^{-1/\beta}, \left[2d_0\max\{1, K_0\}\right]^{-1/\beta}\}$ і $T^* = \min\{t^*, T\}$. Згідно з (6.78) і (F) маємо $K_0 > 0$. Існування числа $R = s_0(t^*) \ge \max\{1, K_0\}$ такого, що $P : M_R^* \to M_R^*$, встановлено.

Із лем 6.7 і 6.8 випливає, що при всіх $t \in [0, t^*]$, $v_1, v_2 \in M_R$

$$\|(Pv_1)(\cdot,t) - (Pv_2)(\cdot,t)\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \|[h_{v_1}(t)v_1(x,t) - h_{v_2}(t)v_2(x,t)] * G_0(x,t)\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \left\| \left[h_{v_1}(t)\big(v_1(x,t) - v_2(x,t)\big) + \big(h_{v_1}(t) - h_{v_2}(t)\big)v_2(x,t)\right] * G_0(x,t)\right\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le C_1t^\beta\Big[\left\|h_{v_1}\right\|_{C[0,T^*]} \cdot \left\|v_1 - v_2\right\|_{C\left([0,T^*];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} +$$

$$+\left\|h_{v_1} - h_{v_2}\right\|_{C[0,T^*]} \cdot \left\|v_2\right\|_{C\left([0,T^*];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)}\Big] \le$$

$$\le C_1t^\beta\Big[\frac{C_2\left\|v_1\right\|_{C\left([0,T^*];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + C_3}{f} \cdot \left\|v_1 - v_2\right\|_{C\left([0,T^*];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} +$$

$$+\frac{C_2\left\|v_1 - v_2\right\|_{C\left([0,T^*];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)}}{f} \cdot \left\|v_2\right\|_{C\left([0,T^*];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)}\Big] \le$$

$$\le \frac{C_1t^\beta(2C_2R + C_3)}{f}\left\|v_1 - v_2\right\|_{C\left([0,T^*];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)}.$$

Умова

$$\frac{C_1t^\beta(2C_2R + C_3)}{f} < 1 \quad \forall t \in (0, T^*] \tag{6.83}$$

виконується із $R = s_0(t^*) = \frac{1}{2d_0\max\{1,K_0\}t^{*\beta}} = \frac{f}{2C_1(C_2+C_3)\max\{1,K_0\}t^{*\beta}}$. Справді, при таких значеннях t

$$\frac{C_1t^\beta(2C_2R+C_3)}{f} \le \frac{C_2}{\max\{1,K_0\}(C_2+C_3)} + \frac{C_3}{2\max\{1,K_0\}(C_2+C_3)} =$$

$$= \frac{2C_2+C_3}{2\max\{1,K_0\}(C_2+C_3)} < \frac{1}{\max\{1,K_0\}}.$$

Встановили (6.83). Отож, оператор P стисний на $M_R(Q^*)$ і за теоремою Банаха рівняння (6.79) розв'язне в $C\big([0,T^*]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$.

Теорема 6.14. *За припущень* $(L_{\alpha,\beta})$ *та* $F(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$ *розв'язок задачі (6.75)–(6.77) єдиний при довільному скінченному* $T > 0$.

Доведення. Маючи два розв'язки $(u_1, b_1), (u_2, b_2) \in \mathcal{M}(Q_T)$ задачі (6.75)–(6.77) і підставляючи їх у рівняння (6.75), одержуємо

$$D_t^\beta(u_1 - u_2) = a^2(-\Delta)^{\alpha/2}(u_1 - u_2) + (b_1 - b_2)u_1 + b_2(u_1 - u_2),$$

а при $u = u_1 - u_2$, $b = b_1 - b_2$

$$D_t^\beta u = a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u + b_2 u + b u_1.$$

З початкової умови одержуємо

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тоді, як при доведенні теореми 6.13, одержуємо, що функція u задовольняє рівняння

$$u(x,t) = \int\limits_0^t G_0(\cdot, t-\tau) * \Big(b_2(\tau)u(\cdot,\tau) + b(\tau)u_1(\cdot,\tau)\Big)d\tau, \quad (x,t) \in \bar{Q}_0$$

і належить до простору $C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$.

За умовою (6.77)

$$a^2 < (-\Delta)^{\alpha/2}u(\cdot,t), \varphi_0 >= b(t)F(t), \quad t \in [0,T]. \tag{6.84}$$

Тоді $u(x,t)$ задовольняє рівняння

$$u(\cdot,t) = \int\limits_0^t b_2(\tau)\Big(G_0(\cdot,t-\tau) * u(\cdot,\tau)\Big)d\tau +$$

$$+a^2 \int\limits_0^t \frac{G_0(\cdot,t-\tau) * u_1(\cdot,\tau)}{F(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[u]\big]\big)(z,\tau)\varphi_0(z)dz, \ (\cdot,t) \in \bar{Q}_T.$$

За єдиністю його розв'язку $u(x,t) = 0$, $(x,t) \in Q_0$. Тоді з умови (6.84) випливає $b(t)F(t) = 0$, $t \in [0,T]$. А так як $F(t) \neq 0$ на $[0,T]$ (за припущення теореми), то $b(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$. $\square$

6.6 Обернені задачі з інтегральною за часом умовою перевизначення

Деякі обернені задачі для рівняння дробової дифузії є коректними на відміну від таких задач для звичайного рівняння дифузії (наприклад, задача зі зворотним часом). Огляд деяких результатів по обернених задачах для такого рівняння зроблено у [243], а порівняння з результатами для звичайного рівняння дифузії – у [204]. У деяких працях [153, 203] використовують інтегральну за просторовими змінними умову перевизначення. Її узагальнення були використані в попередніх підрозділах.

У цьому підрозділі встановлюємо існування, єдиність та неперервну залежність від даних розв'язку оберненої крайової задачі на відновлення або початкових даних, або залежної від просторової змінної правої частини у рівнянні дробової дифузії при інтегральній за часом умові перевизначення.

Зауважимо, що прямі задачі з інтегральною за часовою змінною умовою для рівнянь із частинними похідними вивчались, зокрема, у [51, 122-124], а обернені задачі на визначення залежної тільки від просторової змінної компоненти правої частини в одновимірному рівнянні дробової дифузії при інших крайових даних чи умові перевизначення – у [153, 175, 243, 282].

6.6.1 Задача на відновлення початкових даних

Нехай $X_k(x) = \sin kx\,,\ k \in \mathbb{N}\,,\quad \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ – простір періодичних узагальнених функцій, тобто, таких $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, що [7, с. 120]

$$v(x + 2\pi) = v(x) = -v(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Формальний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k X_k(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{6.85}$$

називається [7, с. 123] рядом Фур'є узагальненої функції $v \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$, а числа

$$v_k = \frac{2}{\pi}(v, X_k)_{2\pi} = \frac{2}{\pi}(v, hX_k)$$

– її коефіцієнтами Фур'є. Тут $h(x)$ – така парна функція з $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, що: $h(x) = 1$ при $x \in (-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, $h(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus (-\pi, \pi)$, $0 \le h(x) \le 1$. Зауважимо, що при $v \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}) \cap L_{1,loc}(\mathbb{R})$

$$v_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(x)X_k(x)dx$$

і тоді ряд (6.85) є класичним рядом Фур'є функції v за системою X_k, $k \in \mathbb{N}$.

Відомо [7, с. 123], що $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, ряд (6.85) для $v \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ збігається в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ до v, а коефіцієнти Фур'є (визначені однозначно) мають оцінки

$$|v_k| \le C_0(m)C(v,m)(1+k)^m \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

де m – певне число із $\mathcal{Z}_+$, $C_0(m)$, $C(v,m)$ – додатні сталі, одні й ті ж для всіх $k \in \mathbb{N}$. Число m називається порядком узагальненої функції v, при цьому $C(v,m) = \Big(\int_{\mathbb{R}}(1+x^2)^{-m/2}|v(x)|dx\Big)^{1/2}$. Зауважимо, що порядком регулярної періодичної узагальненої функції є недодатне число.

Нехай при $\gamma \in \mathbb{R}$

$$H^{\gamma}(\mathbb{R}) = \{v \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}) : \|v\|_{H^{\gamma}(\mathbb{R})} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |v_k|(1+k)^{\gamma} < +\infty\}$$

(функція з $H^{\gamma}(\mathbb{R})$ має порядок $-\gamma$ в сенсі наведеного вище означення),

$C\big([0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big)$ – простір неперервних за t функцій $v(x,t)$ зі значеннями $v(\cdot,t) \in H^{\gamma}(\mathbb{R})$, $\quad \|v\|_{C\left([0,T];H^{\gamma}(\mathbb{R})\right)} = \max\limits_{t\in[0,T]} \|v(\cdot,t)\|_{H^{\gamma}(\mathbb{R})}$,

$C_{2,\alpha}\big([0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big) = \{v \in C\big([0,T]; H^{2+\gamma}(\mathbb{R})\big) : D^{\alpha}v \in C_b\big((0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big)\}$,

$$\|v\|_{C_{2,\alpha}\left([0,T];H^{\gamma}(\mathbb{R})\right)} = \max\{\|v\|_{C\left([0,T];H^{2+\gamma}(\mathbb{R})\right)}, \|D^{\alpha}v\|_{C_b\left((0,T];H^{\gamma}(\mathbb{R})\right)}\}.$$

Зауважимо, що $H^{\gamma+\varepsilon}(\mathbb{R}) \subset H^{\gamma}(\mathbb{R})$ для всіх $\varepsilon > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Вивчаємо задачу

$$D_t^{\alpha}u - u_{xx} = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T], \tag{6.86}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.87}$$

$$\int\limits_0^{t_0} u(x,t)dt = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t_0 \in (0,T], \tag{6.88}$$

де $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$, F_0, F_2, Φ – задані функції, T – задане додатне число, F_1 – невідома функція. Друга початкова умова відсутня при $\alpha \in (0,1)$.

Припущення:

(**F**) $\gamma \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0,1)$, $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$, $F_0 \in C\big([0,T]; H^{\gamma+2+2\theta}(\mathbb{R})\big)$, $F_2 \in H^{\gamma+2}(\mathbb{R})$ $\quad$ ($F_0 \in C\big([0,T]; H^{\gamma+2}(\mathbb{R})\big)$, $F_2 = 0$ при $\alpha \in (0,1)$);

(**Φ**) $\Phi \in H^{\gamma+4}(\mathbb{R})$ та (у випадку $\alpha \in (1,2)$) $E_{\alpha,2}(-k^2 t_0^\alpha) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Примітка. При $\alpha \in (0,1]$ маємо $E_{\alpha,\mu}(-k^2 t^\alpha) > 0$ для всіх $t > 0$, $\mu \geq \alpha$ [252]. При $\alpha \in (1,2)$ функції $E_{\alpha,1}(-z)$, $E_{\alpha,2}(-z)$ мають скінченну кількість дійсних додатних нулів [252], а тому існує таке $t_0 \in (0,T]$, що $E_{\alpha,2}(-k^2 t_0^\alpha) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Розкладемо функції $F_0(x,t)$, $F_j(x)$, $j \in \{1,2\}$, $\Phi(x)$ у формальні ряди Фур'є за системою $X_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$:

$$F_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{0k}(t) X_k(x), \quad (x,t) \in Q_0,$$

$$F_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{jk} X_k(x), \quad x \in \mathbb{R}, \ \ j = 1,2, \tag{6.89}$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k X_k(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язком задачі (6.86)–(6.88) за припущень (F), (Φ) є пара функцій

$$(u, F_1) \in \mathcal{M}_{\alpha,\gamma} := C_{2,\alpha}\big([0,T]; H^\gamma(\mathbb{R})\big) \times H^{\gamma+2}(\mathbb{R}),$$

заданих рядами

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \quad (x,t) \in Q_0 \tag{6.90}$$

та (6.89) при $j = 1$, і які задовольняють рівняння (6.86) в узагальненому сенсі та умови (6.87), (6.88).

Підставляючи функцію (6.90) в рівняння (6.86) та умови (6.87), (6.88), для знаходження невідомих $u_k(t)$ одержуємо

$$D^\alpha u_k + k^2 u_k = F_{0k}(t), \ t \in (0,T], \quad u_k(0) = F_{1k}, \ u_k'(0) = F_{2k}, \tag{6.91}$$

$$\int_0^{t_0} u_k(t)dt = \Phi_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.92}$$

Використовуючи зв'язок між похідними Рімана-Ліувіля та Капуто-Джрбашяна, записуємо (6.91) у вигляді

$$u_k^{(\alpha)} + k^2 u_k = F_{0k}(t) + f_{1-\alpha}(t)F_{1k} + f_{2-\alpha}(t)F_{2k}, \quad t \in (0,T], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.93}$$

Отож, пари $(u_k(t), F_{1k})$ $(k \in \mathbb{N})$ коефіцієнтів Фур'є розв'язку задачі задовольняють рівняння (6.93) та умови (6.92).

