МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

імені ІВАНА ФРАНКА

ЦЕБЕНКО Андрій Миколайович

УДК 517.956

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2017

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь
Львівського національного університету імені Івана Франка
Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Бокало Микола Михайлович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
професор кафедри диференціальних рівнянь.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Пукальський Іван Дмитрович,
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Процах Наталія Петрівна,
Національний лісотехнічний
університет України,
професор кафедри вищої математики.

Захист відбудеться __________ 2017 року о _____ на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий _______________ 2017 р.

В. о. вченого секретаря
спеціалізованої вченої ради,
професор С. М. Шахно

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню задач оптимального керування процесами, які моделюються задачами без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей.

Оптимальне керування системами, що описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними, є надзвичайно плідним полем для досліджень та джерелом для багатьох складних математичних проблем та цікавих застосувань. Популярність такого роду досліджень пов'язана з їх активним використанням при вирішенні проблем природознавства, зокрема, гідро- і газодинаміки, фізики тепла, фільтрації, дифузії, плазми, теорії біологічних популяцій.

Основи теорії оптимального керування детермінованими системами, що описуються рівняннями з частинними похідними, закладено у відомій монографії Ж.-Л. Ліонса (1972 р.). Пізніше ця тематика активно розвивалася багатьма математиками, серед яких А. М. Самойленко, М. З. Згуровський, В. О. Капустян, І. Г. Баланенко, І. Д. Пукальський, Л. А. Власенко, Л. Волошко, Ж.-П. Раймонд (J.-P. Raymond), С. Ленхарт (S. Lenhart), Ф. Тролтщ (F. Troltzsch), З. Лу (Z. Lu), І. В. Бушуєв (I. V. Bushuev), Е. Казас (E. Casas), Дж. Бінтз (J. Bintz), Х. Фінотті (H. Finotti), К. Р. Фістер (K. R. Fister), А. Х. Хейтер (A. H. Khater), А. Б. Шамарданб (A. B. Shamardanb), С. Х. Фараг (S. H. Farag), Х. О. Фатторіні (H. O. Fattorini). Оптимальне керування системами, стан яких описується варіаційними нерівностями, також досить добре досліджені. Це зроблено, зокрема, в працях П. І. Когута, О. П. Когут, О. П. Купенка, Д. Р. Адамса (D. R. Adams), В. Барбу (V. Barbu), Ф. Берніса (F. Bernis), М. Букруша (M. Boukrouche), К. Іто (K. Ito), К. Куніша (K. Kunisch), С. Ленхарт (S. Lenhart), Г. Р. Легерінга (G. R. Leugering), Р. Манзо (R. Manzo), Д. А. Тарзіа (D. A. Tarzia). Зауважимо, що у цих дослідженнях розглядалось оптимальне керування системами, стан яких описується розв'язками задач для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей з початковими умовами.

Систематичне вивчення задач без початкових умов для еволюційних рівнянь розпочалось із добре відомої праці А.М. Тіхонова (1935 р.), де було показано, що єдиність розв'язку задачі без початкових умов для рівняння теплопровідності гарантується певними умовами на поведінку розв'язку при $t \to -\infty$, наприклад, його обмеженістю. Проте згодом у працях М. М. Бокала (1984–1986 рр.) було показано, що для деяких нелінійних параболічних рівнянь розв'язок задачі без початкових умов єдиний у класі функцій з довільною поведінкою при $t \to -\infty$. Задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей досліджували, зокрема, С. Д. Ейдельман, О. А. Олійник, С. Д. Івасишин, О. А. Панков, М. Д. Мартиненко, Л. Ф. Бойко, В. П. Лавренчук, М. І. Матійчук, М. М. Бокало, С. П. Лавренюк, Н. П. Процах, П. Я. Пукач, О. М. Бугрій, Т. М. Балабушенко, Ю. Б. Дмитришин, Є. І. Моісеєв.

На даний час достатньо повно вивчені задачі оптимального керування у випадку, коли стан системи описується еволюційними рівняннями чи варіаційними нерівностями при наявності початкової умови. В той же час задачі оптимального керування системами, стан яких описується еволюційними рівняннями без початкових умов, розглянуто лише в роботах М.М. Бокала. Там досліджено випадок лінійних рівнянь стану системи з керуваннями в правих частинах. В даній дисертаційній роботі продовжено ці дослідження у випадках, коли рівняння стану є нелінійними параболічними рівняннями та варіаційними нерівностями з керуваннями у коефіцієнтах, а також еволюційними рівняннями із сильним виродженням в початковий момент часу та керуваннями у правих частинах.

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є дослідження умов існування оптимального керування процесами, які моделюються задачами без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей.

Завданнями дисертаційного дослідження є:

– встановити необхідні та достатні умови існування оптимального керування коефіцієнтами в задачі без початкових умов для слабко нелінійних параболічних рівнянь;

– дослідити умови існування розв'язку задачі оптимального керування у випадку, коли стан системи моделюється задачею Фур'є для сильно нелінійних рівнянь з монотонними та немонотонними просторовими частинами;

– відшукати достатні умови існування оптимального керування коефіцієнтами в задачі без початкових умов для слабко нелінійних варіаційних нерівностей;

– дослідити питання існування оптимального керування правими частинами в задачі Фур'є для сильно нелінійних варіаційних нерівностей;

– вивчити коректність задач оптимального керування системами, стани яких описуються розв'язками задач без початкових умов для еволюційних рівнянь із сильним виродженням в початковий момент часу та керуваннями у правих частинах.

Об'єктом дослідження є задачі оптимального керування процесами, які моделюються задачами без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей.

Предметом досліджень є питання існування та єдиності оптимального керування процесами, які моделюються задачами без початкових умов для лінійних, слабко і сильно нелінійних параболічних рівнянь, еволюційних рівнянь із сильним виродженням в початковий момент часу, а також слабко і сильно нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей.

Методи досліджень. У роботі використовуються методи та ідеї теорії рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу, теорії оптимального керування, зокрема, методи Гальоркіна, монотонності і компактності, теорії півгруп операторів в банаховому просторі, принцип стискуючих відображень та інші.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі вперше:

- вивчено задачі оптимального керування (з різними типами спостережень) для нелінійних параболічних рівнянь без початкових умов з керуваннями у коефіцієнтах і отримано умови існування розв'язків таких задач, коли рівняннями стану є

  – слабко нелінійні рівняння з обмеженнями на поведінку розв'язку на нескінченності,

  – сильно нелінійні рівняння з монотонними просторовими частинами без обмежень на зростання вихідних даних і розв'язків при $t \to -\infty$,

  – сильно нелінійні рівняння з немонотонними просторовими частинами при певній поведінці розв'язків на нескінченності;

- досліджено задачі оптимального керування (з різними типами спостережень) для еволюційних варіаційних нерівностей без початкових умов і отримано умови існування оптимальних керувань у випадку, коли рівняннями стану є

  – слабко нелінійні варіаційні нерівності з керуваннями у коефіцієнтах при умовах на поведінку розв'язку,

  – сильно нелінійні варіаційні нерівності з керуваннями у правих частинах без обмежень на поведінку розв'язку;

- вивчено задачі оптимального керування для еволюційних рівнянь із сильним виродженням в початковий момент часу та керуваннями у правих частинах і отримано необхідні та достатні умови

  – існування і єдиності розв'язків таких задач,

  – оптимальності керування у випадку фінального спостереження.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення і можуть бути використані для розвитку теорії рівнянь з частинними похідними, а також при досліджені задач газо- та гідродинаміки, теорії біологічних популяцій, оптимального керування, хімічної кінетики, тощо.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації отримані автором самостійно. У працях, написаних у співавторстві з науковим керівником, М. М. Бокалу належать постановка задач, вибір методів досліджень та аналіз одержаних результатів.

