ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЦЕБЕНКО АНДРІЙ МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 517.95

ДИСЕРТАЦІЯ

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

01.01.02 – диференціальні рівняння

математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. ________________________

Науковий керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор
Бокало Микола Михайлович

Львів 2017

Анотація

Цебенко А.М. Оптимальне керування в задачах без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.02 "Диференціальні рівняння". – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2017.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку літератури. У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з державною науково-дослідною темою, особистий внесок здобувача та апробацію і публікації основних результатів дисертації.

У розділі 1 наведено огляд літератури за тематикою дисертації. У підрозділі 1.1 розглянуто результати, що стосуються задач без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей. У підрозділі 1.2 наведено огляд публікацій стосовно задач оптимального керування процесами, що описуються еволюційними рівняннями та варіаційними нерівностями з початковими умовами. Підрозділ 1.3 присвячений результатам стосовно задач оптимального керування системами, стан яких описується еволюційними рівняннями без початкових умов.

У розділі 2 розглянуто задачі оптимального керування для слабко та сильно нелінійних параболічних рівнянь без початкових умов з керуваннями у коефіцієнтах при різних типах спостережень. У підрозділі 2.1 досліджено задачі оптимального керування системами, стан яких описується слабко нелінійними рівняннями, які задані на необмеженому знизу часовому проміжку, при наявності припущень щодо поведінки розв'язку на нескінченності. Знайдено достатні, а у випадку лінійного рівняння стану і необхідні, умови існування розв'язків таких задач. У підрозділі 2.2 вивчено задачі оптимального керування системами, стан яких описується сильно нелінійними рівняннями з монотонними просторовими частинами при відсутності обмежень на зростання вихідних даних та поведінку розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$. Отримано умови існування оптимального керування. У підрозділі 2.3 досліджено оптимальне керування процесами, що моделюються задачами без початкових умов для сильно нелінійних рівнянь з немонотонними просторовими частинами. У випадку розподіленого спостереження встановлено умови існування оптимального керування для таких задач у класах функцій з певною поведінкою на нескінченності.

На даний момент досить добре вивчені задачі оптимального керування для рівнянь з частинними похідними при наявності початкової умови. Що стосується такого роду задач, коли відсутня стандартна початкова умова, то вони розглядались лише для лінійного рівняння стану та керувань у правій частині. Випадок, коли стан системи описується задачею без початкових умов для нелінійних рівнянь з керуваннями у коефіцієнтах, розглянуто вперше.

У розділі 3 досліджено задачі оптимального керування для еволюційних варіаційних нерівностей без початкових умов при різних типах спостережень. У підрозділі 3.1 розглянуто задачі оптимального керування системами, стан яких описується слабко нелінійними варіаційними нерівностями без початкових умов. Досліджено випадок керування у коефіцієнтах та доведено існування оптимальних керувань. У підрозділі 3.2 вивчено оптимальне керування в задачах без початкових умов у випадку, коли рівняннями стану керованої системи є сильно нелінійні варіаційні нерівності з керуваннями у правих частинах. Встановлено умови існування розв'язків таких задач. Зауважимо, що оптимальне керування в задачах без початкових умов для варіаційних нерівностей раніше не вивчалось.

У розділі 4 вивчено задачі оптимального керування для еволюційних рівнянь без початкових умов із сильним виродженням в початковий момент часу та керуваннями в правих частинах. У підрозділі 4.1 вивчено оптимальне керування в задачах без початкових умов для абстрактних еволюційних рівнянь.

Отримано необхідні та достатні умови однозначної розв'язності таких задач, а у випадку фінального спостереження знайдено сукупність співвідношень, що характеризує оптимальне керування. У підрозділі 4.2 розглянуто випадок, коли стан системи описується рівняннями, оператори головних частин яких є генераторами аналітичних півгруп операторів в гільбертових просторах. Доведено коректність таких задач у випадку фінального спостереження. У підрозділі 4.3 досліджено такі задачі у випадку, коли стан системи описується лінійними параболічними рівняннями. Розглянуто межове керування та встановлено необхідні і достатні умови існування та єдиності розв'язку таких задач. Задачі оптимального керування для еволюційних рівнянь із сильним виродженням в початковий момент часу досліджено вперше.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення і можуть бути використані для розвитку теорії рівнянь з частинними похідними і застосовані при дослідженні задач газо- та гідродинаміки, теорії біологічних популяцій, оптимального керування, хімічної кінетики, тощо.

Ключові слова: параболічне рівняння, еволюційне рівняння, вироджуване параболічне рівняння, параболічна варіаційна нерівність, еволюційна варіаційна нерівність, задача без початкових умов, оптимальне керування, задача оптимального керування.

Список публікацій здобувача за тематикою дисертації

1. *Бокало М.М., Цебенко А.М.* Задача оптимального керування еволюційними системами із сильним виродженням в початковий момент часу. Наук. вісник Чернівецького національного ун-ту ім. Ю. Федьковича. Серія: Математика. 2012; 32 (2–3): 24–29.

2. *Бокало М.М., Цебенко А.М.* Оптимальне керування системами, які описуються еволюційними рівняннями з виродженням в початковий момент часу. Мат. студ. 2012; 38 (2): 177–187.

3. *Цебенко А.М.* Оптимальне межове керування системами, стан яких визначається задачею без початкових умов для параболічних рівнянь. Мат. студ. 2015; 44 (1): 89–103.

4. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Existence of optimal control in the coefficients for problem without initial condition for strongly nonlinear parabolic equations. Мат. студ. 2016; 45 (1): 40–56.

5. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control problem for systems governed by nonlinear parabolic equations without initial conditions. Carpathian Math. Publ. 2016; 8 (1): 21–37.

6. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal resource coefficient control in a dynamic population model without initial conditions. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2016; 81: 39–57.

7.*Бокало М.М., Цебенко А.М.* Оптимальне керування в задачах без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей. Мат. студ. 2016; 46 (1): 51–66.

8. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control in problems without initial conditions for weakly nonlinear evolution variational inequalities. Вісник Львівського університету. Серія механіко–математична. 2016; 82: 76–94.

9. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control for systems governed by parabolic equations without initial conditions with controls in the coefficients. Electron. J. Differential Equations. 2017; 2017 (72): 1–22.

10. *Tsebenko A.M.* Optimal control problem for systems described by parabolic equations degenerated at initial moment. International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach: Abstracts of Reports, Lviv, Ukraine, 17–21 September 2012. – Lviv, 2012. – P. 235.

11. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control problem for evolution systems with strong degeneration at initial moment. International conference "Nonlinear Partial Differential Equations – 2013": Book of abstracts, September 9–14, 2013, Donetsk, Ukraine. – Donetsk, 2013. – P. 15.

12. *Цебенко А.М.* Оптимальне керування системами, стан яких описується задачею без початкових умов для параболічних рівнянь. Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: Тези доп. VI Міжнар. наук. конф., Кам'янець–Подільський нац. ун–т ім. Івана Огієнка, 4–5 квітня, 2014 р. – Кам'янець–Подільський, 2014. – С. 175–176.

13. *Tsebenko A.M.* Boundary optimal control for parabolic problem without initial conditions. Міжнародна конференція молодих математиків. Тези допо-

ідей, 3–6 червня 2015.– Київ, 2015.– С. 131.

14. *Tsebenko A.M.* Nonlinear optimal control in parabolic problem without initial conditions / A. M. Tsebenko, M. M. Bokalo // International V. Skorobohatko mathematical conference, August 25–28, 2015, Drohobych, Ukraine. – P. 164.

15. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control problem for systems governed by nonlinear parabolic problem without initial condition. International Scientific Conference "Differential equations and their applications May 19–21, 2016, Uzhhorod, Ukraine. – P. 18.

16. *Tsebenko A.M.* Existence of optimal control for problem without initial condition for strongly nonlinear parabolic equations with controls in the coefficients. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2016 Львів, 25–27 травня 2016, – Львів, 2016. – Режим доступу до матеріалів: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Tsebenko.pdf.

17. *Tsebenko A.M., M.M. Bokalo* Optimal control of resource coefficient in a parabolic population model without initial conditions. International Conference on Differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20–24, 2016, Lviv, Ukraine. – P. 118.

18. *Tsebenko A.M., M.M. Bokalo* Optimal resource coefficient control in a dynamic population model without initial conditions. International Scientific Conference "Differential-Functional Equations and their Application"dedicated to the 80th anniversary of Professor V. I. Fodchuk, September 28–30, 2016, Chernivtsi, Ukraine. P. 136.

19. *Tsebenko A. M.* Optimal coefficient control in problem without initial condition for strongly nonlinear parabolic equations. 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynskii: Book of abstracts, November 9–11, 2016, Kyiv, Ukraine. – Kyiv, 2016. – P. 144–146.

Abstract

Tsebenko A. M. Optimal control in problems without initial conditions for evolution equations and variational inequalities. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics (Doctor of Philosophy) in speciality 01.01.02 "Differential equations". – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2017.

The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusions and the references. The introduction consists of the relevance of research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods. The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

Chapter 1 provides an literature review concerning on the topic of the thesis. In Section 1.1 we considered the results related to the problems without initial conditions for the evolution equations and variational inequalities. In Section 1.2 publications and results concerning optimal control problems governed by evolution equations and variational inequalities with initial conditions. Section 1.3 is an overview of the results that were previously obtained for linear optimal control problems, whose states are described by evolution equations without initial conditions.

Section 2 deals with optimal coefficient control for weakly and strongly nonlinear parabolic equations without initial conditions and different types of observations. In Section 2.1 the optimal control for systems governed by weakly nonlinear equations without initial conditions are considered. Sufficient condition for the existence of the solution of such problems are found. And in the case of a li-

near state equation also the necessary conditions for the existence of solution are established. In Section 2.2 the optimal control problem for systems whose states are described by Fourier problems for strongly nonlinear equations with monotone spatial parts are examined. Here we do not impose any restrictions on the growth of data or the behavior of the solutions of the states of controlled system when time variable tends to $-\infty$. Conditions for existence of optimal control for such problems are obtained. In Section 2.3 the optimal control for systems governed by problems without initial conditions for highly nonlinear state equations with monotonic spatial parts are investigated. The case of distributed observations is considered. The conditions for existence of the optimal control for such problems in classes of functions with certain behavior on infinity are established. Currently optimal control for partial differential equations with initial conditions are largely studied. Optimal control for systems described by problems without initial conditions were considered only in the case of linear state equations and control of the right-hand side. The case where the state of controlled system is simulated by problem without initial conditions for nonlinear equations with controls in the coefficients is investigated for the first time.

Chapter 3 is devoted to the optimal control for problems without initial conditions for evolution variational inequalities with different types of observations. In Section 3.2 the optimal control in problems without initial conditions for strongly nonlinear variational inequalities is studied. The control functions appear in the right-hand sides of the state equations. The conditions for existence of the solutions of such problems are investigated. In Section 3.1 optimal control in problems without initial conditions for weakly nonlinear evolution variational inequalities are examined. The case of coefficient controls is considered and sufficient conditions for existence of optimal controls are obtained. Note that optimal control in problems without initial conditions for variational inequalities has not been studied before.

Section 4 deals with the optimal right-hand side control in problems without initial conditions for evolution equations with strong degeneration at the initial moment. In Section 4.1 such problems are investigated in case when the state of controlled system is described by a linear parabolic equations. The boundary control is considered and the necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of such problems are found. In Section 4.2 optimal control for problems without initial conditions for abstract evolution equations are studied. Necessary and sufficient conditions for the unique solvability of such problems are obtained. And in the case of final observation a set of relations that characterizes optimal control is found. Section 4.3 deals with the case where state of controlled system is governed by equations, operator of the main part of which is a generator of analytic semigroup of operators in Hilbert space. The correctness of such problems in the case of a final observation is proved. Problems that have been explored in Chapter 4, i.e. optimal control problems for evolution equations with strong degeneration of the initial moment are investigated for the first time.

The practical significance of the results. The results of the thesis have theoretical significance and can be used for the development of the theory of partial differential equations and applied in problems of gas- and hydrodynamics, the theory of biological populations, optimal control, chemical kinetics and more.

Keywords: parabolic equation, evolution equation, degenerated parabolic equation, parabolic variational inequality, evolutionary variational inequality, problem without initial condition, optimal control, optimal control problem.

Publications list of the applicant.

1. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control problems for evolution systems with strong degeneration at the initial moment. Scientific herald of Yu. Fedkovych Chernivtsi national university. Series: Mathematics. 2012; 32 (2–3): 24–29.

2. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control problems for systems described by evolution equations degenerated at the initial moment. Mat. Stud. 2012; 38 (2): 177–187.