Теорема 6.15. *За припущень* $\gamma \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0,1)$, $F_0 \in C\big([0,T]; H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})\big)$, $F_j \in H^{\gamma+2}(\mathbb{R})$, $j = 1,2$, $\alpha \in (1,2)$, $F_0 \in C\big([0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big)$, $F_1 \in H^{\gamma+2}(\mathbb{R})$, $F_2 = 0$, *якщо* $\alpha \in (0,1]$ *існує єдиний розв'язок* $u \in C_{2,\alpha}\big([0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big)$ *прямої задачі (6.86),(6.87). Він заданий формулою (6.90), де*

$$u_k(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-k^2t^\alpha) * F_{0k}(t) + \tag{6.94}$$

$$+F_{1k}E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha) + F_{2k}tE_{\alpha,2}(-k^2t^\alpha), \quad t \in [0,T], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Розв'язок задачі неперервно залежить від даних (F_0, F_1, F_2) *та правильна нерівність коерцитивності*

$$||u||_{C_{2,\alpha}\left([0,T];H^{\gamma}(\mathbb{R})\right)} \le a_0||F_0||_{C\left([0,T];H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})\right)} + \sum_{j=1}^{2} a_j||F_j||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})}, \tag{6.95}$$

де a_j, $j \in \{0,1,2\}$ *– додатні сталі, що від даних задачі не залежать. У випадку* $\alpha \in (0,1]$ *в нерівності (6.95) вважаємо* $F_2 = 0$ *та* $\theta = 0$.

Доведення. Методом послідовних наближень знаходимо розв'язки (6.94) рівнянь (6.93). Єдиність розв'язку кожного з рівнянь (6.93) випливає з властивостей згортки в $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

Пояснимо належність ряду (6.90) до простору $C_{2,\alpha}\big([0,T]; H^{\gamma}(\mathbb{R})\big)$.

Нехай $\alpha \in (1,2)$, $u_{k0}(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-k^2t^\alpha) * F_{0k}(t)$. Тоді, враховуючи, що $E_{\alpha,\mu}(-x) \le \frac{r_{\alpha,\mu}}{1+x}$ при $\mu \ge \alpha$, $x \ge 0$, де $r_{\alpha,\mu}$ – додатні сталі, одержуємо

$$|u_{k0}(t)| \leq \sup_{t\in(0,T]} |F_{0k}(t)| \int\limits_0^t \tau^{\alpha-1}|E_{\alpha,\alpha}(-k^2\tau^\alpha)|d\tau \leq r_{\alpha,\alpha} \sup_{t\in(0,T]} |F_{0k}(t)| \int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}d\tau}{1+k^2\tau^\alpha}$$

$$= \frac{r_{\alpha,\alpha}}{\alpha k^2} \sup_{t\in(0,T]} |F_{0k}(t)| ln(1+k^2t^\alpha) \leq \frac{r_{\alpha,\alpha}}{\alpha} \sup_{t\in(0,T]} |F_{0k}(t)| t^{s\alpha}k^{2s-2} \quad \forall s>0.$$

При $s=\theta$, використовуючи нерівності

$$k^\gamma \leq c(\gamma)(1+k)^\gamma, \;\; c(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma \geq 0 \\ 2^{-\gamma}, & \gamma < 0 \end{cases},$$

одержуємо

$$(1+k)^{\gamma+2}|u_{k0}(t)| \leq K_0 \sup_{t\in(0,T]} |F_{0k}(t)|(1+k)^{\gamma+2\theta}, \;\; t\in[0,T], \;\; k\in\mathbb{N}.$$

Тут і далі $K_j = K_j(\alpha,\gamma)$, $j\in\{0,1,2\}$ – додатні сталі.

Враховуючи обмеженість $E_{\alpha,j}(-k^2t^\alpha)$, $j=1,2$, одержуємо

$$t^{j-1}|F_{jk}E_{\alpha,j}(-k^2t^\alpha)|(1+k)^{\gamma+2} \leq K_j|F_{jk}|(1+k)^{\gamma+2}, \; t\in[0,T], \; j\in\{1,2\}, \; k\in\mathbb{N}.$$

Отож, функція (6.90) належить $C\big([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\big)$ та з (6.90) і (6.94) випливає оцінка

$$||u||_{C([0,T];H^{\gamma+2}(\mathbb{R})\big)} \leq \hat{a}_0||F_0||_{C\big([0,T];H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})\big)} + \sum_{j=1}^{2} \hat{a}_j||F_j||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})}. \tag{6.96}$$

Тут $\hat{a}_j$, $j\in\{0,1,2\}$ – додатні сталі, що від даних задачі не залежать.

Тепер із рівнянь у (6.91) та (6.94) випливає існування неперервних похідних $D^\alpha u_k(t)$, $t\in(0,T]$ й оцінки

$$|D^\alpha u_k(t)| \leq k^2|u_k(t)| + |F_{0k}(t)|, \;\; k\in\mathbb{N},$$

$$||D^\alpha u||_{C([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\big)} = \max_{t\in[0,T]} \sup_{k\in\mathbb{N}} |D^\alpha u_k(t)|(1+k)^\gamma \leq$$

$$\leq \max_{t\in[0,T]} \Big[\sup_{k\in\mathbb{N}} k^2|u_k(t)|(1+k)^\gamma + \sup_{k\in\mathbb{N}} |F_{0k}(t)|(1+k)^{\gamma+2\theta}(1+k)^{-2\theta}\Big] \leq$$

$$\leq ||u||_{C([0,T];H^{\gamma+2}(\mathbb{R})\big)} + ||F_0||_{C\big([0,T];H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})\big)}.$$

Одержали, що за умов теореми $u\in C_{2,\alpha}\big([0,T];H^\gamma(0,l)\big)$, а із врахуванням (6.96) одержуємо оцінки (6.95).

У випадку $\alpha \in (0,1)$ маємо $E_{\alpha,\mu}(-x) > 0$ при $x > 0$, $\mu \geq \alpha$ та

$$\int\limits_0^T \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-k^2\tau^\alpha)d\tau = \int\limits_0^t \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p k^{2p} \tau^{p\alpha+\alpha-1} d\tau}{\Gamma(p\alpha+\alpha)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p k^{2p} \tau^{p\alpha+\alpha}}{\Gamma(p\alpha+\alpha+1)} = E_{\alpha,\alpha+1}(-k^2\tau^\alpha).$$

Тоді $|u_{k0}(t)| \leq K_0 \sup\limits_{t\in(0,T]} |F_{0k}(t)|$ та

$$(1+k)^{\gamma+2}|u_{k0}(t)| \leq K_0 \sup_{t\in(0,T]} |F_{0k}(t)|(1+k)^{\gamma+2}, \quad t \in [0,T], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Єдиність та неперервна залежність від даних розв'язку задачі випливає з оцінки (6.95).

Теорема 6.16. *За припущень (F) і (Φ) існує єдиний розв'язок $(u, F_1) \in \mathcal{M}_{\alpha,\gamma}$ оберненої задачі (6.86) – (6.88). Він заданий рядами Фур'є (6.90) та (6.89) при $j = 1$, де $u_k(t)$ визначені формулами (6.94),*

$$F_{1k} = \frac{\Phi_k - \int\limits_0^{t_0} \left[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-k^2t^\alpha) * F_{0k}(t) + F_{2k} t E_{\alpha,2}(-k^2t^\alpha)\right] dt}{\int\limits_0^{t_0} E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)dt}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.97}$$

Розв'язок неперервно залежнить від даних (F_0, F_2, Φ) та правильна нерівність коерцитивності

$$||u||_{C_{2,\alpha}\left([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\right)} + ||F_1||_{H^\gamma(\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq b_0||F_0||_{C\left([0,T];H^{\gamma+2+2\theta}(\mathbb{R})\right)} + b_1||\Phi||_{H^{\gamma+4}(\mathbb{R})} + b_2||F_2||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})}, \tag{6.98}$$

де b_j, $j \in \{0,1,2\}$ – додатні сталі, що від даних задачі не залежать. У випадку $\alpha \in (0,1)$ в нерівності (6.98) вважаємо $F_2 = 0$ та $\theta = 0$.

Доведення. На підставі теореми 6.15 та формул (6.94) записуємо умови (6.92) як

$$\int\limits_0^{t_0} \left[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-k^2t^\alpha) * F_{0k}(t) + F_{1k} E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha) + F_{2k} t E_{\alpha,2}(-k^2t^\alpha)\right] dt = \Phi_k.$$

Отож, для знаходження невідомих F_{1k} маємо

$$F_{1k}\int\limits_0^{t_0} E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)dt = \tag{6.99}$$

$$= \Phi_k - \int\limits_0^{t_0}\left[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-k^2t^\alpha) * F_{0k}(t) + F_{2k}tE_{\alpha,2}(-k^2t^\alpha)\right]dt, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Зауважимо, що

$$\int\limits_0^{t_0} E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)dt = \frac{1}{\alpha k^{2/\alpha}}\int\limits_0^{k^2{t_0}^\alpha} E_{\alpha,1}(-z)z^{\frac{1}{\alpha}-1}dz =$$

$$= \frac{1}{\alpha k^{2/\alpha}}\int\limits_0^{k^2{t_0}^\alpha}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p z^{p+\frac{1}{\alpha}-1}dz}{\Gamma(p\alpha+1)} = \frac{1}{k^{2/\alpha}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p z^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma(p\alpha+1)(p\alpha+1)}\Big|_{z=k^2{t_0}^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{k^{2/\alpha}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(k^2{t_0}^\alpha)^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma(p\alpha+2)} = t_0E_{\alpha,2}(-k^2{t_0}^\alpha), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Згідно з припущенням (Φ), із (6.99) знаходимо випази (6.97) для невідомих коефіцієнтів F_{1k}, $k\in\mathbb{N}$ розвинення функції $F_1(x)$ в ряд Фур'є.

Пояснимо належність одержаного розв'язку до $\mathcal{M}_{\alpha,\gamma}$. При $F_0 \in C\big([0,T];H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})\big)$ у доведенні теореми 6.15 одержали оцінки

$$|u_{k0}(t)| \le K_0\sup_{t\in(0,T]}|F_{0k}(t)|k^{2\theta-2} \quad \text{якщо} \quad \alpha\in(1,2),$$

$$|u_{k0}(t)| \le K_0\sup_{t\in(0,T]}|F_{0k}(t)| \quad \text{якщо} \quad \alpha\in(0,1).$$

Враховуючи, що функції $E_{\alpha,\mu}(-k^2t^\alpha)$ ($\mu\in\{1,\alpha,2\}$) мають однакову асимптотику при $k\to+\infty$ та формули (6.97), одержуємо

$$(1+k)^{\gamma+2}|F_{1k}| \le$$
$$\le c_0\Big[\sup_{t\in(0,T]}|F_{0k}(t)|(1+k)^{\gamma+2\theta+2} + |\Phi_k|(1+k)^{\gamma+2} + |F_{2k}|(1+k)^{\gamma+2}\Big],\ \alpha\in(1,2),$$

$$(1+k)^{\gamma+2}|F_{1k}| \le$$
$$\le c_0\Big[\sup_{t\in(0,T]}|F_{0k}(t)|(1+k)^{\gamma+2} + |\Phi_k|(1+k)^{\gamma+2} + |F_{2k}|(1+k)^{\gamma+2}\Big],\ \alpha\in(0,1),$$

$k\in\mathbb{N}$, де c_0 – додатна стала.

Отож, за припущень теореми формулами (6.89) при $j = 1$ та (6.97) визначено $F_1 \in H^{\gamma+2}(\mathbb{R})$. Як при доведенні теореми 6.15 одержуємо нерівність коерцитивності (6.98). Єдиність та неперервна залежність від даних розв'язку задачі випливає з оцінки (6.98).