Апробація результатів роботи. Результати досліджень доповідались та обговорювались на Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: член-кор. НАН України, проф. Пташник Б. Й., проф. Іванчов М. І., проф. Каленюк П. І.), а також на наукових конференціях: International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (Львів, 2012); International conference "Nonlinear Partial Differential Equations – 2013" (Донецьк, 2013); VI Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (Кам'янець-Подільський, 2014); International Conference of Young Mathematicians (Київ, 2015); International V. Skorobohatko mathematical conference (Дрогобич, 2015); Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 2016); Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2016" (Львів, 2016); International Conference on Differential Equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Львів, 2016); International Scientific Conference "Differential- Functional Equations and their Application" dedicated to the 80th anniversary of Professor V. I. Fodchuk (Чернівці, 2016); 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky (Київ, 2016).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 9-ти наукових працях у фахових періодичних виданнях (зі списку МОН України), з них 6 – в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз, та додатково висвітлено в 10-ти тезах наукових математичних конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку літератури, що налічує 100 найменувань і розміщений на 10 сторінках. Загальний обсяг роботи – 179 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету і завдання досліджень, наукову новизну, апробацію одержаних результатів та їхнє практичне і теоретичне значення.

У розділі 1 проаналізовано праці, які стосуються задач без початкових умов та задач оптимального керування для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей.

У розділі 2 вивчено задачі оптимального керування системами, стани яких описуються розв'язками задач без початкових умов для лінійних, сильно та слабко нелінійних параболічних рівнянь з керуваннями у коефіцієнтах.

Припускаємо, що $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{R} \ (k = \overline{1,n})\}$ – лінійний простір з нормою $|x| = \big(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2\big)^{1/2}$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$

з кусково-гладкою межею Γ, $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \Gamma \times S$.

Нехай $H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \mid v_{x_i} \in L^2(\Omega)\ (i = \overline{1,n})\}$ – простір Соболєва, який є гільбертовим простором зі скалярним добутком $(v, w)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \big\{\nabla v \nabla w + vw\big\}\, dx$ та нормою $\|v\|_{H^1(\Omega)} := \Big(\int\limits_\Omega \big\{|\nabla v|^2 + |v|^2\big\}\, dx\Big)^{1/2}$, де $\nabla v = (v_{x_1}, \ldots, v_{x_n})$, $|\nabla v|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |v_{x_i}|^2$. Під $H_0^1(\Omega)$ розуміємо замикання в $H^1(\Omega)$ простору $C_c^\infty(\Omega)$, де $C_c^\infty(\Omega)$ – лінійний простір, що складається з нескінченно диференційовних на Ω функцій, носії яких є компактами. Через $C_c^1(-\infty, 0)$, позначаємо лінійний простір неперервно диференційовних на $(-\infty, 0)$ функцій з компактними носіями.

Для довільного банахового (гільбертового) простору X через $L^q_{\mathrm{loc}}(S; X)$, де $q \in [1, \infty]$, позначаємо лінійний простір функцій, які визначені на S і приймають значення в X, а їх звуження на будь-який відрізок $[a, b] \subset S$ належать простору $L^q(a, b; X)$, а через $C(S; X)$ позначаємо простір неперервних функцій, які визначені на S і приймають значення в X.

Всюди далі через U позначаємо той чи інший банахів або гільбертів простір, який для відповідної задачі оптимального керування є простором керувань, а через U_∂ – множину допустимих керувань.

У **підрозділі 2.1** вивчено задачу оптимального керування для слабко нелінійних параболічних рівнянь.

Для довільного гільбертового простору X, дійсного числа ω і функції $\alpha \in C(S)$ такої, що $\alpha(t) > 0\ \forall\, t \in S$, вводимо функційні простори

$$L^2_{\omega,\alpha}(S; X) := \Big\{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; X) \ \Big|\ \int\limits_S \alpha(t) e^{2\omega \int\limits_0^t \alpha(s) ds} \|f(t)\|_X^2 dt < \infty \Big\},$$

$$L^2_{\omega,1/\alpha}(S; X) := \Big\{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; X) \ \Big|\ \int\limits_S [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int\limits_0^t \alpha(s) ds} \|f(t)\|_X^2 dt < \infty \Big\},$$

$$\|f\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S;X)} := \Big(\int\limits_S \gamma(t)\, e^{2\omega \int\limits_0^t \alpha(s)\, ds} \|f(t)\|_X^2\, dt \Big)^{1/2},\ \text{де } \gamma = \alpha \text{ або } \gamma = 1/\alpha.$$

Позначаємо

$$K := \inf_{v \in H_0^1(\Omega),\ v \neq 0} \Big(\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\, dx \Big) \Big(\int\limits_\Omega |v|^2\, dx \Big)^{-1}. \tag{1}$$

Нехай $U := L^\infty(Q)$; U_∂ – опукла замкнена множина в U, причому $U_\partial \subset \{v \in U \mid v(x,t) \geq 0$ для м.в. $(x,t) \in Q\}$. Стан системи для заданого керування $v \in U_\partial$ описуємо слабким розв'язком задачі без початкових умов (задачі Фур'є)

$$y_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,y,\nabla y) + a_0(x,t,y,\nabla y) + v(x,t)y = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2}$$

$$y\big|_{\Sigma} = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^{\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{4}$$

Припускаємо, що

($\mathcal{A}_1$) $a_i(x,t,s,\xi)$, $(x,t,s,\xi) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ $(i = \overline{0,n})$, є каратеодорівськими функціями; $a_i(x,t,0,0) = 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$ $(i = \overline{0,n})$;

($\mathcal{A}_2$) для м.в. $(x,t) \in Q$ та всіх $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:

$$|a_i(x,t,s,\xi)| \le C_{1,i}\big(|s| + |\xi|\big) + h_i(x,t),$$

де $C_{1,i} = \text{const} > 0$, $h_i \in L^2_{\text{loc}}(S; L^2(\Omega))$ $(i = \overline{0,n})$;

($\mathcal{A}_3$) для м.в. $(x,t) \in Q$ та всіх (s_1,ξ^1), $(s_2,\xi^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,t,s_1,\xi^1) - a_i(x,t,s_2,\xi^2)\big)(\xi_i^1 - \xi_i^2) +$$
$$+\big(a_0(x,t,s_1,\xi^1) - a_0(x,t,s_2,\xi^2)\big)(s_1 - s_2) \ge \alpha(t)|\xi^1 - \xi^2|^2,$$

де $\alpha \in C(S)$, $\alpha(t) > 0$ $\forall\, t \in S$;

($\mathcal{F}$) $f \in L^2_{\text{loc}}(S; L^2(\Omega))$.

Прикладом рівняння (2), що задовольняє вище наведені умови, є рівняння

$$y_t - \Delta y + vy = f, \quad (x,t) \in Q, \quad \text{де} \quad v \in U_\partial.$$

Означення 2.1. *Слабким розв'язком задачі* (2) – (4) *називаємо функцію* $y \in L^2_{\text{loc}}(S; H^1_0(\Omega)) \cap C(S; L^2(\Omega))$ *, яка задовольняє умову* (4) *та тотожність*

$$\iint\limits_Q \Big\{ - y\psi\varphi' + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,y,\nabla y)\psi_{x_i}\varphi + (a_0(x,t,y,\nabla y) + v(x,t)y)\psi\varphi \Big\}\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q f\psi\varphi\, dxdt, \quad \psi \in H^1_0(\Omega),\ \varphi \in C^1_c(-\infty,0). \tag{5}$$

Теорема 2.1 (коректність задачі без початкових умов). Нехай виконуються умови $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{F})$ та $v \in U_\partial$. Тоді правильні такі твердження:

(i) якщо $\omega \le K$, де K – стала, яка визначена в (1), то задача (2) – (4) має не більше одного розв'язку;

(ii) якщо $\omega < K$ та, крім того,

$$f \in L^2_{\omega,1/\alpha}(S; L^2(\Omega)), \tag{6}$$

то існує єдиний слабкий розв'язок задачі (2) – (4), він належить простору $L^2_{\omega,\alpha}(S; H^1_0(\Omega))$ і задовольняє оцінки

$$e^{\omega\int\limits_0^\tau \alpha(s)\,ds}\|y(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} \le C_1\|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}, \quad \tau \in S,$$
$$\|y\|_{L^2_{\omega,\alpha}(S_\tau;H^1_0(\Omega))} \le C_2\|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}, \quad \tau \in S,$$

де $S_\tau := (-\infty,\tau]\ \forall\,\tau \in (-\infty,0]$ $(S_0 = S)$, $C_1, C_2 > 0$ – сталі, що залежать лише від K та ω.