3. *Tsebenko A.M.* Boundary optimal control for systems described by parabolic equation without initial conditions. Mat. Stud. 2015; 44 (1): 89–103.

4. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Existence of optimal control in the coefficients for problem without initial condition for strongly nonlinear parabolic equations. Mat. Stud. 2016; 45 (1): 40–56.

5. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control problem for systems governed by nonlinear parabolic equations without initial conditions. Carpathian Math.

Publ. 2016; 8 (1): 21–37.

6. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal resource coefficient control in a dynamic population model without initial conditions. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016; 81: 39–57.

7. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control in problems without initial conditions for evolutionary variational inequalities. Mat. Stud. 2016; 46 (1): 51–66.

8. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control in problems without initial conditions for weakly nonlinear evolution variational inequalities. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016; 82: 76–94.

9. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control for systems governed by parabolic equations without initial conditions with controls in the coefficients. Electron. J. Differential Equations. 2017; 2017 (72): 1–22.

10. *Tsebenko A.M., Bokalo M.M.* Optimal control problem for systems described by parabolic equations degenerated at initial moment. International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach: Abstracts of Reports, Lviv, Ukraine, 17–21 September 2012. – Lviv, 2012. – P. 235.

11. *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control problem for evolution systems with strong degeneration at initial moment. International conference "Nonlinear Partial Differential Equations – 2013": Book of abstracts, September 9–14, 2013, Donetsk, Ukraine. – Donetsk, 2013. – P. 15.

12. *Цебенко А.М.* Optimal control for systems governed by parabolic equations without initial conditions. Modern problems of mathematical modeling, forecasting and optimization: Abstracts of Reports. VI Intern. Science. Conf., Ivan Ohienko National University of Kamenets-Podilskii, 4–5 April, 2014. – Kamenets-Podilskii, 2014. – P. 175–176.

13. *Tsebenko A.M.* Boundary optimal control for parabolic problem without initial conditions. International conference of young mathematicians. Abstracts, 3–6 June 2015.– Kyiv, 2015.– P. 131.

14. *Tsebenko A.M., Bokalo M.M.* Nonlinear optimal control in parabolic problem without initial conditions. International V. Skorobohatko mathematical conference, August 25–28, 2015, Drohobych, Ukraine. – P. 164.

15. *M.M. Bokalo, Tsebenko A.M.* Optimal control problem for systems governed by nonlinear parabolic problem without initial condition. International

Scientific Conference "Differential equations and their applications May 19–21, 2016, Uzhhorod, Ukraine. – P. 18.

16. *Tsebenko A.M.* Existence of optimal control for problem without initial condition for strongly nonlinear parabolic equations with controls in the coefficients. The Conference of Young Scientists «Pidstryhach Readings – 2016» Lviv, May 25-27, 2016. – Access to the material: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Tsebenko.pdf.

17. *Tsebenko A.M., Bokalo M.M.* Optimal control of resource coefficient in a parabolic population model without initial conditions. International Conference on Differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20–24, 2016, Lviv, Ukraine. – P. 118.

18. *Tsebenko A.M., Bokalo M.M.* Optimal resource coefficient control in a dynamic population model without initial conditions. International Scientific Conference "Differential-Functional Equations and their Application"dedicated to the 80th anniversary of Professor V. I. Fodchuk, September 28–30, 2016, Chernivtsi, Ukraine. P. 136.

19. *Tsebenko A.M.* Optimal coefficient control in problem without initial condition for strongly nonlinear parabolic equations. 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynskii: Book of abstracts, November 9–11, 2016, Kyiv, Ukraine. – Kyiv, 2016. – P. 144–146.

Зміст

Перелік умовних позначень

- n — довільне фіксоване натуральне число;
- $T > 0$ — довільне фіксоване дійсне число;
- $\mathbb{R}^n$ — лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $x = (x_1, \ldots, x_n)$ дійсних чисел, з нормою $|x| := (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$;
- $\mathbb{R}^{n+1}$ — лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $(x, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$ дійсних чисел, з нормою $|(x, t)| := (|x|^2 + |t|^2)^{1/2}$;
- Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$;
- $\Gamma = \partial\Omega$ — межа Ω;
- $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої до Γ нормалі;
- Γ_0, Γ_1 — частини поверхні Γ такі, що $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$ і $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$;
- $S := (-\infty, 0]$;
- $I := (0, T]$;
- $Q := \Omega \times S$;
- $\Sigma := \Gamma \times S$;
- $G := \Omega \times I$;
- $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times I$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times I$;
- 2^Z — сім'я всіх підмножин (довільної) множини Z;
- $w(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} := w(t_2) - w(t_1)$;
- $C(F)$, де F — довільна множина в $\mathbb{R}^m$ при $m = n$ або $m = n + 1$, — простір неперервних дійснозначних функцій на F;
- $C^k(\Omega)$, де $k \in \mathbb{N}$, — простір k-раз неперервно-диференційовних дійснозначних функцій на Ω;

- $C_c^\infty(\Omega)$ — лінійний простір, що складається з нескінченно диференційовних на Ω функцій, які мають компактний носій;
- $C^1(\mathbb{R})$ — простір неперервно-диференційовних функцій на $\mathbb{R}$;
- $C_c^1(a,b)$, де $-\infty \le a < b \le +\infty$, — лінійний простір неперервно диференційовних на (a,b) функцій з компактним носієм;
- $L^q_{\rm loc}(S)$, де $q \in [1,\infty]$, — простір дійснозначних функцій на S, звуження яких на будь-який відрізок $[t_1,t_2] \subset S$ належать простору $L^q\big(t_1,t_2\big)$;
- $L^q_{\rm loc}(\overline{F})$, де $q \in [1,\infty]$, F — необмежена вимірна множина, — лінійний простір вимірних на F функцій таких, що їх звуження на довільну обмежену вимірну підмножину $F' \subset F$ належать простору $L^q(F')$;
- $H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \mid v_{x_i} \in L^2(\Omega)\ (i=\overline{1,n})\}$ — простір Соболєва;
- $\nabla u := (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ — градієнт функції $u = u(x_1,\ldots,x_n)$;
- $(v,w)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \{\nabla v \nabla w + vw\}\,dx$ — скалярний добуток в $H^1(\Omega)$;
- $\|v\|_{H^1(\Omega)} := \Big(\int\limits_\Omega \{|\nabla v|^2 + |v|^2\}\,dx\Big)^{1/2}$ — норма в $H^1(\Omega)$;
- $H^1_0(\Omega)$ — замикання простору $C_c^\infty(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$;
- $(v,w)_{H^1_0(\Omega)} := \int\limits_\Omega \nabla v \nabla w\,dx$ — скалярний добуток в $H^1(\Omega)$;
- $\|v\|_{H^1_0(\Omega)} := \Big(\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dx\Big)^{1/2}$ — норма в $H^1_0(\Omega)$;
- $H^{-1}(\Omega)$ — спряжений до $H^1_0(\Omega)$ простір.