Примітка. Єдиність розв'язку задачі одержана за суттєво слабших припущень, ніж існування. Одержаний результат можна перенести на випадок крайової задачі з однорідними крайовими умовами для рівняння

$$D_t^\alpha u - A(x, D)u = F_0(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T],$$

де $A(x, D)$ – еліптичний диференціальний вираз другого порядку з нескінченно диференційовними коефіцієнтами в обмеженій області $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ та $X_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ – власні функції відповідної задачі Штурма-Ліувіля, що має додатні власні значення, вважаючи

$$H^\gamma(\Omega_0) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega_0) : \|v\|_{H^\gamma(\Omega_0)} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |v_k|(1 + k)^\gamma < +\infty\},$$

де $\mathcal{D}(\Omega_0)$ – простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями в обмеженій області $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

6.6.2 Задача з невідомою правою частиною

Вивчаємо задачу

$$D_t^\alpha u - u_{xx} = F_0(x), \quad (x, t) \in Q_T := \mathbb{R} \times (0, T], \tag{6.100}$$

$$u(x, 0) = F_1(x), \quad u_t(x, 0) = F_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.101}$$

$$\int_0^{t_0} u(x, t)dt = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t_0 \in (0, T] \tag{6.102}$$

де $\alpha \in (0, 2)$, F_1, F_2, Φ – задані функції, T –задане число, u, F_0 – невідомі функції. Друга умова в (6.101) відсутня у випадку $\alpha \in (0, 1]$.

Припущення (D):

$\gamma \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0, 1)$, $F_j \in H^{\gamma+2+2\theta}(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$ ($F_2 = 0$ при $\alpha \in (0, 1]$);

$\Phi \in H^{\gamma+4}(\mathbb{R})$, якщо $\alpha \in (0, 1]$, $\Phi \in H^{\gamma+4+2\theta}(\mathbb{R})$ і крім того,

число $t_0 \in (0,T]$ є таким, що $E_{\alpha,2}(-k^2 t_0^\alpha) \neq 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що $0 < E_{\alpha,\mu}(-k^2 t^\alpha) < 1$ для всіх $t > 0$, $\mu \geq \alpha$ при $\alpha \in (0,1]$ (див. [252]). При $\alpha \in (1,2)$, функція $1 - E_{\alpha,2}(-z)$ має скінченну кількість дійсних додатних нулів [252], тому існує таке $t_0 \in (0,T]$, що $E_{\alpha,2}(-k^2 t_0^\alpha) \neq 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Як у 6.6.1, розкладаємо $F_j(x)$, $j \in \{0,1,2\}$, $\Phi(x)$ у формальні ряди Фур'є за системою $X_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$.

Означення 6.7. Пара $(u, F_0) \in \mathcal{M}_{\alpha,\gamma,\theta} := C_{2,\alpha}\big([0,T]; H^\gamma(\mathbb{R})\big) \times H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})$ $\big((u,F_0) \in \mathcal{M}_{\alpha,\gamma} = \mathcal{M}_{\alpha,\gamma,0}$, якщо $\alpha \in (0,1]\big)$, задана рядами (6.90) та (6.89) при $j = 0$, яка задовольняє рівняння (6.100) в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ та умови (6.101), (6.102), називається розв'язком задачі (6.100)–(6.102) за припущення (D).

Враховуючи формулу

$$\lambda \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda \tau^\alpha) d\tau = 1 - E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) \tag{6.103}$$

та теорему 6.15 знаходимо

$$\begin{gathered} u_k(t) = F_{0k} k^{-2}\big[1 - E_{\alpha,1}(-k^2 t^\alpha)\big] \\ + F_{1k} E_{\alpha,1}(-k^2 t^\alpha) + F_{2k} t E_{\alpha,2}(-k^2 t^\alpha), \quad t \in [0,T], \quad k \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{6.104}$$

Теорема 6.17. *За припущення (D) існує єдиний розв'язок $(u, F_0) \in \mathcal{M}_{\alpha,\gamma,\theta}$ задачі (6.100) – (6.102). Він заданий рядами (6.90) та (6.89) при $j = 0$, де $u_k(t)$ визначені згідно з (6.104),*

$$F_{0k} = \Big[\Phi_k - F_{1k} t_0 E_{\alpha,2}(-k^2 t_0^\alpha) - F_{2k} t_0^2 E_{\alpha,3}(-k^2 t_0^\alpha)\Big] k^2\, G_k^{-1},\ k \in \mathbb{N}, \tag{6.105}$$

$G_k = t_0\big[1 - E_{\alpha,2}(-k^2 t_0^\alpha)\big]$, $k \in \mathbb{N}$. *Розв'язок неперервно залежить від даних F_0, F_2, Φ та справджує наступну нерівність коерцитивності:*

$$\begin{gathered} ||u||_{C_{2,\alpha}\left([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\right)} + ||F_0||_{H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})} \\ \leq b_0 ||\Phi||_{H^{\gamma+2\theta+4}(\mathbb{R})} + \sum_{j=1}^{2} b_j ||F_j||_{H^{\gamma+2+2\theta}(\mathbb{R})}, \quad \alpha \in (1,2), \\ ||u||_{C_{2,\alpha}\left([0,T];H^\gamma(\mathbb{R})\right)} + ||F_0||_{H^\gamma(\mathbb{R})} \leq b_0 ||\Phi||_{H^{\gamma+4}(\mathbb{R})} + b_1 ||F_1||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})}, \quad \alpha \in (0,1] \end{gathered} \tag{6.106}$$

де b_j , $j \in \{0,1,2\}$ *– додатні сталі, які від даних задачі не залежать.*

Доведення. Використовуючи теорему 6.15 та формули (6.104), записуємо умови (6.102)

$$F_{0k}k^{-2}\int\limits_0^{t_0}\Big[1-E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)\Big]dt$$

$$+\int\limits_0^{t_0}\Big[F_{1k}E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)+F_{2k}tE_{\alpha,2}(-k^2t^\alpha)\Big]dt=\Phi_k,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Маємо

$$\int\limits_0^{t_0}E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)dt=t_0E_{\alpha,2}(-k^2{t_0}^\alpha),\quad k\in\mathbb{N},$$

$$\int\limits_0^{t_0}tE_{\alpha,2}(-k^2t^\alpha)dt=\frac{1}{\alpha k^{4/\alpha}}\int\limits_0^{k^2{t_0}^\alpha}E_{\alpha,2}(-z)z^{\frac{2}{\alpha}-1}dz$$

$$=\frac{1}{k^{4/\alpha}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(k^2{t_0}^\alpha)^{p+\frac{2}{\alpha}}}{\Gamma(p\alpha+3)}=t_0^2E_{\alpha,3}(-k^2{t_0}^\alpha),\quad k\in\mathbb{N}.$$

Звідси

$$F_{0k}G_k=k^2\Big[\Phi_k-F_{1k}\int\limits_0^{t_0}\big[E_{\alpha,1}(-k^2t^\alpha)+F_{2k}tE_{\alpha,2}(-k^2t^\alpha)\big]dt\Big],\ \ k\in\mathbb{N},$$

а з врахуванням припущення (D), знаходимо вирази (6.105) для невідомих коефіцієнтів Фур'є F_{0k} , $k\in\mathbb{N}$.

Покажемо, що знайдений розв'язок належить $\mathcal{M}_{\alpha,\gamma,\theta}$. Оскільки $E_{\alpha,\mu}(-k^2t^\alpha)$ ($\mu\in\{\alpha,1,2,3\}$) мають однаковий характер поведінки при великих k та беручи доуваги формули (6.105), одержуємо

$$(1+k)^{\gamma+2\theta}|F_{0k}|\le c_0\Big[|F_{1k}|(1+k)^{\gamma+2\theta-2}$$

$$+|F_{2k}|(1+k)^{\gamma+2\theta-2}+|\Phi_k|(1+k)^{\gamma+2\theta}\Big](1+k)^4$$

$$=c_0\Big[|F_{1k}|(1+k)^{\gamma+2\theta+2}+|F_{2k}|(1+k)^{\gamma+2\theta+2}+|\Phi_k|(1+k)^{\gamma+4+2\theta}\Big],\ \ \alpha\in(1,2),$$

$$(1+k)^{\gamma}|F_{0k}| \le c_0\Big[|\Phi_k|(1+k)^{\gamma+4} + \sup_{t\in(0,T]}|F_{1k}|(1+k)^{\gamma+2}\Big],\ \alpha\in(0,1),\ k\in\mathbb{N},$$

де c_0 – додатна стала, а отже,

$$||F_0||_{H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})} \le c_0\Big[\sum_{j=1}^{2}||F_j||_{H^{\gamma+2+2\theta}(\mathbb{R})} + ||\Phi||_{H^{\gamma+4+2\theta}(\mathbb{R})}\Big],\ \ \alpha\in(1,2),$$

$$||F_0||_{H^{\gamma}(\mathbb{R})} \le c_0\Big[||F_1||_{H^{\gamma+2}(\mathbb{R})} + ||\Phi||_{H^{\gamma+4}(\mathbb{R})}\Big],\ \ \alpha\in(0,1].$$

Ітак, за припущень теореми, знаходимо $F_0\in H^{\gamma+2\theta}(\mathbb{R})$ ($F_0\in H^{\gamma}(\mathbb{R})$ при $\alpha\in(0,1]$). Враховуючи одержані оцінки та оцінки (6.95), одержуємо (6.106).

6.6.3 Класичний розв'язок оберненої задачі з невідомою правою частиною

Нехай $\tilde{C}^{2s+j}(0,l)$ – клас функцій $F\in C^{2s+j-1}[0,l]$, що мають обмежену на $(0,l)$ похідну порядку $2s+j$ і таких, що $F(0)=F(l)=F''(0)=F''(l)=\cdots=F^{(2s)}(0)=F^{(2s)}(l)=0$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $j\in\{1,2\}$,

$$||v||_{C(Q)} = \sup_{(x,t)\in Q}|v(x,t)|,\qquad ||v||_{C^r(0,l)} = ||v||_{\tilde{C}^r(0,l)} = \max_{m=\overline{0,r}}\sup_{x\in(0,l)}|v^{(m)}(x)|,$$

$$||v||_{\tilde{C}^r(Q)} = \max_{m=\overline{0,r}}\max_{t\in[0,T]}\sup_{(x,t)\in Q}|\tfrac{\partial^m v(x,t)}{\partial x^m}|,\ r\in\mathbb{Z}_+.$$

Вивчаємо обернену крайову задачу

$$D_t^{\alpha}u - u_{xx} = F_0(x),\ \ (x,t)\in Q := (0,l)\times(0,T], \tag{6.107}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\quad t\in[0,T], \tag{6.108}$$

$$u(x,0) = F_1(x),\quad x\in[0,l], \tag{6.109}$$

$$\int_0^T u(x,t)dt = F_2(x),\quad x\in[0,l], \tag{6.110}$$

де $\alpha\in(0,1)$, F_j, $j\in\{1,2\}$ – задані функції.

Розв'язком задачі (6.107)-(6.110) є пара функцій $(u,F_0)\in\mathcal{M} := C_{2,\alpha}(\bar{Q})\times\tilde{C}^1(0,l)$, що задовольняє рівняння (6.107) в Q та умови (6.108)-(6.110).

Для існування такого розв'язку задачі необхідно, щоб $F_2(0)=F_2(l)=0$.

Шукаємо розв'язок прямої задачі (6.107) – (6.109) у вигляді ряду Фур'є (6.90) за власними функціями $X_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{l}$, що відповідають власним

значенням $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ ($k \in \mathbb{N}$) відповідної задачі Штурма-Ліувіля. Далі через F_{jk} позначаємо коефіцієнти розвинення функції $F_j(x)$ за системою $X_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$,

$$F_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{jk} \sin \frac{k\pi x}{l}, \qquad j \in \{0, 1, 2\}. \tag{6.111}$$

Теорема 6.18. *Нехай* $\alpha \in (0,1)$, $F_1 \in \tilde{C}^4(0,l)$, $F_2 \in \tilde{C}^6(0,l)$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $(u, F_0) \in \mathcal{M}$ *оберненої задачі (6.107) – (6.110). Функція* u *визначається формулою (6.90), де*

$$u_k(t) = F_{0k} \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) d\tau + F_{1k} E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha), \quad t \in (0,T],\ k \in \mathbb{N}. \tag{6.112}$$

функція F_0 *– формулою (6.111) при* $j = 0$, *де*

$$F_{0k} = \frac{\lambda_k [F_{2k} - T F_{1k} E_{\alpha,2}(-\lambda_k T^\alpha)]}{T[1 - E_{\alpha,2}(-\lambda_k T^\alpha)]}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.113}$$

Розв'язок задачі неперервно залежить від даних F_1, F_2 *та справджуються оцінки*

$$||u||_{C(Q)} + ||F_0||_{C(0,l)} \le a_1 ||F_1||_{C^3(0,l)} + a_2 ||F_2||_{C^5(0,l)}, \tag{6.114}$$

$$||u_{xx}||_{C(Q)} + ||D_t^\alpha u||_{C(Q)} + ||F_0||_{C^1(0,l)} \le \hat{a}_1 ||F_1||_{C^4(0,l)} + \hat{a}_2 ||F_2||_{C^6(0,l)}, \tag{6.115}$$

де $a_j, \hat{a}_j$, $j \in \{1, 2\}$ *– додатні сталі, що від даних задачі не залежать.*

Доведення. При $F_1 \in \tilde{C}^1(0,l)$ та відомій $F_0 \in \tilde{C}^1(0,l)$ існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q})$ прямої задачі (6.107) – (6.109). Він має вигляд (6.90), де $u_k(t)$ визначаються формулами (6.94), і справджує оцінку

$$||u||_{C(Q)} \le b_0 ||F_0||_{C(0,l)} + b_1 ||F_1||_{C(0,l)} \tag{6.116}$$

із додатними сталими b_j, $j \in \{0, 1\}$, що від F_j, $j \in \{0, 1\}$ не залежать.