Наведено приклад, який показує, що умова $\omega \le K$ є істотною для гарантування єдиності слабкого розв'язку задачі (2) – (4).

Припускаємо, що функція вартості має вигляд

$$J(v) = \|y(\cdot,0;v) - z_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|v\|_{L^\infty(Q)}, \quad v \in U_\partial,$$

де $\mu \ge 0$, $z_0 \in L^2(\Omega)$ – задані, причому $\mu > 0$, якщо U_∂ – необмежена.

Задача оптимального керування: знайти керування $u \in U_\partial$ таке, що

$$J(u) = \inf_{v\in U_\partial} J(v). \tag{7}$$

Теорема 2.2 (існування оптимального керування). *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$, (6) *та* $\omega < K$. *Тоді множина розв'язків задачі (7) є непорожньою і* $*$*-слабко замкненою.*

Також досліджено необхідні умови існування розв'язку задачі (7) при додатковому припущенні, що рівняння (2) є лінійним, а точніше, виконується умова

$(\mathcal{A})$ $a_0(x,t,s,\xi) = \widetilde{a}_0(x,t)s$, $a_i(x,t,s,\xi) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_j$ для м.в. $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(s,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, де $\widetilde{a}_0$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i = \overline{1,n}) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\widetilde{a}_0(x,t) \ge 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \alpha(t)|\xi|^2$ для м.в. $(x,t) \in Q$ і будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^n$, де $\alpha \in C(S)$, $\alpha(t) > 0$ для всіх $t \in S$.

Теорема 2.3 (необхідні умови оптимальності керування). *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, (6), $\omega < K$, U_∂ *– обмежена,* $\mu = 0$ *та* $\alpha(t) \ge \alpha_0 = const > 0$

для м.в. $t\in S$. Тоді розв'язок задачі (7) характеризується співвідношеннями

$$\begin{cases} y \in L^2_{\omega,\alpha}(S; H^1_0(\Omega)), \quad y_t \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H^{-1}(\Omega)), \\ y_t - \sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij} y_{x_j})_{x_i} + (\widetilde{a}_0 + u) y = f \quad \text{в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S; H^{-1}(\Omega)), \\ y\big|_\Sigma = 0, \quad \lim\limits_{t\to-\infty} e^{\omega\int\limits_0^t \alpha(s)ds} \|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \in L^2_{-\omega,1/\alpha}(S; H^1_0(\Omega)), \quad p_t \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H^{-1}(\Omega)), \\ -p_t - \sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij} p_{x_j})_{x_i} + (\widetilde{a}_0 + u) p = 0 \quad \text{в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S; H^{-1}(\Omega)), \\ p\big|_\Sigma = 0, \quad p(\cdot,0) = y(\cdot,0) - z_0(\cdot), \end{cases}$$

$$\iint\limits_Q yp(v-u)\,dxdt \le 0 \quad \forall\, v \in U_\partial.$$

У **підрозділі 2.2** досліджено задачу оптимального керування для сильно нелінійних параболічних рівнянь з монотонними просторовими частинами.

Нехай $U := L^\infty(Q)$, а U_∂ – опукла замкнена множина в U і $U_\partial \subset \Big\{v \in U \,\Big|\, v \ge 0 \ \text{ м.с. на } \ Q\Big\}$. Стан системи для керування $v \in U_\partial$ визначаємо слабким розв'язком задачі

$$y_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,y,\nabla y) + \widehat{a}_0(x,t,y,\nabla y) +$$

$$+ v(x,t) g(x,t,y) = f(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{8}$$

$$y\big|_\Sigma = 0. \tag{9}$$

Припускаємо, що

$(\mathcal{A}_1)$ $a_i(x,t,s,\xi)$, $(x,t,s,\xi) \in Q\times\mathbb{R}^{1+n}$ $(i=\overline{1,n})$, $\widehat{a}_0(x,t,s,\xi)$, $(x,t,s,\xi) \in Q\times\mathbb{R}^{1+n}$, є каратеодорівськими функціями;

$(\mathcal{A}_2)$ існує $p>2$ таке, що для м.в. $(x,t)\in Q$ і всіх $(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} |\widehat{a}_0(x,t,s,\xi)| &\le C_{1,0}\big(|s|^{p-1} + |\xi|^{2(p-1)/p}\big) + h_0(x,t), \\ |a_i(x,t,s,\xi)| &\le C_{1,i}\big(|s|^{p/2} + |\xi|\big) + h_i(x,t), \quad i=\overline{1,n}, \end{aligned}$$

де $C_{1,i} = \mathrm{const} > 0$ $(i=\overline{0,n})$, $h_0 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $h_i \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i=\overline{1,n})$;

$(\mathcal{A}_3)$ для м.в. $(x,t)\in Q$ і всіх (s_1,ξ^1), $(s_2,\xi^2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,t,s_1,\xi^1) - a_i(x,t,s_2,\xi^2)\big)(\xi^1_i - \xi^2_i) +$$

$$+ \big(\widehat{a}_0(x,t,s_1,\xi^1) - \widehat{a}_0(x,t,s_2,\xi^2)\big)(s_1-s_2) \ge K_1\big[|s_1-s_2|^p + |\xi^1-\xi^2|^2\big],$$

де $K_1 = \mathrm{const} > 0$;

$(\mathcal{F})$ $f \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $\quad (1/p + 1/p' = 1)$;

$(\mathcal{G}_1)$ $g(x,t,s)$, $(x,t,s) \in Q \times \mathbb{R}$, є каратеодорівською функцією; $g(\cdot,\cdot,0)=0$;

$(\mathcal{G}_2)$ для м.в. $(x,t) \in Q$ та всіх $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$:

$$0 \le \big(g(x,t,s_1) - g(x,t,s_2)\big)\big(s_1 - s_2\big) \le M|s_1 - s_2|^2,$$

де $M = \mathrm{const} > 0$.

Прикладом рівняння (8), що задовольняє вище наведені умови, є рівняння

$$y_t - \Delta y + c|y|^{p-2}y + vy = f, \quad (x,t) \in Q,$$

де $c = \mathrm{const} > 0$, $v \in U_\partial$.

Означення 2.2. *Слабким розв'язком задачі* (8), (9) *називаємо функцію* $y \in Y^p_{loc}(Q) := L^2_{\mathrm{loc}}(S; H^1_0(\Omega)) \cap L^p_{loc}(\overline{Q}) \cap C(S; L^2(\Omega))$, *яка задовольняє інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_Q \Big\{ -y\psi\varphi' + \sum_{i=1}^n a_i(x,t,y,\nabla y)\partial_i\psi\varphi + \widehat{a}_0(x,t,y,\nabla y)\psi\varphi + vg(x,t,y)\psi\varphi \Big\}\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q f\psi\varphi\, dxdt, \quad \psi \in H^1_0(\Omega) \cap L^p(\Omega),\ \varphi \in C^1_c(-\infty,0).$$

Теорема 2.5 (коректність задачі без початкових умов). *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)-(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{G}_1), (\mathcal{G}_2)$ *і* $v \in U_\partial$. *Тоді існує єдиний слабкий розв'язок задачі* (8), (9) *і він задовольняє оцінку*

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_\Omega |y(x,t)|^2\, dx + \int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_\Omega \big[|\nabla y|^2 + |y|^p\big]\, dxdt \le$$

$$\le C\Big\{ R^{-2/(p-2)} + \int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_\Omega |f|^{p'}\, dxdt \Big\}$$

для всіх t_0, R_0 *і* R *таких, що* $t_0 \in S$, $R_0 > 0$ *і* $R > \max\{1; 2R_0\}$. *Тут* $C > 0$ *– стала, яка залежить тільки від* K, p *і* $mes_n\Omega$.

Функцію вартості беремо у вигляді

$$J(v) := G(y(\cdot,\cdot;v)) + \mu\|v\|_{L^\infty(Q)}, \quad v \in U_\partial,$$

де $\mu \ge 0$ – задана стала, причому $\mu > 0$, якщо U_∂ – необмежена, а функціонал $G : Y^p_{\mathrm{loc}}(Q) \to \mathbb{R}$ задовольняє умову

($\mathcal{J}$) $\inf\limits_{z\in Y^p_{\mathrm{loc}}(Q)} G(z) > -\infty$, G є напівнеперервним знизу в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega))$, чи в $C(S;L^2(\Omega))$, чи в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega))\cap C(S;L^2(\Omega))$.