Для довільного банахового (гільбертового) простору X:

- $\|\cdot\|_X$ — норма на X;
- $(\cdot,\cdot)_X$ — скалярний добуток на X;
- X' — спряжений до X простір;
- $L^q_{\rm loc}(S;X)$, де $q \in [1,\infty]$, — лінійний простір функцій, які визначені на S і приймають значення в X, а їх звуження на будь-який відрізок $[a,b] \subset S$ належать простору $L^q(a,b;X)$;
- $C(S;X)$ — простір неперервних функцій, які визначені на S і приймають значення в X.

Вступ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню задач оптимального керування процесами, які моделюються задачами без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей.

Оптимальне керування системами, що описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними, є надзвичайно плідним полем для досліджень та джерелом для багатьох складних математичних проблем та цікавих застосувань. Популярність такого роду досліджень пов'язана з їх активним використанням при вирішенні проблем природознавства, зокрема, гідро- і газодинаміки, фізики тепла, фільтрації, дифузії, плазми, теорії біологічних популяцій.

Основи теорії оптимального керування детермінованими системами, що описуються рівняннями з частинними похідними, закладено у відомій монографії Ж.-Л. Ліонса [26] (1972 р.). Пізніше ця тематика активно розвивалася багатьма математиками, серед яких А. М. Самойленко, М. З. Згуровський, В. О. Капустян, І. Г. Баланенко, І. Д. Пукальський, В. С. Мельник, Т. А. Мельник, А. Н. Новіков, Л. А. Власенко, Л. Волошко, Ж.- П. Раймонд (J.-P. Raymond), С. Ленхарт (S. Lenhart), З. Лу (Z. Lu), І. В. Бушуєв (I. V. Bushuev), Е. Казас (E. Casas), Дж. Бінтз (J. Bintz), Х. Фінотті (H. Finotti), К. Р. Фістер (K. R. Fister), А. Х. Хейтер (A. H. Khater), А. Б. Шамарданб (A. B. Shamardanb), С. Х. Фараг (S. H. Farag), Х. О. Фатторіні (H. O. Fattorini). Оптимальне керування системами, стан яких описується варіаційними нерівностями, також досить добре досліджені. Це зроблено, зокрема, в працях П. І. Когута, О. П. Купенка, Д. Р. Адамса (D. R. Adams), В. Барбу (V. Barbu), Ф. Берніса (F. Bernis), М. Букруша (M. Boukrouche), К. Іто (K. Ito), К. Куніша (K. Kunisch), С. Ленхарт (S. Lenhart), Г. Р. Легерінга (G. R. Leugering), Р. Манзо (R. Manzo), Д. А. Тарзіа (D. A. Tarzia). Зауважимо, що у згаданих та багатьох інших дослідженнях розглядалось оптимальне керування системами, стан яких описується розв'язками задач для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей з початковими умовами.

Систематичне вивчення задач без початкових умов для еволюційних рівнянь розпочалось із добре відомої праці А.М. Тіхонова [31] (1935 р.), де було встановлено, що єдиність розв'язку задачі без початкових умов для рівняння теплопровідності гарантується певними умовами на поведінку розв'язку при прямуванні часової змінної до $-\infty$, наприклад, його обмеженістю. Проте згодом у працях М.М. Бокала (див., наприклад, [1, 2]) було показано, що для деяких нелінійних параболічних рівнянь розв'язок задачі без початкових умов єдиний у класі функцій з довільною поведінкою при прямуванні часової змінної до $-\infty$. Задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей досліджували, зокрема, С. Д. Ейдельман, О. А. Олійник, С. Д. Івасишин, О. А. Панков, М. Д. Мартиненко, Л. Ф. Бойко, В. П. Лавренчук, М. І. Матійчук, М. М. Бокало, С. П. Лавренюк, Н. П. Процах, П. Я. Пукач, О. М. Бугрій, Т. М. Балабушенко, Ю. Б. Дмитришин, Є. І. Моісєєв, Р. Шовальтер (Showalter R.E.).

На даний час достатньо повно вивчені задачі оптимального керування у випадку, коли стан системи описується еволюційними рівняннями чи варіаційними нерівностями при наявності початкової умови. В той же час задачі оптимального керування системами, стан яких описується еволюційними рівняннями без початкових умов, розглянуто лише в двох роботах М.М. Бокала [7, 8]. Там досліджено випадок лінійних рівнянь стану системи з керуваннями в правих частинах. В даній дисертаційній роботі продовжено ці дослідження у випадках, коли рівняння стану є нелінійними параболічними рівняннями та варіаційними нерівностями з керуваннями у коефіцієнтах, а також еволюційними рівняннями із сильним виродженням в початковий момент часу та керуваннями у правих частинах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертації отримано в рамках виконання науково–дослідної державної теми кафедри диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка "Дослідження нелінійних задач для диференціальних операторів"(номер держреєстрації 0114U004540).

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є дослідження умов існування оптимального керування процесами, які моделюються задачами без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей.

Завданнями дисертаційного дослідження є:

– встановити необхідні та достатні умови існування оптимального керування коефіцієнтами в задачі без початкових умов для слабко нелінійних параболічних рівнянь;

– дослідити умови існування розв'язку задачі оптимального керування у випадку, коли стан системи моделюється задачею Фур'є для сильно нелінійних рівнянь з монотонними та немонотонними просторовими частинами;

– відшукати достатні умови існування оптимального керування коефіцієнтами в задачі без початкових умов для слабко нелінійних варіаційних нерівностей;

– дослідити питання існування оптимального керування правими частинами в задачі Фур'є для сильно нелінійних варіаційних нерівностей;

– вивчити коректність задач оптимального керування системами, стани яких описуються розв'язками задач без початкових умов для еволюційних рівнянь із сильним виродженням в початковий момент часу та керуваннями у правих частинах.

Об'єктом дослідження є задачі оптимального керування процесами, які моделюються задачами без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей.