Справді, для знаходження невідомих функцій $u_k(t)$ одержуємо задачі

$$D^\alpha u_k + \lambda_k u_k = F_{0k}, \quad t \in (0,T], \quad u_k(0) = F_{1k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Згідно з [29, с. 128], вони мають розв'язки (6.94).

Функції $E_{\alpha,\mu}(-x) \geq 0$ для всіх $x \geq 0$, $\mu \geq \alpha$ та монотонно спадають [252], тому $\int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) d\tau = \frac{1-E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha)}{\lambda_k} > 0,\ t > 0$.

При $F_0 \in C[0,l]$ кожний із перших доданків у формулах (6.94) має оцінку

$$|F_{0k} \int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) d\tau| = |F_{0k}| \frac{1-E_{\alpha,1}(-\lambda_k \tau^\alpha)}{\lambda_k} \leq \frac{C_0}{\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При $F_1 \in C[0,l]$ матимемо $|F_{1k} E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha)| \leq \frac{C_1}{1+\lambda_k t^\alpha}, \quad k \in \mathbb{N}$,

Тут і далі додатні сталі C_0, C_1, C_2 – одні й ті ж для всіх $k \in \mathbb{N}$. На підставі формул (6.94) та одержаних оцінок, ряд (6.90) рівномірно й абсолютно збігається на $\bar{Q}$ та справджує оцінку (6.116). Якщо ж $F_j \in \tilde{C}^1(0,l)$, то $|F_{jk}| = \left| \frac{2 \int\limits_0^l F_j'(x) \cos(\lambda_k^{1/2} x) dx}{l \lambda_k^{1/2}} \right| \leq \frac{C_2}{\lambda_k^{1/2}},\ k \in \mathbb{N},\ j \in \{0,1\}$, і тоді продиференційований двічі за x ряд (6.90) збігається рівномірно та абсолютно на $\bar{Q}$, а на підставі рівняння (6.107) одержуємо існування неперервної похідної $D^\alpha u$ та оцінку

$$||u_{xx}||_{C(Q)} + ||D_t^\alpha u||_{C(Q)} \leq \hat{b}_0 ||F_0||_{C^1(0,l)} + \hat{b}_1 ||F_1||_{C^1(0,l)} \tag{6.117}$$

із додатними сталими $\hat{b}_j$, $j \in \{0,1\}$, що від F_j, $j \in \{0,1\}$ не залежать.

Підставляємо розв'язок (6.90) прямої задачі (6.107) – (6.109) в умову перевизначення (6.110). Одержуємо

$$F_{0k} \int\limits_0^T \Big(\int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) d\tau \Big) dt + F_{1k} \int\limits_0^T E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha) dt = F_{2k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.118}$$

Обчислюємо

$$\int\limits_0^T E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha) dt = \frac{1}{\alpha \lambda_k^{1/\alpha}} \int\limits_0^{\lambda_k T^\alpha} E_{\alpha,1}(-z) z^{\frac{1}{\alpha}-1} dz = \frac{1}{\alpha \lambda_k^{1/\alpha}} \int\limits_0^{\lambda_k T^\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{p+\frac{1}{\alpha}-1} dz}{\Gamma(p\alpha+1)} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k^{1/\alpha}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma(p\alpha+1)(p\alpha+1)} \Big|_{z=\lambda_k T^\alpha} = \frac{1}{\lambda_k^{1/\alpha}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\lambda_k T^\alpha)^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma(p\alpha+2)} = T E_{\alpha,2}(-\lambda_k T^\alpha),$$

і тоді

$$\int\limits_0^T \Big(\int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) d\tau \Big) dt = \frac{T[1-E_{\alpha,2}(-\lambda_k T^\alpha)]}{\lambda_k} > 0.$$

Тепер із формул (6.118) знаходимо вирази (6.113) для невідомих коефіцієнтів F_{0k}, $k \in \mathbb{N}$ розвинення функції $F_0(x)$ в ряд Фур'є.

Обгрунтуємо рівномірну збіжність такого розвинення та належність суми ряду до класу $\tilde{C}^1(0,l)$. Із зображення $E_{\alpha,\mu}(-\lambda_k t^\alpha)$ за допомогою Н-функцій Фокса, враховуючи однаковий характер поведінки функцій $E_{\alpha,\mu}(-\lambda_k t^\alpha)$ ($\mu = 1, 2, \alpha$) при великих λ_k, одержуємо, що при $F_1 \in \tilde{C}^3(0,l)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{1k}\lambda_k E_{\alpha,2}(-\lambda_k t^\alpha)}{1 - E_{\alpha,2}(-\lambda_k T^\alpha)} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

рівномірно й абсолютно збігається в $\bar{Q}$, а при $F_1 \in \tilde{C}^4(0,l)$ допускає почленне диференціювання за x. При $F_2 \in \tilde{C}^5(0,l)$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k F_{2k}}{1-E_{\alpha,2}(-\lambda_k T^\alpha)} \sin\frac{k\pi x}{l}$ рівномірно й абсолютно збігається на $\bar{Q}$, а при $F_2 \in \tilde{C}^6(0,l)$ допускає почленне диференціювання за x. Отож, за умов теореми рядом (6.111) при $j = 0$ визначена функція $F_0 \in \tilde{C}^1(0,l)$, а із формул (6.113) одержуємо оцінки

$$||F_0||_{C(0,l)} \leq c_1||F_1||_{C^3(0,l)} + c_2||F_2||_{C^5(0,l)},$$

$$||F_0||_{C^1(0,l)} \leq \hat{c}_1||F_1||_{C^4(0,l)} + \hat{c}_2||F_2||_{C^6(0,l)},$$

де $c_j, \hat{c}_j$, $j \in \{1, 2\}$ – додатні сталі, що від даних задачі не залежать. Звідси та з оцінок (6.116), (6.117) випливають потрібні оцінки (6.114), (6.115).

Єдиність та неперервна залежність розв'язку задачі від даних випливає з одержаних оцінок (6.114), (6.115).

Висновки до розділу 6

Доведено теореми про однозначне визначення пари функцій $a \in C[0,T]$, $a(t) > 0, \quad t \in [0,T]$ та класичного розв'язку u першої крайової задачі для рівняння

$$D_t^\beta u - a(t)u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in Q = (0,l) \times (0,T]$$

з регуляризованою похідною $D_t^\beta u$ порядку $\beta \in (0,2)$ при додатковій умові $a(t)u_x(0,t) = F(t), \quad t \in [0,T]$. Розглянуто багатовимірний випадок такої задачі.

Встановлено, що розв'язок u першої крайової задачі для рівняння

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F_0(x)g(t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T]$$

з похідною $u_t^{(\beta)}$ Рімана-Ліувіля при узагальненій функції F_0 та неперервній $g(t)$ є узагальненою функцією, неперервною за змінною t в узагальненому сенсі – належить $\mathcal{D}'_C(\bar{Q})$.

Цей результат використовується для доведення розв'язності деяких обернених крайових задач для такого рівняння з заданими узагальненими функціями у правих частинах.

Вперше доведено однозначну розв'язність задач про визначення пари функцій: розв'язку u першої крайової задачі для рівняння з дробовою похідною $u_t^{(\beta)}$ порядку $\beta \in (0,2)$, узагальненими функціями F_0 та в початкових умовах, а також невідомого старшого або молодшого коефіцієнта, або невідомої компоненти правої частини при відомих значеннях шуканої узагальненої функції на заданій основній функції.

При інтегральній за часом умові перевизначення встановлено існування, єдиність та неперервну залежність від даних узагальненого розв'язку оберненої крайової задачі на відновлення початкових даних, узагальненого, а також класичного розв'язку оберненої задачі на відновлення правої частини у рівнянні дробової дифузії.

Результати цього розділу опубліковано в [84, 90, 100, 101, 103, 214].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена встановленню умов існування та максимальної регулярності розв'язків нелінійних операторних рівнянь типу Гаммерштейна на комплексних інтерполяційних шкалах секторіального оператора, задачі Коші для абстрактних рівнянь із дробовою похідною, також при їх лінійних і нелінійних збуреннях, розв'язності прямих та обернених задач для рівнянь із дробовими похідними у просторах гладких та узагальнених функцій.

В дисертаційній роботі одержано такі нові результати.

1. Описано властивості числення широких класів секторіальних операторів, що діють на банахових просторах та на апроксимовних алгебрах Вінера аналітичних в одиничній кулі банахового нескінченновимірного простору функцій, розвинуто їх застосування до дослідження задачі Коші для рівнянь із дробовими похідними.

2. На базі відомих та одержаних властивостей функціонального числення секторіальних операторів знайдено нові достатні умови класичної розв'язності та максимальної регулярності розв'язків:

а) нелінійних операторно-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна на комплексних інтерполяційних шкалах секторіального оператора;

б) задачі Коші для абстрактних лінійних та півлінійних рівнянь із дробовою похідною;

в) нормальних параболічних крайових задач із дробовою похідною за часом.

3. Використовуючи аналітичні властивості функціонального числення секторіальних операторів, побудовано:

а) новий метод наближення розв'язку задачі Коші для операторно-диференціального рівняння з дробовою похідною, збуреного на комплексних інтерполяційних шкалах секторіального оператора, без обмеження на норму збурюючого оператора;

б) наближення розв'язків нормальних параболічних крайових задач, збурених псевдодиференціальними доданками, за допомогою ітерацій операторів Гріна незбурених задач.

4. Вперше досліджено узагальнені початкові значення регулярних розв'язків півлінійних абстрактних рівнянь зі збуреною дробовою похідною.

5. Вперше встановлено однозначну розв'язність задачі Коші для лінійного операторно-диференціального рівняння з дробовою похідною у вагових просторах узагальнених функцій.

6. Доведено однозначну розв'язність задачі Коші для рівнянь із дробовими похідними як за часовою, так і за просторовими змінними, неоднорідних крайових задач для рівнянь із дробовою похідною за часом у просторах узагальнених функцій, зокрема, одержано теореми про існування та єдиність класичних за часом зі значеннями в просторах беселевих потенціалів розв'язків таких задач.

7. Вперше сформульовано та встановлено однозначну розв'язність деяких обернених задачі Коші та крайових задач для диференціальних рівнянь із дробовими похідними, також при заданих у правих частинах узагальнених функціях.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Їх можна використати в теорії розв'язності та дослідженні регулярності розв'язків операторних та диференціальних рівнянь із частинними та дробовими похідними, в теорії обернених крайових задач для таких рівнянь, при дослідженні практичних задач, які моделюються розглянутими в дисертації задачами, а також у теорії аналітичних функцій нескінченної кількості змінних та нелінійному аналізі.

Список використаних джерел

[1] *Агмон С.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы / С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг. – М.: ИЛ, 1962.

[2] *Бейтмен Г.* Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций (Серия: СМБ) / Г. Бейтмен и А. Эрдейи. – М.: 1970. – 328 с.

[3] *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. – К.: Наук. думка, 1965. – 798 с.

[4] *Березанський Ю.М.* Самосопряженные операторы в просранствах функций бесконечного числа переменных. – К.: Наук. думка, 1978. – 360 с.

[5] *Бёрг Й.* Интерполяционные пространства. / Й. Бёрг, Й. Лёфстрём. – М.: Мир, 1980. – 264 с.

[6] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

[7] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 318 с.