Задача оптимального керування: знайти керування $u\in U_\partial$ таке, що

$$J(u)=\inf_{v\in U_\partial} J(v). \tag{10}$$

Теорема 2.4 (існування оптимального керування). *Припустимо, що виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{G}_1)$, $(\mathcal{G}_2)$ *і* $(\mathcal{J})$. *Тоді множина розв'язків задачі (10) є непорожньою і* $*$*-слабко замкненою.*

У **підрозділі 2.3** вивчено задачі оптимального керування процесами, які моделюються задачами Фур'є для сильно нелінійних параболічних рівнянь з немонотонними просторовими частинами.

Вводимо простір

$$L^q_\nu(S;X) := \Big\{ f\in L^q_{\mathrm{loc}}(S;X)\ \Big|\ \|f\|_{L^q_\nu(S;X)} := \Big(\int\limits_S e^{-2\nu t}\|f(t)\|^q_X\,dt\Big)^{1/q} < \infty\Big\},$$

де X – довільний банахів простір, $\nu\in\mathbb{R}$, $q\in[1,\infty)$.

Нехай U – замкнений лінійний підпростір простору $L^\infty(Q)$, $U_\partial := \Big\{v\in U\ \Big|\ 0\le v\le M \quad \text{м.с. в} \quad Q\Big\}$, де $M=\mathrm{const}>0$. Для заданого $v\in U_\partial$ та $\lambda\in\mathbb{R}$ стан системи визначається слабким розв'язком задачі

$$y_t-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)y_{x_i})_{x_j}+c(x)|y|^{p-2}y-v(x,t)y=f(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{11}$$

$$y\big|_\Sigma=0, \tag{12}$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-\lambda t}\|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}=0. \tag{13}$$

Припускаємо, що

($\mathcal{A}$) $a_{ij}=a_{ji}\in L^\infty(\Omega)$ $(i,j=\overline{1,n})$, існує стала $\mu>0$ така, що $\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \mu\sum\limits_{k=1}^n|\xi_k|^2$ для м.в. $x\in\Omega$ і для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$, а також, $M-\mu K>0$;

($\mathcal{C}$) $c\in L^\infty(\Omega)$, $c(x)\ge c_0=\mathrm{const}>0$ для м.в. $(x,t)\in Q$;

($\mathcal{F}$) $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega))$;

($\mathcal{P}$) $\lambda\in\mathbb{R}$, $p>2$.

Означення 2.3. *Слабким розв'язком задачі* (11) – (13) *називають функцію* $y \in L^2_{loc}(S; H^1_0(\Omega)) \cap L^p_{loc}(S; L^p(\Omega)) \cap C(S; L^2(\Omega))$, $y_t \in L^2_{loc}(S; L^2(\Omega))$, *яка задовольняє інтегральну тотожність*

$$\int\limits_{\Omega_t} \left\{ y_t\psi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_{x_i} \psi_{x_j} + (c|y|^{p-2}y - vy)\psi \right\} dx = \int\limits_{\Omega_t} f\psi \, dx$$

для м.в. $t \in S$ *і всіх* $\psi \in H^1_0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

Теорема 2.7 (коректність задачі без початкових умов). *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{P})$, $\lambda > M - \mu K$ *та*

$$u \in U_\partial, \quad f \in L^2_\lambda(S; L^2(\Omega)). \tag{14}$$

Тоді задача (11) – (13) *має єдиний слабкий розв'язок* y, *причому* $y \in L^2_\lambda(S; H^1_0(\Omega)) \cap L^p_\lambda(S; L^p(\Omega))$, $y_t \in L^2_\lambda(S; L^2(\Omega))$, *та виконуються оцінки*

$$e^{-2\lambda t} \|y(\cdot, t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_1 \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-2\lambda s} \|f(\cdot, s)\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds, \ t \in S,$$

$$\|y\|^2_{L^2_\lambda(S; H^1_0(\Omega))} + \|y_t\|^2_{L^2_\lambda(S; L^2(\Omega))} + \|y\|^p_{L^p_\lambda(S; L^p(\Omega))} \le C_2 \|f\|^2_{L^2_\lambda(S; L^2(\Omega))},$$

де C_1, C_2 – *додатні сталі, що залежать тільки від* M, K, μ *та* λ.

Далі вважаємо, що $\lambda > 0$, $\rho \in L^1(Q)$ – задані, а функція вартості має вигляд

$$J(v) = \iint\limits_Q \left[\, |y(x, t; v)| - \rho(x, t)|v|^2 \,\right] dxdt, \quad v \in U_\partial.$$

Задача оптимального керування: знайти керування $u \in U_\partial$ таке, що

$$J(u) = \sup_{v \in U_\partial} J(v). \tag{15}$$

Теорема 2.6 (існування оптимального керування). *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{P})$, (14) *та* $\lambda > M - \mu K$. *Тоді множина розв'язків задачі (15) є непорожньою і* $*$*-слабко замкненою.*

У **розділі 3** досліджено задачі оптимального керування системами, стани яких описуються розв'язками задач без початкових умов для слабко та сильно нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей.

У **підрозділі 3.1** розглянуто випадок слабко нелінійних варіаційних нерівностей з керуваннями у коефіцієнтах.

Нехай V та H – сепарабельні гільбертові простори над полем дійсних чисел зі скалярними добутками $(\cdot, \cdot)_V$, $(\cdot, \cdot)$ та нормами $\|\cdot\|$, $|\cdot|$, відповідно. Припускаємо, що простір V неперервно, щільно і компактно вкладається в H. Проводимо відповідні ототожнення, у результаті яких маємо неперервні та щільні вкладення: $V \subset H \subset V'$.

Вводимо функційні простори

- $L^\infty_\nu(S;V) := \{f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;V) \mid \operatorname*{ess\,sup}_{t\in S} \big[e^{-\nu t}\|f(t)\|_V\big] < \infty\}$;
- $W_{2,\mathrm{loc}}(S;V) := \{z \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V) \,\big|\, z' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')\}$;
- $H^1_{\mathrm{loc}}(S;H) := \{z \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H) \mid z' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)\}$;
- $H^1_\nu(S;H) := \{z \in L^2_\nu(S;H) \,\big|\, z' \in L^2_\nu(S;H)\}, \quad \nu \in \mathbb{R}$.

Нехай $\Phi : V \to (-\infty, +\infty]$ – власний функціонал, тобто, $\mathrm{dom}(\Phi) := \{v \in V : \Phi(v) < +\infty\} \neq \emptyset$, що задовольняє умови:

$(\mathcal{A}_1)$ $\quad \Phi\big(\alpha v + (1-\alpha)w\big) \leqslant \alpha\Phi(v) + (1-\alpha)\Phi(w) \quad \forall\, v, w \in V,\ \forall\, \alpha \in [0,1]$,

тобто, Φ – *опуклий*,

$(\mathcal{A}_2)$ $\quad v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$ в $V \quad \Longrightarrow \quad \varliminf_{k\to\infty} \Phi(v_k) \geq \Phi(v)$,

тобто, Φ – *слабко напівнеперервний знизу.*

Субдиференціалом функціоналу Φ називається відображення $\partial\Phi : V \to 2^{V'}$, визначене за правилом

$$\partial\Phi(v) := \{v^* \in V' \mid \Phi(w) \geqslant \Phi(v) + (v^*, w - v) \quad \forall\, w \in V\}, \quad v \in V.$$

Областю визначення субдиференціалу $\partial\Phi$ є множина $D(\partial\Phi) := \{v \in V \mid \partial\Phi(v) \neq \varnothing\}$. Ототожнюємо субдиференціал $\partial\Phi$ з його графіком, припускаючи, що $[v, v^*] \in \partial\Phi$ тоді і тільки тоді, коли $v^* \in \partial\Phi(v)$.

Нехай U – замкнений лінійний підпростір простору $L^\infty(S)$, $U_\partial := \Big\{u \in U \,\Big|\, m \leqslant u(t) \leqslant M \quad \text{для м.в.} \quad t \in S\Big\}$, де $m, M \in \mathbb{R}$. Стан системи $y(u) = y(\cdot;u)$ для заданого керування $u \in U_\partial$ визначаємо розв'язком задачі

$$y'(t) + \partial\Phi\big(y(t)\big) + u(t)y(t) \ni f(t), \quad t \in S, \tag{16}$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-\gamma t}|y(t)| = 0, \tag{17}$$

де $\gamma \in \mathbb{R}$ та $f : S \to V'$ – задані.