Предметом досліджень є питання існування та єдиності оптимального керування процесами, які моделюються задачами без початкових умов для лінійних, слабко і сильно нелінійних параболічних рівнянь, еволюційних рівнянь із сильним виродженням в початковий момент часу, а також слабко і сильно нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей.

Методи досліджень. У роботі використовуються методи та ідеї теорії рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу, теорії оптимального керування, зокрема, методи Гальоркіна, монотонності і компактності, теорії півгруп операторів в банаховому просторі, принцип стискуючих відображень та інші.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі вперше:

- вивчено задачі оптимального керування (з різними типами спостережень) для нелінійних параболічних рівнянь без початкових умов з керуваннями у коефіцієнтах і отримано умови існування розв'язків таких задач, коли рівняннями стану є

  – слабко нелінійні рівняння з обмеженнями на поведінку розв'язку на нескінченності,

  – сильно нелінійні рівняння з монотонними просторовими частинами без обмежень на зростання вихідних даних і розв'язків на нескінченності,

  – сильно нелінійні рівняння з немонотонними просторовими частинами при наявності умов на поведінку розв'язків на нескінченності;

- досліджено задачі оптимального керування (з різними типами спостережень) для еволюційних варіаційних нерівностей без початкових умов і отримано умови існування оптимальних керувань у випадку, коли рівняннями стану є

  – слабко нелінійні варіаційні нерівності з керуваннями у коефіцієнтах при наявності умов на поведінку розв'язків на нескінченності,

  – сильно нелінійні варіаційні нерівності з керуваннями у правих частинах без обмежень на поведінку розв'язків на нескінченності;

- вивчено задачі оптимального керування для еволюційних рівнянь із сильним виродженням в початковий момент часу та керуваннями у правих частинах і отримано необхідні та достатні умови

  – існування і єдиності розв'язків таких задач,

  – оптимальності керування у випадку фінального спостереження.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення і можуть бути використані для розвитку теорії рівнянь з частинними похідними, а також при досліджені задач газо- та гідродинаміки, теорії біологічних популяцій, оптимального керування, хімічної кінетики, тощо.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації отримані автором самостійно. У працях, написаних у співавторстві з науковим керівником, М. М. Бокалу належать постановка задач, вибір методів досліджень та аналіз одержаних результатів.

Апробація результатів роботи. Результати досліджень доповідались та обговорювались на Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: член-кор. НАН України, проф. Пташник Б. Й., проф. Іванчов М. І., проф. Каленюк П. І.), а також на наукових конференціях: International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (Львів, 2012); International conference "Nonlinear Partial Differential Equations – 2013" (Донецьк, 2013); VI Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (Кам'янець-Подільський, 2014); International Conference of Young Mathematicians (Київ, 2015); International V. Skorobohatko mathematical conference (Дрогобич, 2015); Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 2016); Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2016" (Львів, 2016); International Conference on Differential Equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Львів, 2016); International Scientific Conference "Differential- Functional Equations and their Application" dedicated to the 80th anniversary of Professor V. I. Fodchuk (Чернівці, 2016); 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky (Київ, 2016).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 9-ти наукових працях у фахових періодичних виданнях (зі списку МОН України), з них 6 – в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз, та додатково висвітлено в 10-ти тезах наукових математичних конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та також списку літератури, що налічує 100 найменувань і розміщений на 10 сторінках. Загальний обсяг роботи – 179 сторінок.

Розділ 1

Огляд літератури

1.1 Задача без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей

Задача без початкових умов для еволюційних рівнянь виникає при описі різноманітних нестаціонарних процесів у природі, наприклад, теплопровідності чи дифузії, в момент, який настільки віддалений від початкового, що вплив початкових умов практично не позначається на протіканні процесу. Тоді можна вважати, що початковий момент співпадає з $-\infty$, і вивчати даний процес в залежності від режиму на межі області, в якій він відбувається, і зовнішніх впливів. Відповідна початкова умова може бути замінена умовою на поведінку розв'язку при $t \to -\infty$ або бути відсутньою взагалі.

Систематичне вивчення задачі без початкових умов (задачі Фур'є) для еволюційних рівнянь розпочалося з роботи А. М. Тіхонова [31]. У ній доведено, що для єдиності класичного розв'язку задачі без початкових умов

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x > 0,\ t > -\infty, \tag{1.1a}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad t > -\infty, \tag{1.1b}$$

де $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — невідома функція, а $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — деяка задана функція, достатньо вимагати, щоб розв'язок був обмеженим. У цій роботі також отримано зображення цього єдиного обмеженого розв'язку задачі (1.1):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Big)\mu(\tau)\, d\tau, \quad x > 0,\ t > -\infty,$$

для довільної обмеженої неперервної функції μ.

Пізніше ідеї А. М. Тіхонова були використані в роботах [19, 80] при дослідженні задачі без початкових умов для загальних лінійних параболічних систем з різними крайовими умовами. Було доведено коректну розв'язність цих задач в просторах Гельдера як обмежених, так і зростаючих функцій, а також отримано інтегральні зображення розв'язків.

У роботах [1, 2] вперше доведено, що задача без початкових умов для деяких нелінійних параболічних рівнянь має не більше одного розв'язку в класі функцій з довільною поведінкою при $t \to -\infty$. Це, зокрема, стосується задачі

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \left(\left|u_{x_i}\right|^{p-2} u_{x_i}\right)_{x_i} = 0, \quad (x,t) \in Q,$$

$$u|_{\Sigma} = 0,$$

де $Q := \Omega \times (-\infty, 0]$, $\Sigma := \partial\Omega \times (-\infty, 0]$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\partial\Omega$ – межа Ω, $p > 2$.

Існування і єдиність та деякі якісні характеристики розв'язків задачі без початкових умов для багатьох класів еволюційних рівнянь з різними крайовими умовами доведено в роботах [3, 4, 5, 6, 17, 21, 43, 44, 45] та ін. Зокрема, в праці [43] встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі без початкових умов

$$u_t + \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} a_{\alpha}(x, t, \delta u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} f_{\alpha}(x, t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$D^{\alpha} u \Big|_{\Sigma} = g_{\alpha}, \quad |\alpha| \le m - 1,$$

де $D^{\alpha} u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ $\big(\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ – мультиіндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ – довжина $\alpha\big)$ — α-ова частинна похідна функції u за просторовими змінними, $\delta u = (u, \ldots, D^{\alpha} u, \ldots)$ – вектор складений з функції u та її частинних похідних $D^{\alpha} u$ до порядку m включно.