[8] *Волевич Л.Р.* Некоторые пространства ообщенных функций и теоремы вложения / Л.Р. Волевич, Б.П. Панеях // Успехи мат. наук. –1965. – Т. 20, №1. – С. 3-74.

[9] *Ворошилов А.А.* Условия существования классического решения задачи Коши для дифуззионно-волнового уравнения с частной производной Капуто / А.А. Ворошилов, А.А. Килбас // ДАН.– 2007.–Т. 414, N4.–С. 1-4.

[10] *Гельфанд И.И.* Об эллиптических уравнениях / И.И. Гельфанд // Успехи матем. наук. – 1960. – Т. 15. – Вып. 3/93/. – С. 121-132.

[11] *Гельфанд И.И.* Обобщенные функции и действия над ними / И.И. Гельфанд и Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 439 с.

[12] *Гельфанд И.И.* Пространства основных и обобщенных функций / И.И. Гельфанд и Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

[13] *Глушак А.В.* О задаче типа Коши для неоднородного абстрактного дифференціального уравнения с дробной производной / А.В. Глушак //Вестник ВГУ. Сер. физика, математика. – Воронеж, 2002. – №1. – С. 121-123.

[14] *Глушак А.В.* О возмущении абстрактного дифференціального уравнения с дробными производными / А.В. Глушак, Х.К. Авад // Докл. Адыгской (Черкеской) Международной ак. наук.– 2008.– Т. 10,№1.– С. 25-31.

[15] *Горбачук В.И.* О начальных данных гладких решений некоторых классов параболических уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук // Успехи мат. наук. – 1979. – Т. 34, N4. – С. 164.

[16] *Горбачук В.И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.

[17] *Горбачук В.И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, А.В. Князюк // Успехи мат. наук. – 1989. – Т. 44. – Вып. 3. – С. 85-91.

[18] *Горбачук М.Л.* О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, при которых решения бесконечно диференцируемы / М.Л. Горбачук, П.И. Дудников // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – N 4. – С. 9-11.

[19] *Городецкий В.В.* Параболические псевдодифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций / В.В. Городецкий, Я.М. Дринь // —Львов, 1991.— 57 с. (Препр./АН Украины. Ин-т прикл. пр. мех. и мат.; №4–91.)

[20] *Городецький В.В.* Про дробове диференціювання у просторах узагальнених функцій типу S' / В.В. Городецький, О.М. Ленюк // Доп. АН України. – 1998. – 11. – С. 20-24.

[21] *Городецький В.В.* Задача Коші для псевдодифференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу S' / В.В. Городецький, В.А. Літовченко // Доп. АН України. – 1992. – 10. – С. 6-9.

[22] *Грушин В.В.* О поведении решений дифференциальных уравнений вблизи границы / В.В.Грушин // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 158.– С. 264-267.

[23] *Гущин А.К.* О граничных значениях решений эллиптических уравнений / А.К. Гущин, В.П. Михайлов // Матем. сб.– 1979.– Т. 108, №1.– С. 3-21.

[24] *Гупало А.С.* Об обобщенных граничных значениях решения однородного параболического уравнения второго порядка / А.С. Гупало, Г.П. Лопушанская // Методы исследования дифференциальных и интергральных операторов.—К.: Наук. думка, 1989.— С.54-59.

[25] *Гюнтер Н.М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н.М. Гюнтер. – М.: Гостехиздат, 1953. – 416 с.

[26] *Данфорд Н.* Линейные операторы. Общая теория. Пер. с англ. / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М.: ИЛ, 1962. – 895 с.

[27] *Данфорд Н.* Линейные операторы. Спектральная теория. Пер. с англ. / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. –М.: ИЛ, 1966. – 1063 с.

[28] *Данфорд Н.* Линейные операторы. Т.2/ Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М.: ИЛ, 1967.

[29] *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. – М.: Наука, 1966. 671 с.

[30] *Джрбашян М. М.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка / М.М. Джрбашян, А.Б. Нерсесян // Изв. Арм. ССР. Математика. – 1968. – **3**, №1. – С. 3-29.

[31] *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. / А.М. Денисов. – М.: Изд. МГУ, 1994. – 206 с.

[32] *Дрінь Я.М.* Пряма і обернена задачі для одного класу рівнянь з псевдодиференціальним оператором / Я.М. Дрінь // Доп. НАН України. – 2011, №5. – С. 12-17.

[33] *Дубинский Ю.А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка / Ю.А. Дубинский // УМН. – 1968. – Т. 23, N 1(139). – С. 45-90.

[34] *Житарашу Н.В.* Параболические граничные задачи / Н.В. Житарашу, С.Д. Эйдельман. – Кишинев: Штиинца, 1992. – 328 с.

[35] *Житарашу Н.В.* Теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории обобщенных решений граничных задач для одного параболического по И.Г. Петровскому уравнения / Н.В. Житарашу // Матем. сб. – 1985. – Т. 128, N4. – С. 451-473.

[36] *Ивасишен С. Д.* Линейные параболические граничные задачи / С. Д. Ивасишен. – К.: "Вища школа 1987. – 72 С.

[37] *Ивасишен С.Д.* Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических граничных задач с нормальными граничными условиями / С.Д. Ивасишен // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 197, N2. – С. 261-264.

[38] *Ивасишен С.Д.* О корректной разрешимости общих параболических граничных задач в негативных пространствах Гельдера / С.Д. Ивасишен // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1977. – N5. – С. 396-400.

[39] *Иосида К.* Функциональный анализ: Пер. с англ. / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

[40] *Загорский Т. Я.* Смешанная задача для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа / Т.Я. Загорский. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1961. – 115 с.

[41] *Каленюк П.И.* Обобщенный метод разделения переменных / П.И. Каленюк, Я.Е. Баранецкий, З.Н. Нитребич. – К."Наукова думка 1993. – 232 с.

[42] *Каленюк П.І.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод / П. І. Каленюк, З.М. Нитребич. – НУ "Львівська політехніка" , 2002. – 291 с.

[43] *Клемент Ф.* Однопараметрические полугруппы / Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер. – М.: Мир, 1992. – 351 с.

[44] *Костин В.А.* К задаче Коши для абстрактных дифференцыальных уравнений с дробными производными / В.А. Костин // ДАН СССР. – 1992. – Т.326, №4.– С. 597-600.

[45] *Кочубей А.Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка / А.Н. Кочубей // Дифференц. уравнения. – 1989.– Т. 25,№8.– С. 1359-1368.

[46] *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка / А.Н. Кочубей //Дифференц. уравнения. – 1990.– Т. 26,№4.– С. 660-670.

[47] *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы / А.Н. Кочубей // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – Т. 52, N5. – С. 909-934.

[48] *Кочубей А.Н.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии / А.Н. Кочубей, С.Д. Эйдельман // Доп. НАН України. – 2003. – N 12. – С. 11-16.

[49] *Красносельский М.А.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, Н.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. – М.: Наука, 1966. – 499 с.

[50] *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

[51] *Кузь А.М.* Задача з інтегральними умовами для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами / А.М. Кузь // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" . – Фіз.-мат. науки. –2012. – №740. – С. 24-34.

[52] *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – М.: Мир, 1971. – 372 с.

[53] *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 С.

[54] *Лопатинский Я.Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я.Б. Лопатинский // Укр. матем. журн. – 1953. – Т 5. – С. 123-151.

[55] *Лопушанская Г.П.* О решении граничных задач для эллиптических систем в пространстве обобщенных функций / Г.П. Лопушанская // Диф. уравн. – 1992. – Т. 28, N8. – С. 1401-1410.

[56] Лопушанская Г.П. Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций / Г.П. Лопушанская, А.О. Лопушанский, О.В. Пасичник // Сиб. матем. ж. – 2011.– Т.52, №6.– С. 1288-1299.

[57] *Лопушанский А.О.* Абстрактная параболическая задача Коши в комплексных интерполяционных шкалах / А.О. Лопушанский // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т.46, №12. – С. 1799 - 1803.

[58] *Лопушанский А.О.* Задача Коши для уравнения с дробными производными в пространствах бесселевых потенциалов / А.О. Лопушанский // Сиб. матем. журн. – 2014. – 55, №6.–С. 1089-1097.

[59] *Лопушанська Г.П.* Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних / Г.П. Лопушанська // Укр. мат. журн.– Т.51.– №1.– 1999.– С. 48-59.

[60] *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D' / Г.П. Лопушанська – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2002.– 287с.

[61] *Лопушанська Г.* Узагальнені крайові значення розв'язків півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь / Лопушанська Г., Чмир О. // Нелінійні граничні задачі.– 2007.– Т.17.– С. 50-73.

[62] *Лопушанська Г.П.* Сліди розв'язків півлінійних рівнянь з дробовою похідною за часом / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.В. Пасічник // Карпатські матем. публ. – 2011. – Т.3, N1. – С. 85-93.

[63] *Лопушанська Г.П.* Два формулювання узагальненої задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії з дробовою похідною за часом / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.В. Пасічник // Карпатські матем. публ. – 2012. – Т.4, N1. – С. 72-82.

[64] *Лопушанська Г.П.* Задача Коші для рівнянь з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними в просторах узагальнених функцій / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський // Укр. матем. ж. –2012.– Т. 64, №8. –С. 1067-1080.

[65] *Лопушанська Г.П.* Фундаментальний розв'язок рівнянь з частинними дробовими похідними / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський // Вісник Львів. унту. Сер. мех.-мат.– 2012. – Вип. 76. – С. 46-55.

[66] *Лопушанська Г.П.* Класичний розв'язок оберненої задачі для рівняння дробової дифузії при інтегральній за часом умові перевизначення / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.М. М'яус // Мат. студії. – 2015. – 44, no 2. – С. 215-220.

[67] *Лопушанська Г.П.* Задача Коші для рівняння з дробовою похідною за часом у просторі узагальнених функцій / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.В. Пасічник // Міжнар. конф. до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди.– 8-13 червня 2009 р., Чернівці. – Тези доп. – Чернівці: Книги – XXI, 2009. – С. 94.

[68] *Лопушанська Г.П.* Задача Коші для рівнянь з дробовими похідними в просторах узагальнених функцій / Г.П. Лопушанська, А.О.Лопушанський // Чотирнадцята міжнар. наукова конф. ім. ак. М. Кравчука, м. Київ, 14-21 кв. 2012 р. – Матеріали конф. – Київ, 2012. – С. 280.

[69] *Лопушанський А.О.* Деякі інтегральні формули для аналітичних функцій над некомутативними банаховими алгебрами / А.О. Лопушанський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. Т. 40, No 3. С. 31–38 [Lopushanskii A. Some Integral Formulas for Analytic Functions Over Noncommutative Banach Algebras // Journal of Math.Sciences.-1999.-V.96, №1. – P.2821-2827].

[70] *Лопушанський А.О.* Диференціювання аналітичних функцій від секторіальних операторів за некомутативними напрямками / А.О. Лопушанський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. Т. 40, № 4. – С. 70–74 [Lopushanskii A. Differention of Analytic Functions of Sectorial Operators in Noncommutating Directions// Journal of Math.Sciences.-1999.-V.96, №1. – P.2999-3003].

[71] *Лопушанський А.О.* Інтерполяційна оцінка збурень деяких класів еволюційних рівнянь / А.О. Лопушанський // Вісник ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – С. 128-130.

[72] *Лопушанський А.О.* Сильно неперервні півгрупи збурень абстрактних параболічних рівнянь / А.О. Лопушанський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999.– Т. 42, No 3. – С. 75–82.

[73] *Лопушанський А.О.* Інтерполяційні оцінки аналітичних наближень розв'язків збурених параболічних змішаних задач / А.О. Лопушанський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – С. 123-128.

[74] *Лопушанський А.О.* Розв'язність неоднорідної задачі Коші для абстрактних параболічних рівнянь в комплексних інтерполяційних шкалах / А.О. Лопушанський // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. - 2004. – Випуск 191-192.- Математика.- С.89-94.

[75] *Лопушанський А.О.* Про наближення розв'язку збуреної абстрактної задачі Коші / А.О. Лопушанський // Міжнародна конференція "Геометрія в Одесі - 2004. Диференціальна геометрія та застосування". Одеса,17 тр.-29 тр. - Тези доп. Одеса-2004. - С. 52-53.

[76] *Лопушанський А.О.* Наближений метод для збуреного абстрактного параболічного рівняння / А.О. Лопушанський // Конференція молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. ак. Я.С.Підстригача. Тези доповідей.- Львів, 24-26 травня 2004 р.- С.94-96.