Задачу (16), (17) для заданих Φ, u, f та γ називаємо задачею $\mathbf{P}(\Phi, u, f, \gamma)$.

Означення 3.1. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$ *і* $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S)$, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$. *Під розв'язком варіаційної нерівності* (16) *розуміємо функцію* $y : S \to V$, *яка задовольняє такі умови:*

1) $y \in W_{2,\mathrm{loc}}(S;V)$;

2) $y(t) \in D(\partial\Phi)$ *для м.в.* $t \in S$;

3) *існує функція* $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$ *така, що для м.в.* $t \in S$ *маємо* $g(t) \in \partial\Phi\big(y(t)\big)$ *і*

$$y'(t) + g(t) + u(t)y(t) = f(t) \quad \text{в} \quad V'.$$

Додатково припускаємо, що

($\mathcal{A}_3$) існує стала $K_1 > 0$ така, що $\Phi(v) \geqslant K_1 \|v\|^2 \quad \forall\, v \in \mathrm{dom}(\Phi)$; $\Phi(0) = 0$;

($\mathcal{A}_4$) існує стала $K_2 > 0$ така, що

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant K_2 |v_1 - v_2|^2 \quad \forall\, [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi.$$

Теорема 3.1 (коректність задачі без початкових умов). *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_4)$ *. Припустимо, що* $u \in U_\partial$ *і* $f \in L^2_\gamma(S; H)$, *де* $\gamma \in \mathbb{R}$ *— стала, що задовольняє нерівність*

$$K_2 + m + \gamma > 0. \tag{18}$$

Тоді задача $\boldsymbol{P}(\Phi, u, f, \gamma)$ *має єдиний розв'язок, він належить простору* $L^\infty_\gamma(S; V) \cap L^2_\gamma(S; V) \cap H^1_\gamma(S; H)$ *та задовольняє оцінку*

$$e^{-2\gamma\tau} \|y(\tau)\|^2 + \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t} \|y(t)\|^2\, dt + \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t} |y'(t)|^2\, dt \leq$$

$$\leq C_1 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t} |f(t)|^2\, dt, \quad \tau \in S,$$

де C_1 *– додатна стала, що залежить лише від* K_1, K_2, γ, λ *та* m, M.

Функцію вартості беремо у вигляді

$$J(u) := G(y(u)) + \mu \|u\|_U, \quad u \in U_\partial,$$

де $\mu \geq 0$, причому $\mu > 0$, якщо U_∂ – необмежена, а функціонал $G : C(S; H) \to \mathbb{R}$ задовольняє умову

($\mathcal{G}$) G є слабко напівнеперервним знизу в $C(S; H)$ та $\inf\limits_{z \in C(S;H)} G(z) > -\infty$.

Задача оптимального керування: знайти керування $u^* \in U_\partial$ таке, що

$$J(u^*) = \inf_{u \in U_\partial} J(u). \tag{19}$$

Теорема 3.2 (існування оптимального керування). *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_4)$, $(\mathcal{G})$, (18) *і* $f \in L^2_\gamma(S; H)$. *Тоді множина розв'язків задачі* (19) *є непорожньою і* $*$*-слабко замкненою.*

У **підрозділі 3.2** вивчено системи, стани яких описуються сильно нелінійними варіаційними нерівностями з керуваннями у правих частинах. Нехай V – сепарабельний рефлексивний банахів простір над полем дійсних чисел з нормою $\|\cdot\|$, а H – гільбертів простір над полем дійсних чисел зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ та нормою $|\cdot|$. Припускаємо, що простір V неперервно, щільно і компактно вкладається в H.

Нехай $\Phi : V \to (-\infty, +\infty]$ – *власний, опуклий, напівнеперервний знизу* функціонал, $\big($тобто, задовольняє умови $(\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_2)$ підрозділу 3.1$\big)$ такий, що

$(\widetilde{\mathcal{A}}_3)$ існують сталі $p>2$, $K_1>0$ такі, що

$$\Phi(v) \geqslant K_1\|v\|^p \quad \forall\, v\in \mathrm{dom}(\Phi);$$

$\Phi(0)=0;$

$(\widetilde{\mathcal{A}}_4)$ існують сталі $q\in(2,p]$, $K_2>0$ такі, що

$$(v_1^*-v_2^*, v_1-v_2) \geqslant K_2|v_1-v_2|^q \quad \forall\, [v_1,v_1^*],\ [v_2,v_2^*]\in\partial\Phi.$$

Вводимо простір

- $W_{p,\mathrm{loc}}(S;V) := \{z\in L^p_{\mathrm{loc}}(S;V) \,\big|\, z'\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S;V')\}.$

Нехай H_* – який-небудь гільбертів простір, $U := \Big\{u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H_*) \,\Big|\, \int\limits_S \omega(t)\|u(t)\|^2_{H_*}\,dt<\infty\Big\}$, де $\omega\in C(S)$ – функція така, що $\omega(t)>0\ \forall t\in S$; U_∂ – опукла замкнена множина в U. Припустимо, що

$(\mathcal{C})$ $C\in\mathcal{L}\Big(H_*;H\Big)$;

$(\mathcal{F})$ $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$.

Стан керованої еволюційної системи $y(u)=y(\cdot;u)$ для заданого керування $u\in U_\partial$ описуємо розв'язком задачі

$$y'(t)+\partial\Phi\big(y(t)\big)\ni f(t)+Cu(t), \quad t\in S. \tag{20}$$

Задачу на знаходження розв'язку варіаційної нерівності (20) при заданих Φ, f та u позначаємо через $\mathbf{P}(\Phi, f+Cu)$.

Теорема 3.3 (коректність задачі без початкових умов). Нехай виконуються умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\widetilde{\mathcal{A}}_3)$, $(\widetilde{\mathcal{A}}_4)$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{F})$ і $u\in U_\partial$. Тоді задача $\mathbf{P}(\Phi,f+Cu)$ має єдиний розв'язок, він належить простору $L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;V)\cap H^1_{\mathrm{loc}}(S;H)$ та задовольняє оцінки

$$\max_{t\in[t_1,t_2]}|y(t)|^2+\int_{t_1}^{t_2}\|y(t)\|^p\,dt \le C_1\,\delta^{-\frac{2}{p-2}}+C_2\int_{t_1-\delta}^{t_2}|f(t)|^{p'}\,dt,$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[t_1,t_2]}\|y(t)\|^p+\int_{t_1}^{t_2}|y'(t)|^2\,dt \le C_3\,\delta^{-\frac{p}{p-2}}+2\int_{t_1-\delta}^{t_2}|f(t)|^2\,dt+$$

$$+C_4\,\delta^{-1}\int_{t_1-2\delta}^{t_1}|f(t)|^{p'}\,dt \quad \forall t_1,t_2\in S\ (t_1<t_2),\ \forall\delta>0,$$

де $C_i\,(i=\overline{1,4})$ — додатні сталі, що залежать лише від K_1, p і λ.

Функцію вартості $J:U\to\mathbb{R}$ беремо у вигляді

$$J(u) := G(y(u))+\mu\|u\|^2_U, \quad u\in U,$$

де $\mu\ge 0$ – стала, причому $\mu>0$, якщо U_∂ – необмежена, а $G: C(S;H)\to\mathbb{R}$ – функціонал, який задовольняє умову

$(\mathcal{G})$ G є напівнеперервним знизу в $C(S;H)$ і, крім того, $\inf\limits_{z\in C(S;H)} G(z) > -\infty$.

Задача оптимального керування: знайти $u^* \in U_\partial$ таке, що

$$J(u^*) = \inf_{u\in U_\partial} J(u). \tag{21}$$

Теорема 3.4 (існування оптимального керування). *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\widetilde{\mathcal{A}}_3)$, $(\widetilde{\mathcal{A}}_4)$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{F})$ *та* $(\mathcal{G})$. *Тоді множина розв'язків задачі* (21) *є непорожньою і слабко замкненою.*

У розділі 4 розглянуто задачі оптимального керування, в яких стан системи визначається еволюційними рівняннями, які задані на скінченому часовому проміжку і вироджуються в початковий момент, з керуваннями у правих частинах.