У роботі [45] результати [43] узагальнено на випадок анізотропних просторів Соболєва.

Задача без початкових умов для абстрактного еволюційного рівняння

$$u'(t) + \mathcal{A}\big(t, u(t)\big) = f(t), \quad t \in S := (-\infty, 0], \tag{1.2}$$

де $\mathcal{A}(t, \cdot) : V \to V'$, $t \in S$, — сім'я монотонних операторів, що діють з банахового простору V у спряжений V', $f : S \to V'$ — деяка функція, вивчалася в роботах [43, 25, 27, 29, 96] та ін. Так, М. М. Бокало у праці [43] довів єдиність розв'язку $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(S;V)$, $u' \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S;V')$, $p > 2$, задачі (1.2), якщо $\mathcal{A}(t,\cdot)$, $t \in S$, — сім'я обмежених операторів, що задовольняють певну умову монотонності. Там же показано, що у випадку $p = 2$ для єдиності розв'язку задачі (1.2) додатково потрібно накладати певні обмеження на поведінку розв'язку та вихідних даних при $t \to -\infty$. У [43] також доведено існування розв'язку задачі (1.2) в припущенні, що оператори $\mathcal{A}(t,\cdot)$, $t \in S$, є сильно монотонними, обмеженими, семінеперервними та коерцитивними. У монографії [27, с. 522-525] встановлено умови існування та єдиності обмеженого розв'язку задачі (1.2), а у [96, с. 131-132] — розв'язку з простору $L^2(S;V)$. Питання існування та єдиності розв'язку задачі (1.2) в класі обмежених та майже періодичних функцій було досліджене в [25, с. 156-162] та [29, с. 104-113].

Р. Е. Шовальтер у роботі [97] довів існування єдиного розв'язку $u \in \mathrm{e}^{2\omega \cdot} W^{1,2}(-\infty,0;H)$, задачі без початкових умов

$$u'(t) + \mu u(t) + A\big(u(t)\big) \ni f(t), \quad t \in (-\infty, 0],$$

де H — гільбертів простір, $\omega + \mu > 0$, $f \in \mathrm{e}^{2\omega \cdot} W^{1,2}(-\infty,0;H)$, $A : H \to 2^H$ — максимальний монотонний оператор такий, що $0 \in A(0)$. Крім того, якщо $A = \partial\varphi$, де $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ — власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал такий, що $\varphi(0) = 0 = \min\{\varphi(v) : v \in H\}$, то ця задача є однозначно розв'язною і для кожних $\mu > 0$, $f \in L^2(-\infty,0;H)$ та $\omega = 0$.

1.2 Оптимальне керування процесами, що моделюються задачами з початковими умовами для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей

Теорія оптимального керування детермінованими системами опирається на такі вихідні положення:

1) керування v вибирають з деякої множини U_∂ (множина допустимих керувань), що є підмножиною простору U (простору керувань);

2) стан $y(v)$ керованої системи визначають для вибраного керування v як розв'язок рівняння

$$\Lambda y(v) = \Theta(v), \tag{1.3}$$

де Λ – заданий оператор, який визначений керованою системою (Λ – "модель"системи), $\Theta(v)$ – задана функція;
3) спостереження $z(v)$ визначають як функцію стану $y(v)$ за допомогою деякого оператора $C: \ z(v) = C(y(v)), \ v \in U_\partial$;
4) функцію вартості $J : U \to \mathbb{R}$ задають за допомогою деякої числової функції $(z, v) \mapsto \Phi(z, v) \geq 0$ на "просторі спостережень" та просторі (множині) допустимих керувань:

$$J(v) = \Phi(z(v), v), \quad v \in U \text{ (або } U_\partial). \tag{1.4}$$

Задача оптимального керування детермінованими системами полягає у відшуканні керування $u \in U_\partial$ такого, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{1.5}$$

Будь-яке таке значення u називається *оптимальним керуванням.*

В теорії оптимального керування вирішують такі проблеми:
(i) отримати умови існування глобального мінімуму функціоналу J ;
(ii) вивчити структуру і властивості співвідношень, які виражають ці умови (в них повинна брати участь "модель" Λ);
(iii) скласти конструктивний алгоритм чисельного знаходження апроксимацій оптимального керування u .

Побудова теорії оптимального керування детермінованими системами залежить від моделі Λ . Ця теорія у випадку, коли Λ є звичайним диференціальним оператором і розглядають питання (i) та (ii), викладена в книгах Болтянського [12], Гамкрелідзе [74], Міщенка [28] і Хестенеса [78]. Але в багаточисельних прикладних задачах через складність керованих систем в якості Λ розглядається оператор з частинними похідними. Іншими словами, досліджуються системи, для яких стан $y(v)$ визначається як розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними типу (1.3), що задовольняє певні крайові умови, а у випадку еволюційних рівнянь, ще і початкову умову.

Наведемо приклади вихідних положень задач оптимального керування. Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею Γ , $T > 0$ – фіксоване число, $Q := \Omega \times (0, T]$, $\Sigma := \Gamma \times (0, T]$.

Приклад I.

- Простір керувань — $U := L^2(Q)$, множина допустимих керувань — $U_\partial := \{v \in U \mid v \geq 0$ м.с. в $Q\}$.

- Стан керованої системи для заданого керування $v \in U_\partial$ — функція $y = y(v) = y(x,t) = y(x,t;v)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, яка є слабким розв'язком задачі
$$y_t - \Delta y = v \quad \text{в} \quad Q, \qquad y|_\Sigma = 0, \qquad y|_{t=0} = y_0,$$
де $y_0 \in L^2(\Omega)$ – задана функція.

- Спостереження (фінальне) — $Cy(v) := y(x,T;v)$, $x \in \Omega$, $v \in U_\partial$.

- Функція вартості —
$$J(v) := \int\limits_\Omega |y(x,0;v) - z_0(x)|^2 dx + \mu \iint\limits_Q |v(x,t)|^2 \, dxdt, \quad v \in U,$$
де $z_0 \in L^2(\Omega)$, $\mu \geq 0$ – задані.

Приклад II.

- Простір керувань — $U := L^\infty(\Omega)$, множина допустимих керувань — $U_\partial := \{v \in U \mid m \leq v \leq M$ м.с. в $Q\}$, де m, M – задані сталі.