[77] *Лопушанський А.О.* Про наближення розв'язку задачі Коші для збуреного абстрактного параболічного рівняння / А.О. Лопушанський // Міжнародна математична конференція імені В.Я.Скоробагатька (27 вересня - 1 жовтня, Дрогобич). Тези доповідей. Львів-2004.- С.130.

[78] *Лопушанський А.О.* Властивості розв'язків лінійних параболічних задач, збурених необмеженими операторами / А.О. Лопушанський // Конференція молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. ак. Я.С.Підстригача. Тези доповідей.- Львів, 24-27 травня 2005 р.- С.298-299.

[79] *Лопушанський А.О.* Числення секторіальних операторів з від'ємним типом і аналітичні півгрупи / А.О. Лопушанський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – Т.49, №2. – С. 65 - 73.

[80] *Лопушанський А.О.* Числення секторіальних операторів з від'ємним типом і комплексні інтерполяційні шкали / А.О. Лопушанський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – Т.49, №4. – С. 19 - 27.

[81] *Лопушанський А.О.* Числення секторіальних операторів з від'ємним типом: аналітичність на проміжних просторах / А.О. Лопушанський // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2007.– – Т.48, №2. С. 36 - 47.

[82] *Лопушанський А.О.* Розв'язок крайової задачі для параболічного рівняння, збуреного псевдо-диференціальним доданком / А.О. Лопушанський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. –2006. –Вип. 66. – С. 115-127.

[83] Лопушанський А.О. Регулярність розв'язків абстрактної задачі Коші для півлінійного параболічного рівняння / А.О. Лопушанський // Вісник наук. тов-ва ім. Т. Шевченка. – Сер. математична. – 2011. – Т. 8. – С. 122-132.

[84] *Лопушанський А.О.* Нелінійні збурення параболічних крайових задач у просторах беселевих потенціалів / А.О. Лопушанський // Вісник наук. тов-ва ім. Т. Шевченка. – Сер. математична. – 2012. – Т. 9. – С. 100-109.

[85] *Лопушанський А.О.* Нелінійні операторні рівняння в комплексних інтерполяційних шкалах / А.О. Лопушанський // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2011. – Т.9. – С. 63 - 73.

[86] *Лопушанський А.О.* Нелінійні рівняння типу Гаммерштейна у просторах беселевих потенціалів / А.О. Лопушанський // Вісник НУ "Львівська політехніка". – Фіз.-мат. науки. –2011. – Т. 718, №718.– С. 40-45.

[87] *Лопушанський А.О.* Розв'язність півлінійної параболічної задачі Коші, збуреної на комплексних інтерполяційних шкалах / А.О. Лопушанський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. –2011. – Вип. 75. – С. 158-169.

[88] *Лопушанський А.О.* Збурена абстрактна задача Коші для рівняння з дробовою похідною за часом / А.О. Лопушанський // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – 2012. – Вип. 9. – С. 70-76.

[89] *Лопушанський А.О.* Розв'язок задачі Коші для рівнянь з дробовими похідними в просторах узагальнених функцій / А.О. Лопушанський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77.– С. 132-144.

[90] *Лопушанський А.О.* Розв'язність оберненої крайової задачі для рівняння з дробовою похідною / А.О. Лопушанський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2014. – Вип. 79.– С. 97-110.

[91] *Лопушанський А.О.* Регулярність розв'язків крайових задач для дифузійно-хвильового рівняння з узагальненими функціями в правих частинах / А.О. Лопушанський // Карп. матем. публікації. – 2013.– Т. 5, №2. – С. 279-289.

[92] *Лопушанський А.О.* Збурення лінійних параболічних рівнянь у комплексних інтерполяційних просторах / А.О.Лопушанський // Диф. рівняння та їх застосування, м. Чернівці, 11-14 ж. 2006 р. – Тези доп. – С. 93.

[93] *Лопушанський А.О.* Про експоненту диференціювань за некомутативними напрямками / А.О.Лопушанський // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я. Скоробогатька, м. Дрогобич, 24-28 вер. 2007 р. – Тези доп. – Львів, 2007. – С. 171.

[94] *Лопушанський А.О.* Оператори Гріна задачі Коші для рівняння дифузії з дробовою похідною за часом / А.О.Лопушанський, О.В. Пасічник // Конф. мол. учених із суч. проблем мех. і мат. ім. ак. Я.С.Підстригача, м. Львів, 25-27 тр. 2009 р. – Тези доп. – С. 217-219.

[95] *Лопушанський А.О.* Збурена абстрактна задача Коші з дробовою похідною за часом / А.О.Лопушанський // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я. Скоробогатька, м. Дрогобич, 19-23 вер. 2011 р. – Тези доп. – Львів, 2007. – С. 118.

[96] *Лопушанський А.О.* Збурена абстрактна задача Коші для рівняння з дробовою похідною за часом / А.О.Лопушанський // Всеукр. наукова конф. "Застосування математичних методів в науці і техніці м. Луцьк, 24-26 лист. 2011 р. – Збірник тез доп. – Луцьк, 2011. – С. 45-46.

[97] *Лопушанський А.О.* Регулярність розв'язків абстрактної задачі Коші для півлінійного рівняння / Лопушанський А.О. // Всеукр. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці" , 11-13 черв. 2012, Чернівці. – Матеріали конф. – Чернівці, 2012. – С. 105.

[98] *Лопушанський А.О.* Нелінійні операторні рівняння в комплексних інтерполяційних шкалах / А.О. Лопушанський // Міжнародна конференція "Геометрія в Одесі - 2012. Диференціальна геометрія та застосування". Одеса, 17 тр.-29 тр. - Тези доп.– Одеса-2012. – С. 52-53.

[99] *Лопушанський А.О.* Регулярність розв'язку задачі Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною / А.О.Лопушанський // П'ятнадцята міжнар. наукова конф. ім. ак. М. Кравчука, м. Київ, 15-17 кв. 2014 р. – Матеріали конф. I. – Київ, 2014. – С. 199-200.

[100] *Лопушанський А.О.* Одна обернена крайова задача для дифузійно-хвильового рівняння з дробовою похідною / А.О. Лопушанський, Г.П. Лопушанська // Укр. матем. журн. – 2014. – Т. 66, №5. – С. 655-667.

[101] *Лопушанський А.О.* Обернені крайові задачі для дифузійно-хвильового рівняння з узагальненими функціями в правих частинах / А.О. Лопушанський, Г.П. Лопушанська // Карп. матем. публікації. – 2014. – Т. 6, №1. – С. 79-90.

[102] *Лопушанський А.О.* Розв'язок задачі Коші зі значеннями в уточнених просторах беселевих потенціалів / А.О. Лопушанський, Г.П. Лопушанська // Збірник праць Ін-ту математики НАН України.–2015.– Т. 12, №2.– 250-275.

[103] *Лопушанський А.О.* Обернена задача у просторі узагальнених функцій / А.О. Лопушанський, Г.П. Лопушанська, В.Р.Рапіта // Укр. матем. журн.– 2016. – Т. 68, №2. – С. 241-253.

[104] *Лопушанський А.О.* Регулярність розв'язку задачі Коші для рівняння з дробовою похідною / А.О. Лопушанський // Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування" присв. 70-річчю ак. НАН України Перестюка М.О., Ужгород, 19-21 тр. 2016 р. – Тези доп. – С. 92.

[105] *Лопушанський А.О.* Обернені крайові задачі для дифузійно-хвильового рівняння з узагальненими функціями в правих частинах / А.О.Лопушанський, Г.П. Лопушанська // IV міжнар. Ганська конф., присвячена 135 річниці від дня нар. Ганса Гана. – м. Чернівці, 30 червня–5 липня 2014 р. – Тези доп. – С. 98 – 99.

[106] *Лопушанський О.В.* Операторне числення на ультрагладких векторах / О.В. Лопушанський // Укр. матем. журн. – 1992. – Т.44, №4. – С.502-513.

[107] *Лопушанський О.В.* Операторне числення в алгебрах розподілів експоненціального типу / О.В. Лопушанський, В.Я. Лозинська // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т.43, №3. – С. 24-33.

[108] *Любич Ю. И.* К спектральной теории линейных операторов в банаховом пространстве / Ю. И. Любич, В. И. Мацаев // ДАН СССР. – 1960. – Т.31, №1 . – С. 21-23.

[109] *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

[110] *Маслов В.П.* Асиптотические методы теории возмущений / В.П. Маслов. – М.: Наука, 1987.

[111] *Маслов В. П.* Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений / В.П. Маслов. – М.: Наука, 1987.– 408 с.

[112] *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными – М.: Мир, 1977. – 504 с.

[113] *Михайлец В.А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи / В.А. Михайлец, А.А. Мурач – К.: НАН України, Інститут математики, 2010. – 372 с.

[114] *Михайлов В.П.* О граничных свойствах решений эллиптических уравнений / В.П. Михайлов // Мат. заметки. 1980. Т. 27, №1. – С. 137-145.

[115] *Петрушко И.М.* О граничных и начальных значениях решений параболического уравнения второго порядка / И.М. Петрушко // Докл. АН СССР.– 1962.– Т. 266, №3.– С. 557-560.

[116] *Петунин Ю.И.* Об одной концепции обобщенного решения операторных уравнений в банаховом пространстве / Ю. И. Петунин // Укр. мвтем. журн. – — 1996. — Т. 48, № 9. — С. 1286–1290.

[117] *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М Никольский. – М.: Наука, 1969. – 480 с.

[118] *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М Никольский. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

[119] *Прилепко А.И.* Обратные задачи теории потенциала / А.И. Прилепко // Мат. заметки. – 1973. – Т. 14. – Вып. 5. – С. 755-765.

[120] *Прудников А.П.* Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

[121] *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху. – М.: Наука, 2005.– 199 с.

[122] *Пташник Б.Й.* Нелокакльні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

[123] *Пулькина Л.С.* Нелокальная задача для уравнения теплопроводности / Л.С. Пулькина // Неклассические задачи математической физики. ИМ СО А. Новосибирск. – 2005. – С. 231-239.

[124] *Пукальський І.Д.* Нелокальна параболічна крайова задача та задача оптимального керування для лінійних рівнянь з виродженням / І.Д. Пукальський // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2012. –Вип. 10. –С. 102-114.

[125] *Радыно Я.В.* Пространство векторов экспоненциального типа / Я.В. Радыно // Докл. АН БССР. – 1983. – Т.27, №9.– С. 791-793.

[126] *Радыно Я.В.* Функции от коммутирующих неограниченных операторов / Я.В. Радыно, Т. Зерзайхи // Докл. АН БССР. – 1989. – Т.33, №8.– С. 684-686.

[127] *Радзиевский Г.В.* О наилучших приближениях и о скорости сходимости разложений по корневым векторам оператора / Г.В. Радзиевский // Укр. мат. журн.– 1997. – Т. 49, No.6. – С. 754–773.

[128] *Рид М.* Методы современной математической физики: Пер. с англ./ М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 1978. Т.1. – 450 с.

[129] *Рид М.* Методы современной математической физики: Пер. с англ. / М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 1978. Т.2. – 400 с.

[130] *Робертсон А.* Топологические векторные просторанства / А. Робертсон, В. Робертсон – М.: Мир, 1967.

[131] *Ройтберг Я.А.* Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях.I. Препринт / Я.А. Ройтберг. - Чернигов: Пединститут, 1990. – 73 с.

[132] *Рудин У.* Функциональный анализ / У. Рудин. – М.: Мир, 1975. – 443 с.

[133] *Соболев С.Л.* Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1989. – 254 с.

[134] *Соболевский П.Е.* Уравнения параболического типа в банаховых пространствах / П.Е. Соболевский // Труды Моск. матем. общ. – 1964, т.10. – р. 297-350.

[135] *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциалных уравнений общего вида / В.А. Солонников // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1965. – Т. 83. – С. 3-162.

[136] *Солонников В.А.* Оценки решений параболических начально-краевых задач в весовых гельдеровских нормах / В.А. Солонников, А.Г. Хачатрян // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – Т. 147. – С. 147-155.

[137] *Сретенский Л.Н.* Теория ньютоновского потенциала / Л.Н Сретенский. – М.: Гостехиздат, 1946. – 317 с.

[138] *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы / М. Тейлор. – М.: Мир, 1985. – 472с.

[139] *Титчмарш Е.* Теория функций / Е. Титчмарш. – М.: Наука, 1980.—464 с.

[140] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М., 1980.