Нехай V та H гільбертові простори такі ж, як в підрозділі 3.1; $\lambda > 0$ – стала така, що

$$\lambda|v|^2 \le \|v\|^2 \quad \forall v \in V; \tag{22}$$

$T > 0$ – довільне фіксоване число; $I := (0,T]$; φ – функція з простору $C([0,T]) \cap C^1((0,T])$, яка задовольняє умови:

$$1)\ \varphi(0) = 0, \quad 2)\ \varphi(t) > 0 \text{ при } t \in I, \quad 3)\ \int_0^T [\varphi(s)]^{-1} ds = +\infty.$$

Якщо X — гільбертів простір, $\omega \in \mathbb{R}$ — довільне число, а $\alpha \in C(I)$, $\alpha(t) > 0\ \forall t \in I$, то позначимо

- $L^2_{\varphi,\omega,\gamma}(I;X) := \Big\{ f \in L^2_{\rm loc}(I;X) \mid$
  $\int\limits_I \gamma(t) e^{2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} [\varphi(t)]^{-1} \|f(t)\|_X^2 dt < \infty \Big\}$, де $\gamma = \alpha$ або $\gamma = 1/\alpha$;
- $W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V) := \{ y \in L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V) \mid y' \in L^2_{1/\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V') \}$;
- $L_{2,\varphi}(I;X) := \{ f : I \to X \mid \int\limits_I [\varphi(t)]^{-1} \|f(t)\|_X^2\, dt < \infty \}$;
- $W^1_{2,\varphi}(I;X) := \Big\{ w : I \to X \mid \int\limits_I \left\{ [\varphi(t)]^{-1} \|w(t)\|_X^2 + \varphi(t) \|w'(t)\|_X^2 \right\} dt < \infty \Big\}$.

У **підрозділі 4.1** досліджено задачі оптимального керування для абстрактних еволюційних рівнянь із сильним виродженням.

Нехай $A(t) : V \to V'$, $t \in I$, – сім'я операторів, яка задовольняє умови

$(\mathcal{A}_1)$ функція $t \to (A(t)v, w)$ вимірна на I для будь-яких $v, w \in V$;

$(\mathcal{A}_2)$ для будь-яких $v \in V$ і $t \in I$ виконуються нерівності

$$(A(t)v, v) \ge \alpha(t)\|v\|^2, \qquad \|A(t)v\|_* \le \beta(t)\|v\|,$$

де $\alpha, \beta \in C(I),\ 0 < \alpha(t) \leq \beta(t)\ \ \forall\, t \in I.$

Припускаємо, що U – гільбертів простір, U_∂ – опукла замкнена множина в U. Стан системи $y(v) = y(\cdot; v)$ при заданому керуванні $v \in U$ визначаємо функцією з простору $W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$, яка задовольняє рівняння

$$\varphi(t)y'(t) + A(t)y(t) = g(t) + (Bv)(t), \quad t \in I, \tag{23}$$

та умову

$$e^{\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds}|y(t)| \to 0 \text{ при } t \to 0+, \tag{24}$$

де $B \in \mathcal{L}(U; L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V'))$ та $g \in L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V')$.

Нехай $\mathcal{H}$ – гільбертів простір спостережень, $C \in \mathcal{L}(W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V), \mathcal{H})$ – оператор, що визначає спостереження.

Функцію вартості беремо у вигляді

$$J(v) = \|Cy(v) - z_0\|^2_{\mathcal{H}} + (Nv, v)_U, \quad v \in U,$$

де $z_0 \in \mathcal{H}$ – заданий елемент, N – симетричний оператор з простору $\mathcal{L}(U)$, який задовольняє умову $(Nv, v)_U \geq \nu\|v\|^2_U\ \forall\, v \in U,$ де $\nu = \mathrm{const} > 0$.

Задача оптимального керування: знайти елемент $u \in U_\partial$ такий, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{25}$$

Теорема 4.2 (існування оптимального керування). *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_2),\ \beta(t) \leq M\alpha(t),\ t \in I,$ *де* $M = const \geq 1,$ *та* $\omega < \lambda,$ *де* λ *– стала з нерівності (22). Тоді задача (25) має єдиний розв'язок і він характеризується варіаційною нерівністю*

$$\Big(Cy(u) - z_0, C\big(y(v) - y(u)\big)\Big)_{\mathcal{H}} + (Nu, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{26}$$

У **підрозділі 4.2** розглянуто задачу оптимального керування для рівнянь, оператори головних частин яких є генераторами аналітичних півгруп операторів в гільбертовому просторі.

Нехай $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ – білінійна форма, яка володіє властивостями 1) $a(v,w) = a(w,v), \quad \forall\, v, w \in V$ (симетричності); 2) $a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2_V \quad \forall\, v \in V$ (коерцитивності); 3) $|a(v,w)| \leq \beta\|v\|_V\|w\|_V \quad \forall\, v, w \in V$ (неперервності), де α і β – деякі додатні сталі.

Визначимо оператор $A : \mathcal{D}(A) \to H$ за правилом: $\mathcal{D}(A) := \{v \in V \;\big|\; |a(v,w)| \leq c_v|w|\ \forall\, w \in V,$ де $c_v = \mathrm{const} \geq 0\}$, $(Av, w) := a(v,w)\ \forall\, w \in V,\ w \in \mathcal{D}(A)$. Тоді оператор A є лінійним, симетричним і коерцитивним, а оператор $-A : \mathcal{D}(A) \to H$ є генератором аналітичної півгрупи $\{T(\tau) \equiv e^{-\tau A} \,\big|\, \tau \geq 0\}$ лінійних обмежених операторів на H.

Розглядаємо задачу без початкових умов для еволюційного рівняння, що вироджується в початковий момент часу: для заданої функції $f \in L_{2,\varphi}(I;H)$ знайти функцію $y : I \to H$ таку, що

$$\varphi(t)\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = f(t), \quad t \in I\,, \tag{27}$$

$$y \in L_{2,\varphi}(I;H). \tag{28}$$

Слабким розв'язком задачі (27), (28) називають функцію $y \in C(I;H) \cap L_{2,\varphi}(I;H)$, яка задана формулою

$$y(t) = Lf(t) := \int_0^t [\varphi(s)]^{-1} e^{-(\theta(t)-\theta(s))A} f(s)\,ds, \quad t \in I, \tag{29}$$

де $\theta(t) := \int_T^t [\varphi(s)]^{-1} ds$, $t \in I$, а $e^{\theta(t)A} := e^{-|\theta(t)|A}$, $t \in I$.

Нехай U – гільбертів простір, U_∂ – опукла замкнена множина в U. Для кожного керування $v \in U$ стан системи визначається як слабкий розв'язок задачі (27), (28) при $f(t) = g(t) + Bv(t)$, $t \in I$, де $g \in L_{2,\varphi}(I;H)$ – задана функція, $B \in \mathcal{L}(U; L_{2,\varphi}(I;H))$ – деякий оператор.

Функцію вартості беремо у вигляді

$$J(v) = |y(T;v) - z_*|^2 + (Nv, v)_U, \quad v \in U,$$

де H – простір спостережень, z_* – який-небудь елемент з H, а $N \in \mathcal{L}(U)$ – симетричний і коерцитивний оператор.