- Стан керованої системи для заданого керування $v \in U_\partial$ — функція $y = y(v) = y(x,t) = y(x,t;v)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, яка є слабким розв'язком задачі
$$y_t - \Delta y + vy = 0 \quad \text{в} \quad Q, \qquad y|_\Sigma = 0, \qquad y|_{t=0} = y_0,$$
де $y_0 \in L^2(\Omega)$ – задана функція.

- Спостереження та функція вартості такі ж, як в прикладі I.

Основна і суттєва відмінність цих прикладів полягає в тому, що в прикладі I задача оптимального керування є лінійною (бо залежність стану системи y від керування v є лінійною), а в прикладі II ця задача, незважаючи на те, що стан системи описується лінійним рівнянням, є нелінійної (бо керування є коефіцієнтом рівняння і залежність стану системи y від керування v є нелінійною). Зауважимо, що також розглядають випадки, коли керування є у початкових або крайових умовах задачі стану, і говорять, відповідно, про стартове або межове керування.

Теорія оптимального керування детермінованими системами, що описуються рівняннями з частинними похідними, багата результатами і активно розвивається в наш час. Її основи вперше систематично описано в монографії [26]. Важливі результати цієї теорії у випадку еволюційних рівнянь, що задані на обмеженому часовому проміжку, отримані, зокрема, в працях [14, 37, 40, 18, 26, 12, 63, 64, 75, 39, 76, 79, 93, 35, 95, 42, 58, 70, 71, 84, 86, 100, 99, 77]. У роботах [100, 63, 64] стан керованої системи описується задачею Діріхле для лінійних параболічних рівнянь. Зокрема, у роботі [100] керування знаходиться у коефіцієнтах в молодших членів рівняння, а у роботах [63, 64] досліджуються задачі стартового оптимального керування. У праці [63], зокрема, розглядається випадок фінального спостереження. У роботах [75] та [39] стан системи також описується задачею Діріхле, але досліджується випадок межового керування. У праці [39] квадратична функція вартості включає в себе також фінальне спостереження, а у праці [75] — розподілене. У роботі [76] досліджено задачу оптимального керування для лінійного параболічного рівняння з необмеженими коефіцієнтами в головній частині еліптичного оператора у випадку, коли керування задане на частині межі області визначення рівняння. Робота [79] присвячена вивченню задач оптимального керування системами, стан яких описується рівнянням теплопровідності з динамічною крайовою умовою. В цій роботі шукають оптимальний коефіцієнт теплопередачі, що знаходиться в крайовій умові, і розглядають випадок розподіленого спостереження.

У працях [35, 99, 77, 100] стан керованої системи описується лінійними параболічними рівняннями та системами з керуваннями у коефіцієнтах. Зокрема, у працях [100, 35] керування є коефіцієнтом в молодших членах рівняння, а у працях [99, 77] керування є коефіцієнтами при похідних вищих порядків. У праці [100] показано існування та єдиність оптимального керування у випадку фінального спостереження, а також отримано необхідні умови оптимальності у формі узагальненого правила множників Лагранжа. У праці [35] автор доводить існування хоча б одного оптимального керування процесами, що описуються системами параболічних рівнянь з вироджуваними розривними коефіцієнтами. У роботах [99, 77] автори розглядають задачі оптимального керування з функціями вартості загального вигляду. Досліджують коректність постановки таких задач та необхідні умови оптимальності, що отримуються у формі узагальненого принципу множників Лагранжа. У працях [42, 58, 70, 71, 84, 86] вивчають задачі оптимального керування системами, що описуються нелінійними рівняннями з частинними похідними. Зокрема, у праці [42] вивчають задачу розподілу ресурсів, яка полягає у максимізації чисельності елементів певного виду. Популяційна модель являє собою рівняння для щільності популяції, яка залежить від керування, що є ресурсним коефіцієнтом. Доведено існування та єдиність оптимального керування, а також знайдено співвідношення, що його характеризують. Чисельно проілюстровано декілька випадків задач з крайовими умовами Діріхле та Неймана.

У праці [58] розглядається задача оптимального керування пластини Кірхгофа. Білінійне керування використовують, щоб наблизити пластину до бажаного профілю, беручи до уваги квадратичну функцію вартості. Авторами знайдено умови існування та єдиності оптимального керування, а також співвідношення, що його характеризують. У роботі [70] задачу оптимального керування зводять до задачі оптимізації, що розв'язується з використанням методу функцій штрафу. Доведено існування та єдиність оптимального керування. У праці [84] представлені аналітичні і чисельні розв'язки задачі оптимального керування для квазілінійних параболічних рівнянь. Доведено існування і єдиність розв'язку цієї задачі. У роботі [87] вивчається задача оптимального керування для вироджених рівнянь. Оптимальне керування описується розв'язком системи оптимальності, що складається із задачі для рівняння стану та спряженої задачі. Доведено єдиність розв'язку системи оптимальності для достатньо малого інтервалу часу у зв'язку з протилежністю часових орієнтацій двох задач, що входять в систему. У праці [86] досліджується оптимальне керування для напівлінійного параболічного рівняння без умов типу Цезарі.

Задачі оптимального керування системами, стан яких описується варіаційними нерівностями, також є досить популярними. Велика кількість таких задач була розглянута у монографії [38] та інших працях (див., наприклад, [34, 57, 82]). Зокрема, у праці [34] розглядається задача оптимального керування системами, стан яких описується параболічними варіаційними нерівностями. Там доведено існування оптимального керування та виведено необхідні умови оптимальності. У праці [82] досліджено оптимальне керування системами, що описуються параболічними варіаційними нерівностями у випадку, коли область зміни просторового аргументу не обов'язково є обмеженою.

У роботах [66], [67], [81] розглянуто задачі оптимального керування системами, стан яких описується задачами для еліптичних рівнянь. Зокрема, у працях [66], [67] вивчається асимптотична поведінка розв'язків задач оптимального керування у густих багаторівневих з'єднаннях.

1.3 Задачі оптимального керування системами, стан яких описується еволюційними рівняннями без початкових умов

Як нам відомо серед робіт, присвячених задачам оптимального керування випадок, коли стан керованої системи моделюється задачею Фур'є для параболічних рівнянь, розглянутий тільки в роботах М.М. Бокала [7, 8]. У вказаних роботах встановлено умови існування та єдиності оптимального керування, а також співвідношення, що його характеризують, коли рівняння стану є лінійними, а керування знаходяться в правих частинах.