[141] Функциональнyй анализ. Под общей редакцией *С.Г. Крейна* (Серия "Справочная мат. б-ка") . – М.: Наука, 1972. – 544с.

[142] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

[143] *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М., 1985.

[144] *Хермандер Л.* Теория распределений и анализ Фурье / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1986. – 462 с.

[145] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1 / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1986. – 462 с.

[146] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.3 / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1988. – 550 с.

[147] *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы: Пер. с англ. / Э. Хилле, Р. Филлипс– М.: ИЛ, 1962. – 830 с.

[148] *Шефер Г.* Топологические векторные пространства / Г. Шефер. – М.: Мир, 1971. – 359с.

[149] *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальний курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965.–328 с.

[150] *Эйдельман С.Д.* Параболические системы / С.Д. Эйдельман. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

[151] *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of elliptic boundary value problems / S. Agmon // Comm. Pure Appl. Math. – 1962. – Vol. 15. – P. 119-147.

[152] *Agmon S.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions / S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. – 1959. – Vol. 12. – P. 623-727.

[153] *Aleroev T.S.* Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determination condition / T. S. Aleroev, M. Kirane, S. A. Malik // Electronic J. of Differential Equations. – 2013. – V. 2013, №270. – P. 1–16.

[154] *Amann H.* Linear and quasilinear parabolic problem. Vol. 1 / H. Amann. – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1995. –372 p.

[155] *Anh V.V.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas / V.V. Anh and N.N. Leonenko // J. of Statistical Physics. – 2001. –104(5/6): 1349-1387.

[156] *Arendt W.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems / W. Arendt, C. Batty, M. Hieber and F. Neurander. – Monographs in Mathematics. – Berlin: Birkhaeuser-Verlag, 2001.

[157] *Aron R.* An introduction to polynomials on Banach spaces / R. Aron // Extracta Mathematics. – Vol. 17, №3.– 2002. – P. 303–329.

[158] *Baker J.* Banach spaces of analytic functions. Lectures Notes in Math. / ed. J. Baker, C. Cleaver, J. Diestel. – Springer-Verlag, 1977. – Vol. 604.

[159] *Balakrishnan A.* Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them / A. Balakrishnan // Pacific J. Math.–1960. – V. 10, №2. – P. 419-439.

[160] *Baeumer B.* Stochastic solutions for fractional Cauchy problems / B. Baeumer and M. Meerschaert // Frac. Calc. Appl. Alal. – 2001.–4. – P. 481-500.

[161] *Baeumer B.* Inhomogeneous fractional diffusion equations / B. Baeumer, S. Kurita, M. Meerschaert // Frac. Calc. Appl. Alal.– 2005. – 8,№4. – P. 371-381.

[162] *Baeumer B.* Unbounded functional calculas for bounded groups with applications / B.Baeumer, M. Haase and M. Kovcs // J. Evol. Eqn. – 2009. – V. 9. – P. 171-195.

[163] *Bazhlekova E.* The abstract Cauchy problem for fractional evolution equations / E. Bazhlekova // Frac. Calc. Appl. Alal. – 1998.– 1,№3. – P. 255-270.

[164] *Bednarz A.* Exponential Type Vectors in Wiener algebras on a Banach ball / A. Bednarz// Opuscula Matematica. – 2008. – Vol. 28, No. 1. – P. 5-17.

[165] *Bednarz A.* Exponential Type Vectors of Isometric Group Generators / A. Bednarz, O. Lopushansky // Matematychni Studii (Proceedings of the Lviv Mathematical Society). – 2002. – Vol. 18, No. 1.– P. 99-106.

[166] *Berezanski Yu. M.* Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis / Yu. M. Berezanski, Yu. G. Kondratiev. – Kluwer Acad. Publ.: Dordrecht, 1995.

[167] *Bergh J.* Interpolation spaces / J. Bergh, J. Löfström. – Springer-Verlag, 1976.

[168] *Bieberbach L.* Analytische fortsezung / L. Bieberbach. – Springer-Verlag, 1956.

[169] *Bochnak J.* Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces / J. Bochnak, J. Siciak // Studia Mathematica, – 1970. – Vol. XXXIX. – P. 59–76.

[170] *Bong Chae S.* Holomorphy and Calculus in Normed Spaces. Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks / S. Bong Chae. – New York: Marcel Dekker, Inc., 1985.

[171] *Calderon A.P.* Intermediate spaces and interpolation / A.P. Calderon // Studia Math. Seria specjalna. – 1963. No 1. – P.31-34.

[172] *Calderon A.P.* Intermediate spaces and interpolation, the complex method / A.P. Calderon // Studia Math. – 1964. -24. – P.113-190.

[173] *Caputo M.* Liner model of dissipation whose Q is almost frequency independent / M. Caputo // — II. Geophys. J. R. Astr. Soc. – 1967.– 13.– P. 520-539.

[174] *Caputo M.* Linear model of dissipation in an elastic solids / M. Caputo and P. Minardi // Rev. Nuovo Cimento (Ser. II)– 1971. – Vol. 1. – P. 161-198.

[175] *Cheng J.* Uniqueness in an inverse problem for a one-dimentional fractional diffusion equation / J. Cheng, J. Nakagawa, M. Yamamoto and T. Yamazaki // Inverse Problems.– 2009. – Vol. 25, No 11. – P. 1-16.

[176] *Clément Ph.* One-Paramenerts Semigroups / Ph. Clément, H.J.A.M. Heijmans, S. Angenent, C.J. van Duijn and B. de Pagter. – North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1987.

[177] *Cuesta E.* Asymptotic behaviour of the solutions of functions integro-differential equations and some time descritizations / E. Cuesta // Descrete Cont. Dyn. Sys. – 2007. – P. 277-285.

[178] *Cuevas C.* Almost automorphic solutions to a class of semilinear fraction differential equations / C. Cuevas, C. Lizama // Applied Mathematics Letters. – 2008. – 21. – P. 1315-1319.

[179] *Cuevas C.* Almost automorphic solutions in integral equations on the line / C. Cuevas, C. Lizama // Semigroup forum 78(2009), doi 10.1007 /s00233-009-9154-0.

[180] *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces / S. Dineen. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.

[181] *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces / S. Dineen. – Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.

[182] *Duan J. Sh.* Time- and space-fractional partial differential equations / Jun Sheng Duan // J. Math. Phis. – 2005. – 46 (013504).

[183] *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei. – Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004. – 390p.

[184] *El-Borai M. M.* On the solvability of an inverse fractional abstract Cauchy problem / M.M. El-Borai // LJRRAS. – 2010. – Vol. 4. – P. 411–415.

[185] *Fantappié L.* I funzionali analitici / L. Fantappié // Memorie della R. Academia Nazionale dei Lincei. – 1930. – Vol. 6/3, №11. – P. 453–683.

[186] *Floret K.* Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces / K. Floret // Note di Matematica. – 1997. – Vol. 17. – P. 153-188.

[187] *Fréchet M.* Une definition fontionelle des polinomes / M. Fréchet // Nouv. Ann. Math. – 1909. – Vol. 9. – P. 145–162.

[188] *Gamelin T. W.* Analytic Functions on Banach Spaces in Complex potential theory / T. W. Gamelin / Nato Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci., Vol. 439: Kluwer Acad. Publ., 1994.

[189] *Gâteaux R.* Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analitiques / R. Gâteaux // C. R. Acad Sci. Pris, Sŕer. A. – 1913. – Vol. 157. – P. 325–327.

[190] *Gâteaux R.* Fonctionnelles d'une infinitŕe des variables indŕependantes / R. Gâteaux // Bull. Soc. Math. Frane. – 1919. – Vol. 47. – P. 70–96.

[191] *Gorenfio R.* Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order / R. Gorenfio, P. Minardi. – In A. Carpinteri and P. Minardi editors. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, pages 223-276, V. 378 of CISM Lecture Notes: Springer-Verlag, Wien and New-York, 1997.

[192] *Grisvard P.*. Équations operationnelles abstraites et problémes aux limites dans des domaines non réguliers// Actes. Congrés Intern. Math. 1971, V. 2, p. 731-736.

[193] *Da Prato G.* Sommes d'opŕateurs non linéares et équations differentielles opérationelles / G. Da Prato, P. Grisvard // J. Math. Pures Appl. – 1979. – Vol. 54. – P. 305-387.

[194] *Da Prato G.* Equations d'évolotion abstraites non linéaire de type parabolique / G. Da Prato, P. Grisvard // Ann. Mat. Pure Appl. – 1979. – Vol. 120, №. 4. – P. 329-396.

[195] *Grisvard P.* Alcuni risultati di teoria spettrale per i problemi ai limiti lineari ellittici / P. Grisvard, G. Geymonat // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova – 1967. – Vol. 38. – P. 121-173.

[196] *Grotendieck A.* Produits tensoriel topologues et espases nucleaire / A. Grotendieck // Mem. Amer. Math. Soc. – 1955. – V. 16, №2. – P. 1-140.

[197] *Grothendieck A.* Résumé de la théorie métrique des produits tensorels topologiques / A. Grotendieck // Bol. Soc Math São Paulo. – 1953. – 8. – P. 1-79.

[198] *Haase M.* The functional calculus for sectorial operators / M. Haase // Operator Theory: Advances and Applications, 169. – Basel: Birkhuser Verlag, 2006.

[199] *Hatano Y.* Determination of order in fractional diffusion equation / Y. Hatano, J. Nakagawa, Sh. Wang and M. Yamamoto // Journal of Math-for-Industry. – 2013. – Vol. 5A. – P. 51-57.

[200] *Hervé M.* Analyticity in Infinite Dimensional Spaces / M. Hervé // De Gruyter Stud. in Math., Vol. 10. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1989.

[201] *Hille E.* Functional Analysis and Semi-groups / E. Hille, R. Phillips. – AMS reprint, 2000.

[202] *Hille E.* Functional Analysis and Semi-Groups / E. Hille and R.S. Phillips // American Mathematical Society, Colloquium Publications. – Vol. 31, 1957.

[203] *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / M. Ivanchov. – Math. Studies: Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003.– Vol. 10. – 238 p.

[204] *Jim B.* A turorial on inverse problems for anomalous diffusion processes / B. Jim, W. Rundell // Inverse Problems.– 2015. V. 31, 035003(40pp).– doi:10.1088/0266-5611/31/3/035003.

[205] *Karamata J.* Sur certains "Tauberian theorems"de M.M. Hardi et Littlewood Mathematica (Cluj) / J. Karamata. – 1930. – **3**. – P. 33-48.

[206] *Kato T.* Pertubation theory for linear oparetors / T. Kato. – Berlin, New York: Springer. 1966.

[207] *Kilbas A.A.* H-Transforms: Theory and Applications / A.A. Kilbas, M. Sajgo. – Boca-Raton: Chapman and Hall/CRC, 2004.– 401 p.

[208] *Levin B. Ya.* Lectures on Entire Functions / B. Ya. Levin. – Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society. – 1996. – Vol. 150.

[209] *Levinson N.* Gap and density theorems / N. Levinson. – Nowy York, 1940.

[210] *Lindsay J. M.* Quantum stochastic calculus / J. M. Lindsay. – Lecture notes for lectures given at the Spring School, Quantum Independent Increment Processes. Structure and Applications to Physics 2–22 March 2003, Greifswald, Germany.

[211] *Lions J.L.* Theoremes de trace et d'interpolation / J.L. Lions // I. –Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa. -1959. -13. -P.289-403; II–ibid. -1960. -14. -P.317-331; III – J. Math. Pures Appl. -1963. -42. -P.195-203; IY –Math. Ann. -1963. -151. -P.42-56; Y –An. Acad. Brasileira Ciencias. – 1963. V. 35. – P.1-10.

[212] *Lions J.L.* Une construction d'espases d'interpolation / J.L. Lions // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1960. – V. 251. – P.1853-1856.

[213] *Lions J.L.* Problemes aux limites non homogenes et applications. V.3 / J.L. Lions, E. Magenes.– Paris: Dunod, 1970. – 328 p.

[214] *Lopushanska H.* Inverse problem in a space of periodic spatial distributions for a time fractional diffusion equation / H. Lopushanska, A. Lopushansky, O. Myaus // Electronic J. Diff. Equ. – 2016. – Vol. 2016, №14. – P. 1-9.

[215] *Lopushansky A.* Sectorial operators on Wiener algebras of analytic functions / A. Lopushansky // Topology. – 2009. – Vol. 48, №2-4. – P. 105-110.

[216] *Lopushansky A. O.* Derivate in noncommutative Banach algebras International conference / A.O. Lopushansky //Nonlinear differential equations.– Kyiv. Book of Abstr. – 1995. – P. 61.