Задача оптимального керування: знайти керування $u \in U_\partial$ таке, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{30}$$

Теорема 4.5. *Нехай $z_* \in \mathcal{D}(A)$, $g \in L_{2,\varphi}(I;\mathcal{D}(A))$, $B(U_\partial) \subset L_{2,\varphi}(I;\mathcal{D}(A))$. Тоді задача (30) має єдиний розв'язок і він характеризується співвідношеннями*

$$\begin{gathered}\varphi(t)\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = g(t) + Bu(t), \quad t \in I,\\ -\varphi(t)\frac{dp(t)}{dt} + Ap(t) = 0, \quad t \in I, \quad p(T) = y(T) - z_*,\\ \big(B^*p + Nu, v - u\big)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial,\\ y \in W^1_{2,\varphi}(I;H) \cap L_{2,\varphi}(I;\mathcal{D}(A)),\\ p \in C^1(I;H) \cap C(I;\mathcal{D}(A)) \cap L_{2,\varphi}(I;H), \quad u \in U_\partial.\end{gathered} \tag{31}$$

Наслідок 4.1. *Нехай виконуються умови теореми 4.6 і, крім того, $U = L_{2,\varphi}(I;\mathcal{D}(A))$, $B = \mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$ – тотожній оператор), $Nv = \nu v\ \forall\, v \in U (\nu =$*

const > 0), $U_\partial = U$. *Тоді розв'язок задачі (30) є розв'язком інтегрального рівняння*

$$\nu u(t)) + \int_I [\varphi(s)]^{-1} e^{(\theta(t)+\theta(s))A} u(s)\,ds =$$
$$= e^{\theta(t)A} z_* - \int_I [\varphi(s)]^{-1} e^{(\theta(t)+\theta(s))A} g(s)\,ds, \quad t \in I, \tag{32}$$

та навпаки, причому для $\nu > (2\lambda_1)^{-1}$ *рівняння (32) можна розв'язати методом послідовних наближень.*

У **підрозділі 4.3** вивчено задачі оптимального керування системами, стани яких описуються лінійними параболічними рівняннями з межовим керуванням. Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ з кусково-гладкою межею Γ, $\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, $\Gamma_1 \neq \emptyset$, $G := \Omega \times I$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times I$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times I$. Позначимо $\widetilde{H}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}$. Під α розуміємо функцію з $C(I)$ таку, що $\alpha(t) > 0 \;\forall\, t \in I$.

Нехай $U = L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I; L^2(\Gamma_1))$, U_∂ – опукла замкнена підмножина в U. Стан системи для керування $v \in U$ визначаємо слабким розв'язком задачі

$$\varphi(t) y_t - \sum_{i,j=1}^{n} \big(a_{ij}(x,t) y_{x_j}\big)_{x_i} + a_0(x,t) y = f(x,t), \quad (x,t) \in G, \tag{33}$$

$$y\big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial \nu_A}\Big|_{\Sigma_1} := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) = g + v, \tag{34}$$

$$\lim_{t \to 0} e^{2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} \int_\Omega |y(x,t)|^2\,dx = 0. \tag{35}$$

Припускаємо, що

$(\mathcal{A}_1)$ $a_0, a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(G)$ $(i,j = \overline{1,n})$, $a_0(x,t) \geq 0$ для м.в. $(x,t) \in G$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha(t)\|\xi\|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ та м.в. $(x,t) \in G$;

$(\mathcal{A}_2)$ $f \in L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I; L^2(\Omega))$, $\quad g \in L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I; L^2(\Gamma_1))$.

Означення 4.1. *Слабким розв'язком задачі* (33)-(35) *називаємо функцію* $y \in L^2_{\mathrm{loc}}(0,T; \widetilde{H}^1(\Omega)) \cap C(I; L^2(\Omega))$, *яка задовольняє умову* (35) *та інтегральну тотожність*

$$\iint_G \Big\{ -(\eta\varphi)_t y\psi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_{x_i} \psi_{x_j} \varphi + a_0 y \psi \varphi \Big\}\,dxdt =$$
$$= \iint_G f\psi\varphi\,dxdt + \iint_{\Sigma_1} (g+v)\psi\varphi\,d\Sigma, \quad \psi \in H^1_0(\Omega),\ \varphi \in C^1_c(0,T). \tag{36}$$

Функція вартості має вигляд

$$J(v) = \|y(\cdot, T; v) - z_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|v\|^2_U, \quad v \in U_\partial, \tag{37}$$

де $z_0 \in L^2(\Omega)$, $\mu > 0$ – задані.

Задача оптимального керування: знайти керування $u \in U_\partial$ таке, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{38}$$

Теорема 4.6 (існування оптимального керування). *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $\omega < 1$ *та* $\inf\limits_{t \in I} \alpha(t) > 0$. *Тоді існує единий розв'язок задачі (38).*

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню задач оптимального керування системами, що описуються еволюційними рівняннями та варіаційними нерівностями без початкових умов. Такі задачі виникають при дослідженні різних процесів в природі та економіці.

Практично у всіх відомих нам наукових працях, де розглядаються задачі оптимального керування для еволюційних рівнянь, часовий проміжок обмежений знизу і задаються стандартні початкові умови. Нам відомі дві роботи, де досліджено задачі оптимального керування для еволюційних рівнянь, і тільки лінійних, заданих на необмеженому знизу часовому проміжку, з обмеженнями на поведінку розв'язку при прямуванні часової змінної до $-\infty$ та керуваннями в правих частинах.

В даній дисертаційній роботі проведено дослідження задач оптимального керування, коли рівняння стану є нелінійними параболічними рівняннями та варіаційними нерівностями, заданими на необмеженому знизу часовому проміжку, з керуваннями у коефіцієнтах, а також еволюційними рівняннями, заданими на скінченному часовому проміжку, із сильним виродженням в початковий момент часу та керуваннями у правих частинах.

Тут вивчено задачі оптимального керування (з різними типами спостережень) для нелінійних параболічних рівнянь без початкових умов з керуваннями у коефіцієнтах і отримано умови існування розв'язків таких задач, коли рівняннями стану є слабко нелінійні рівняння з обмеженнями на поведінку розв'язку на нескінченності, сильно нелінійні рівняння з монотонними просторовими частинами без обмежень на зростання вихідних даних і розв'язків при $t \to -\infty$, сильно нелінійні рівняння з немонотонними просторовими частинами з певною поведінкою розв'язків на нескінченності.

Також досліджено задачі оптимального керування (з різними типами спостережень) для еволюційних варіаційних нерівностей без початкових умов і отримано умови існування оптимальних керувань у випадку, коли рівняннями стану є слабко нелінійні варіаційні нерівності з керуваннями у коефіцієнтах та з умовами на поведінку розв'язку, сильно нелінійні варіаційні нерівності з керуваннями у правих частинах без обмежень на поведінку розв'язку.

Крім того, вивчено задачі оптимального керування для еволюційних рівнянь із сильним виродженням в початковий момент часу та керуваннями у правих частинах і отримано необхідні та достатні умови існування і єдиності розв'язків таких задач, а також оптимальності керування у випадку фінального спостереження.

Ці результати мають теоретичний характер і їх можна використати в теорії задач оптимального керування та задач без початкових умов, а також при оптимізації процесів, які моделюються задачами без початкових умов для еволюційних рівнянь чи варіаційних нерівностей.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Бокало М.М., Цебенко А.М.* Задача оптимального керування еволюційними системами із сильним виродженням в початковий момент часу. Наук. вісник Чернівецького національного ун-ту ім. Ю. Федьковича. Серія: Математика. 2012; 32 (2–3): 24–29.

2. *Бокало М.М., Цебенко А.М.* Оптимальне керування системами, які описуються еволюційними рівняннями з виродженням в початковий момент часу. Мат. студ. 2012; 38 (2): 177–187.

3. *Цебенко А.М.* Оптимальне межове керування системами, стан яких визначається задачею без початкових умов для параболічних рівнянь. Мат. студ. 2015; 44 (1): 89–103.

4. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Existence of optimal control in the coefficients for problem without initial condition for strongly nonlinear parabolic equations. Мат. студ. 2016; 45 (1): 40–56.

5. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control problem for systems governed by nonlinear parabolic equations without initial conditions. Carpathian Math. Publ. 2016; 8 (1): 21–37.

6. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal resource coefficient control in a dynamic population model without initial conditions. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2016; 81: 39–57.

7.*Бокало М.М., Цебенко А.М.* Оптимальне керування в задачах без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей. Мат. студ. 2016; 46 (1): 51–66.

8. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control in problems without initial conditions for weakly nonlinear evolution variational inequalities. Вісник Львівського університету. Серія механіко–математична. 2016; 82: 76–94.

9. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control for systems governed by parabolic equations without initial conditions with controls in the coefficients. Electron. J. Differential Equations. 2017; 2017 (72): 1–22.

10. *Tsebenko A.M.* Optimal control problem for systems described by parabolic equations degenerated at initial moment. International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach: Abstracts of Reports, Lviv, Ukraine, 17–21 September 2012. – Lviv, 2012. – P. 235.

11. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control problem for evolution systems with strong degeneration at initial moment. International conference "Nonlinear Partial Differential Equations – 2013": Book of abstracts, September 9–14, 2013, Donetsk, Ukraine. – Donetsk, 2013. – P. 15.

12. *Цебенко А.М.* Оптимальне керування системами, стан яких описується задачею без початкових умов для параболічних рівнянь. Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: Тези доп. VI Міжнар. наук. конф., Кам'янець–Подільський нац. ун–т ім. Івана Огієнка, 4–5 квітня, 2014 р. – Кам'янець–Подільський, 2014. – С. 175–176.

13. *Tsebenko A.M.* Boundary optimal control for parabolic problem without initial conditions. Міжнародна конференція молодих математиків. Тези доповідей, 3–6 червня 2015.– Київ, 2015.– С. 131.

14. *Tsebenko A.M., Bokalo M.M.* Nonlinear optimal control in parabolic problem without initial conditions. International V. Skorobohatko mathematical conference, August 25–28, 2015, Drohobych, Ukraine. – P. 164.

15. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control problem for systems governed by nonlinear parabolic problem without initial condition. International Scientific Conference "Differential equations and their applications May 19–21, 2016, Uzhhorod, Ukraine. – P. 18.

16. *Tsebenko A.M.* Existence of optimal control for problem without initial condition for strongly nonlinear parabolic equations with controls in the coefficients. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2016 Львів, 25–27 травня 2016, – Львів, 2016. – Режим доступу до матеріалів:
http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Tsebenko.pdf.

17. *Tsebenko A.M., Bokalo M.M.* Optimal control of resource coefficient in a parabolic population model without initial conditions. International Conference on Differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20–24, 2016, Lviv, Ukraine. – P. 118.

18. *Tsebenko A.M., Bokalo M.M.* Optimal resource coefficient control in a dynamic population model without initial conditions. International Scientific Conference "Differential-Functional Equations and their Application"dedicated to the 80th anniversary of Professor V. I. Fodchuk, September 28–30, 2016, Chernivtsi, Ukraine. P. 136.

19. *Tsebenko A.M.* Optimal coefficient control in problem without initial

condition for strongly nonlinear parabolic equations. 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynskii: Book of abstracts, November 9–11, 2016, Kyiv, Ukraine. – Kyiv, 2016. – P. 144–146.

Анотація

Цебенко А.М. Оптимальне керування в задачах без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Львівський національний університет імені Івана Франка. Львів, 2017.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку літератури. У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з державною науково–дослідною темою та особистий внесок здобувача, а також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

У розділі 1 наведено огляд літератури, що стосується теми дисертації.

У розділі 2 розглянуто задачі оптимального керування для слабко та сильно нелінійних параболічних рівнянь без початкових умов з керуваннями у коефіцієнтах та різними типами спостережень. У підрозділі 2.1 досліджено задачі оптимального керування системами, стан яких описується задачею без початкових умов для слабко нелінійних рівнянь. Знайдено достатні, а у випадку лінійного рівняння стану і необхідні, умови існування розв'язків таких задач. У підрозділі 2.2 отримано умови існування розв'язку задачі оптимального керування процесами, які моделюються задачею Фур'є для сильно нелінійних параболічних рівнянь з монотонними просторовими частинами без обмежень на зростання вихідних даних та поведінку розв'язків при $t \to -\infty$. У підрозділі 2.3 встановлено умови існування оптимального керування системами, що описуються сильно нелінійними параболічними рівняннями з немонотонними просторовими частинами з певними обмеженнями на зростання вихідних даних та поведінку розв'язків при $t \to -\infty$.

На даний момент досить добре вивчені задачі оптимального керування для рівнянь з частинними похідними при наявності початкової умови. Що стосується такого роду задач, коли відсутня стандартна початкова умова, то вони розглядались лише для лінійного рівняння стану та керувань у правій частині. Випадок, коли стан системи описується розв'язками задач без початкових умов для нелінійних рівнянь з керуваннями у коефіцієнтах, досліджено вперше.

У розділі 3 досліджено задачі оптимального керування для еволюційних варіаційних нерівностей без початкових умов з різними типами спостережень. У підрозділі 3.1 доведено існування оптимальних керувань системами, стан яких описується слабко нелінійними варіаційними нерівностями без початкових умов з керуваннями у коефіцієнтах. У підрозділі 3.2 встановлено умови існування розв'язків задач оптимального керування у випадку, коли рівняннями стану керованої системи є сильно нелінійні варіаційні нерівності без початкових умов і керування є в правих частинах. Зауважимо, що оптимальне керування в задачах без початкових умов для варіаційних нерівностей раніше не вивчалось.

У розділі 4 вивчено задачі оптимального керування для еволюційних рівнянь із сильним виродженням в початковий момент часу, в яких керування знаходиться в правих частинах. У підрозділі 4.1 отримано необхідні та достатні умови однозначної розв'язності задачі оптимального керування для абстрактних еволюційних рівнянь. У випадку фінального спостереження знайдено сукупність співвідношень, що характеризує оптимальне керування. У підрозділі 4.2 доведено коректність задач оптимального керування у випадку фінального спостереження, коли стан системи описується рівняннями, оператор головної частини яких є генератором аналітичної півгрупи операторів в гільбертовому просторі. У підрозділі 4.3 встановлено необхідні і достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі оптимального керування для лінійних параболічних рівнянь межовим керуванням. Задачі оптимального керування для еволюційних рівнянь із сильним виродженням в початковий момент часу досліджено вперше.

Ключові слова: параболічне рівняння, еволюційне рівняння, вироджуване параболічне рівняння, параболічна варіаційна нерівність, еволюційна варіаційна нерівність, задача без початкових умов, оптимальне керування, задача оптимального керування.

Abstract

Tsebenko A.M. Optimal control in problems without initial conditions for evolution equations and variational inequalities. – Manuscript.
The thesis presented for the degree of Candidate of Sciences (Doctor of Philosophy) in Physics and Mathematics in speciality 01.01.02 – differential equations. – The Ivan Franko National University of Lviv. Lviv, 2017.

The thesis is dedicated to the investigation of the optimal control problems for systems governed by evolution equations and variational inequalities without initial conditions. Necessary and sufficient conditions for existence of an optimal coefficient control in the problem without initial conditions for weakly nonlinear parabolic equations are examined. The sufficient conditions for existence of an optimal control in the case when the state of controlled system is governed by Fourier problem for strongly nonlinear equations with monotone and nonmonotone spatial parts are investigated. The conditions for existence of the solutions of an optimal control problem for systems governed by Fourier problems for variational inequalities with controls in the right-hand side and in the coefficients are established. The control problem for a linear parabolic equations strongly degenerated at the initial moment controlled by the right-hand side of the equation are studied. Necessary and sufficient conditions for existence of an optimal control are proved.

Key words: parabolic equation, evolution equation, degenerated parabolic equation, parabolic variational inequality, evolutionary variational inequality, problem without initial condition, optimal control, optimal control problem.

Аннотация

Цебенко А.М. Оптимальное управление в задачах без начальных условий для эволюционных уравнений и вариационных неравенств. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко. Львов, 2017.

Диссертация посвящена исследованию задач оптимального управления системами, состояние которых описывается решениями задач без начальных условий для эволюционных уравнений и вариационных неравенств. Изучены необходимые и достаточные условия существования оптимального управления коэффициентами слабо нелинейных параболических уравнений; Получены условия существования решения задачи оптимального управления в случае, когда состояние системы описывается задачей Фурье для сильно нелинейных параболических уравнений с монотонными и немонотонными пространственными частями. Найдены условия существования оптимального управления коэффициентами в слабо нелинейных вариационных неравенств. Исследован вопрос существования оптимального управления правыми частями сильно нелинейных вариационных неравенств. Установлена корректность задачи оптимального управления системами, состояния которых описываются задачами без начальных условий для эволюционных сильно вырождающихся в начальный момент времени уравнений с управлениями в правых частях.

Ключевые слова: параболическое уравнение, эволюционное уравнение, вырождающееся параболическое уравнение, параболическое вариационное неравенство, эволюционное вариационное неравенство, задача без начальных условий, оптимальное управление, задача оптимального управления.