[217] *Lopushansky A. O.* On analyticity of the solutions of evolutionary equations generated by elliptic operators perturbations / A.O. Lopushansky // Matematychni Studii. – 1999. – T. 12, №2, p. 145-148.

[218] *Lopushanskyj A. O.* Non-homogeneous fractional boundary value problems in spaces of generalized functions / A.O. Lopushanskyj, H.P. Lopushanska // Visnyk Lviv. Un-ty. Ser. Mech.-Mat. – 2012. – Vol. 78. – P. 92–107.

[219] *Lopushansky A. O.* About unbounded perturbations of the mixed nonhomogeneous parabolic boundary problems / A.O. Lopushansky // II Summer School in Algebra and Topology. Dolyna, Aug. 2-14, 2004. – Program of Invited Lectures and Abstracts of Reseach Reports. – Lviv-Dolyna, 2004. – P. 22-23.

[220] *Lopushansky A. O.* The solution of the boundary value problem for parabolic equation with pseudo-differential terms / A.O. Lopushansky // Int. Conf. on Dif. Eq. dedicated to 100-Annyv. of Yu. Lopatynsky. – Lviv, 12-17 Sept. 2006. – Book of Abstr. –Lviv, 2006. – P. 118-119.

[221] *Lopushansky A. O.* Analytic functions of sectorial operators: perturbations on complex interpolation subspaces / A.O. Lopushansky // Int. Conf. "Infinite Dimational Analysis and Topology Івано-Франківськ-Яремче, 27 тр.-1 чер. 2009.

[222] *Lopushansky A. O.* Of an approximation of solutions of abstract parabolic equations / A.O. Lopushansky // Conf. on Numerical Analysis and Applied Mathematics, Rethym, Greece, 18-22 Sept. 2009.

[223] *Lopushansky A. O.* Analytic semi-groups in Wiener Algebras over Banach balls / A.O. Lopushansky // Міжнар. конф. з функц. аналізу до 90-річчя В.Е. Лянце.– Львів, 17-21 лист. 2010 р. – Тези доп. – С. 44.

[224] *Lopushansky A. O.* Non-homogeneous fractional boundary value problems in spaces of generalized functions / A.O. Lopushansky, H.P. Lopushanska // Int. Conf. dedicated to the 120-th Anniversary of Stefan Banach, Sept. 17-21, 2012, Lviv: book of abstracts. – Lviv, 2012. – P. 214.

[225] *Lopushansky A. O.* Boundary value problems for semi-linear parabolic equations in Bessel potentials' spaces / A.O. Lopushansky // Int. Conf. dedicated to the 120-th Anniversary of Stefan Banach, Sept. 17-21, 2012, Lviv: book of abstracts. – Lviv, 2012. – P. 215.

[226] *Lopushansky A. O.* One inverse problem to fractional diffusion-wave equation in bounded domain / A.O. Lopushansky, H.P. Lopushanska // V всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу".– м. Івано-Франківськ, 19-21 вер. 2013 р. – Тези доп. – С. 86.

[227] *Lopushansky A. O.* Inverse coefficient problems for equations with fractional derivatives / A.O. Lopushansky, H.P. Lopushanska, V. Rapita // ISMC (Int. V. Skorobohatko Math. Conf.), August 25-28, 2015, Drogobych, Ukraine.– Abstracts. – P. 98.

[228] *Lopushansky O.* Vectors of exponential type of operators with discrete spectrum / O. Lopushansky, M. Dmytryshyn // Matematychni Studii (Proceedings of the Lviv Mathematical Society). – 1998. – Vol. 9, No.1.– P. 70-77.

[229] *Lopushansky O.* Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum / O. Lopushansky, M. Dmytryshyn / In "General Topology in Banach Spaces Nova Sci. Publ. Huntingon, New York, 2001. – P. 137-145.

[230] *Lopushansky O.* Hilbert spaces of analytic functions of infinitely many variables / O. Lopushansky, A. Zagorodnyuk // Annales Polonici Mathematici. – 2003. – Vol. 81, No. 2. – P. 111–122.

[231] *Luchko Yu.* Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation / Yu. Luchko // J. Math. Anal. Appl. – 2009. – Vol. 351. – P. 409-422.

[232] *Luchko Yu.* Boundary value problem for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order / Yu. Luchko // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2009.– Vol. 12, №4. – P. 409-422.

[233] *Lunardi A.* Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic equations / Lunardi A. – Basel: Birkchäser, 1995.– 435 p.

[234] *Martin R.S.* Contributions to the theory of functionals / R. S. Martin. – Ph.D. thesis, University of California, 1932.

[235] *Mazur S.* Grundlegende eigenschaften der polynomischen operationen I, II / S. Mazur, W. Orlicz // Studia Math. – 1935. – Vol. 5. – P. 50–68, 179–189.

[236] *Mazur S.* Sur la divisibilitŕe des polynomes absraits / S. Mazur, W. Orlicz // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1936. – Vol. 207. – P. 621–623.

[237] *Meerschaert M.M.* Fractional Cauchy problems on bounded domains / Meerschaert M.M., Nane Erkan, Vallaisamy P. // Ann. Probab. **37** (2009), 979-1007.

[238] *Michal A. D.* Fonctions analytiques implicites dans des espaces vectoriels abstraits / A. D. Michal, A. H. Clifford // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1933. – Vol. 197. – P. 735–737.

[239] *Michal A. D.* Some expansions in vector spaces / A. D. Michal, R. S. Martin // J. Math. Pures. Appl. – 1934. – Vol. 13, N. 9. – P. 69–91.

[240] *Mujica J.* Complex Analysis in Banach spaces / J. Mujica. – Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland, 1986.

[241] *Myaus O.* Functional calculus on a Wiener type algebra of analytic functions of infinite many variables / O. Myaus // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2012. – Вип. 76. –С. 231-237.

[242] *Nachbin L.* Topology on spaces of holomorphic mappings / L. Nachbin. – New York: Springer-Verlag, Erd. der Math., Vol. 47, 1969.

[243] *Nakagawa J.* Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration / J. Nakagawa, K. Sakamoto and M. Yamamoto // Journal of Math-for-Industry.– 2010. – Vol. 2A. – P. 99-108.

[244] *Nelson E.* Analitycal vectors / E. Nelson // Ann. of Math. – 1969. – Vol. 70. – P. 572–615.

[245] *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / A. Pazy // Applied Mathematical Sciences. – New York, Springer-Verlag, 1983. – Vol. 44.

[246] *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations / A. Pazy. – Berlin, New York: Springer, 1992.

[247] *Peetre J.* Nouvelles proprietes d'espaces d'interpolation / J. Peetre // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1963. – Vol. 256. – P.1424-1426.

[248] *Peetre J.* A theory of interpolation of normed spaces / J. Peetre // Notes Universidade de Brasilia. 1963 [Notes de matematica. – 1968. V. 39].

[249] *Podlubny I.* Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineearing / I. Podlubny. – Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1993.

[250] *Plansherel M.* Fonctions entiéres et intégrales de Fourier multiples / M. Plansherel, G. Polya // Comment. Math., Helvetici. – 1937. – Vol. I. – P. 224–248.

[251] *Plansherel M.* Fonctions entiéres et intégrales de Fourier multiples / M. Plansherel, G. Polya // Comment. Math., Helvetici. – 1938. – Vol. II. – P. 110–163.

[252] *H. Pollard* The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_\alpha(-x)$ / H. Pollard // Bull. Amer. Math. Soc. – 1948. – Vol. 8, №5. – P. 602-613.

[253] *Povstenko Yu.* Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and enginears / Y. Povstenko. – New-York, Birkhauser, 2015. – 460 p. ISBN: 978-3-319-17953-7.

[254] *Da Prato G.* Abstrac differential equations and extrapolation spaces / G. Da Prato // In infinite-dimentional system, Retzhof 1983, p. 53-61. Lecture Notes in Math. – Berlin: Springer. – 1984.

[255] *Da Prato G.* Equations d'évolotion abstraites non linéaire de type parabolique / G. Da Prato., P. Grisvard // Ann. Mat. Pure Appl. – 1979. – Vol. 120. – N 4. – P. 329-396.

[256] *Da Prato G.* Maximal regularity for evolution equations by interpolation and extrapolation / G. Da Prato, P. Grisvard // J. Funct. Anal. – 1984. – Vol. 58. – N 4. – P. 107-124.

[257] *Pruss J.* Evolutionary Integral Equations and Applications / J. Pruss. – Monographs Math., 87, Birkhauser Verlag, 1993.

[258] *Rabinovich V.* Wiener algebras of operators, and applications to pseudodifferential operators / V. Rabinovich and S. Roch // Zeitschrift Anal. Anwend. – 2004.– Vol. 23, №. 3. – P. 437–482

[259] *Reed M.* Methods of modern mathematical physics. Vol. 2 / M. Reed, B. Simon. – New York, London: Academic Press, 1975.

[260] *Rudin W.* Analiza funkcjonalna / W. Rudin. – PWN, Warszawa 2002.

[261] *Rundell W.* The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation / W. Rundell, X. Xu and L. Zuo // Applicable Analysis. – 2012. – V. 1. – P. 1-16.

[262] *Sakai S.* Operator Algebras in Dynamic Systems / Sakai S. – Cambridge, New York, Sydney: Cambridge University Press, 1991.

[263] *Saichev A.* Fractional kinetic equations: solutions and applications / A. Saichev and G. Zaslavsky // Chaos. – 1997. – Vol. 7, №4. – P. 759-764.

[264] *Schaefer H.* Topological Vector Spaces / H. Schaefer. – Springer, 1971.

[265] *Schechter M.* Interpolation spases by complex methods / M. Schechter // Bull. Amer. Math. Soc. – 1966. – Vol. 72. – P. 526-533.

[266] *Schechter M.* Complex interpolation / M. Schechter // Compositio Math. – 1967. – Vol. 18. – P. 117-147.

[267] *Schechter M.* Principles of functional analysis / M. Schechter. – New York, London: Acad. press, 1971. – 383 p.

[268] *Schwarts L.* Theorie des sidtribution, I / L. Schwarts. – Hermann, 1950. – 430p.

[269] *Schwarts L.* Theorie des sidtribution, II / L. Schwarts. – Paris, 1951. – 476 p.

[270] *Seeley R.* Interpolation in L_p with boundary conditions / R. Seeley // Studia Math. – 1972.– Vol. 44. – P. 47-66.

[271] *Srivastava H.M.* The H-functions of one and two variables with applications / H.M. Srivastava, K.C. Gupta and S.P. Goyal. – New Dehli: South Asian Publishers, 1982.

[272] *Tanabe N.* Equations of evolution / N. Tanabe. – London: Pitman, 1979.

[273] *Taylor A. E.* Spectral theory of closed distributive operators / A. E. Taylor // Acta Math. – 1951. – Vol. 84. – P. 189-224.

[274] *Taylor A. E.* Additions to the theory of polynomials in normed linear spaces / A. E. Taylor // Tohoku Math. Journal. – 1938. – Vol. 44. – P. 302–318.

[275] *Taylor A. E.* Notes on the history of the uses of analyticity in operator theory / A. E. Taylor // Amer. Math. Monthly. – 1971. – Vol. 78. – P. 331–342.

[276] *Wiener N.* Tauberian theorems / N. Wiener // Ann. of Math.– 1932. – Vol. 33. – P. 1–100.

[277] *Yagi A.* Abstract parabolic evolution equations and there applications / A. Yagi. // Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer. – 2010.– 581 p.

[278] *Yosida K.* On the differentiability and the representation of one-parameter semigroups of linear operators / K. Yosida // J. Math. Soc. Jpn. – 1948. – V. 1. – P. 15–21.

[279] *Zacher R.* Maximal regularity of type L_p for abstract parabolic Volterra equations / R. Zacher // J. Evol. Equ. – 2005. – Vol. 5. – P. 79-103.

[280] *Zaslavsky G.* Fractional kinetic equations for Hamiltonian chaos / G. Zaslavsky // Phys.D. – 1994. – Vol. 76. – P. 110-122.

[281] *Zhang L.* Fractional Cauchy problems with almost sectorial operators / L. Zhang, Y. Zhou // Appl. Math. Comput. – 2015. – V. 257. – P. 145-157.

[282] *Zhang Y.* Inverse source problem for a fractional diffusion equation /Y. Zhang and X. Xu // Inverse problems.– 2011. – Vol. 27, №3. – P. 1-12.