Наведемо модельний приклад задач, які досліджувались у цих роботах. Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею Γ, $S := (-\infty;0]$, $Q := \Omega\times S$, $\Sigma := \Gamma\times S$. Простір керувань — $U := L^2(Q)$, множина допустимих керувань — $U_\partial := \{v\in U \mid v\geq 0 \text{ м.с. в } Q\}$. Стан керованої системи для заданого керування $v\in U_\partial$ — функція y, яка є слабким розв'язком задачі

$$y_t-\Delta y = f+v \quad \text{в} \quad Q,$$
$$y|_\Sigma = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} e^{2\omega t}\int\limits_\Omega |y(x,t)|^2dx = 0,$$

де $f\in L^2(Q)$, $\omega\in\mathbb{R}$ – задані. Функція вартості —

$$J(v) := \int\limits_\Omega |y(x,0;v)-z_0(x)|^2dx + \mu\iint\limits_Q |v(x,t)|^2\,dxdt, \quad v\in U_\partial.$$

Тут $z_0 \in L^2(\Omega)$, $\mu \geq 0$ – задані.

Задача полягає у відшуканні оптимального керування, тобто, знаходженні розв'язку задачі (1.5).

Дисертаційна робота присвячена перенесенню цих досліджень на випадки, коли стан системи описується нелінійними параболічними рівняннями та варіаційними нерівностями, а також рівняннями із сильним виродженням в початковий момент часу; при цьому розглядають ситуації, коли керування є у коефіцієнтах рівнянь або в правих частинах, а функція вартості задана за допомогою різних типів спостережень.

Модельними прикладами параболічних рівнянь стану з керуваннями у коефіцієнтах, що вивчаємо в даній роботі, є рівняння:

$$y_t - \Delta y + |y|^{p-2}y \pm vy = f \quad \text{в} \quad Q,$$

де $p = 2$ або $p > 2$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $v \geq 0$ – керування.

Модельним прикладом варіаційних нерівностей, якими описуються стани керованих систем, що розглянуті в даній роботі, є така параболічна варіаційна нерівність:

нехай $p > 2$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, K – опукла замкнена множина в $W^{1,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) \mid v_{x_i} \in L^p(\Omega)\ (i = \overline{1,n})\}$, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і потрібно для заданого керування $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ знайти функцію $y \in L^p_{\mathrm{loc}}(S; W^{1,p}(\Omega))$ таку, що для майже всіх $t \in S$ маємо $y(\cdot, t; u) \in K$ та

$$\int\limits_{\Omega_t} \{y_t(v - y) + |\nabla y|^{p-2}\nabla y \nabla(v - y) + |y|^{p-2}y(v - y)\}\, dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega_t} (f + u)(v - y)\, dx \quad \forall\, v \in K, \tag{1.6}$$

де $\Omega_t := \Omega \times \{t\}\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, $\nabla y := (y_{x_1}, \ldots, y_{x_n})$.

Модельним прикладом вироджуваних еволюційних рівнянь, якими описуються стани розглядуваних нами керованих систем, є таке рівняння:

$$\varphi y_t - \Delta y = v \quad \text{в} \quad Q,$$

де φ — функція з простору $C([0,T]) \cap C^1((0,T])$, яка задовольняє умови: 1) $\varphi(0) = 0$; 2) $\varphi(t) > 0$ при $t \in (0,T]$; 3) $\int_0^T [\varphi(s)]^{-1} ds = +\infty$.

Для таких рівнянь стандартні початкові умови потрібно замінити, наприклад, обмеженнями поведінки розв'язку при $t \to +0$. Рівняння, що сильно вироджуються в початковий момент часу, розглядалися в багатьох роботах (див., наприклад, [49, 73, 16]). Зауважимо, що такі рівняння тісно пов'язані з рівняннями, які задані на необмеженому знизу часовому проміжку. Цей зв'язок детально описано, зокрема, в [49] (див. також [96]). В даній роботі його було використано для обґрунтування результатів розділу 4.

Розділ 2

Оптимальне керування в задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь з керуваннями у коефіцієнтах

Цей розділ присвячений вивченню задач оптимального керування системами, стани яких описуються розв'язками задач без початкових умов для лінійних, сильно та слабко нелінійних параболічних рівнянь з керуваннями у коефіцієнтах.

Матеріали розділу викладено в працях [33, 52, 53, 56].

2.1 Слабко нелінійні рівняння

2.1.1 Основні позначення та допоміжні твердження

Нехай n – довільне фіксоване натуральне число; $\mathbb{R}^n$ – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $x = (x_1, \ldots, x_n)$ дійсних чисел, з нормою $|x| := (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$; Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково гладкою межею Γ. Позначимо $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \Gamma \times S$.

Під $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ розуміємо лінійний простір вимірних на Q функцій таких, що їх звуження на довільну обмежену вимірну підмножину $Q' \subset Q$ належить простору $L^\infty(Q')$.

Нехай X – довільний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_X$ та нормою $\|\cdot\|_X$. Позначимо через $L^2_{\mathrm{loc}}(S; X)$ лінійний простір функцій, які визначені на S та приймають значення в X, а їх звуження на будь-який відрізок $[a, b] \subset S$ належать простору $L^2(a, b; X)$.

Нехай $\omega \in \mathbb{R}$, $\alpha \in C(S)$, $\alpha(t) > 0$ для всіх $t \in S$. Введемо простори

$$L^2_{\omega,\alpha}(S;X) := \Big\{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;X) \ \Big| \ \int\limits_S \alpha(t) e^{2\omega \int\limits_0^t \alpha(s)ds} \|f(t)\|^2_X dt < \infty \Big\}.$$

$$L^2_{\omega,1/\alpha}(S;X) := \Big\{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;X) \ \Big| \ \int\limits_S [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int\limits_0^t \alpha(s)ds} \|f(t)\|^2_X dt < \infty \Big\}.$$

Ці простори є гільбертовими зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L^2_{\omega,\gamma}(S;X)} = \int\limits_S \gamma(t)\, e^{2\omega \int\limits_0^t \alpha(s)\, ds} (f(t), g(t))_X \, dt$$

та нормою

$$\|f\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S;X)} := \Big(\int\limits_S \gamma(t)\, e^{2\omega \int\limits_0^t \alpha(s)\, ds} \|f(t)\|^2_X \, dt \Big)^{1/2},$$

де $\gamma = \alpha$ або $\gamma = 1/\alpha$.

Позначимо через $C^1_c(I)$, де I проміжок числової осі, лінійний простір неперервно диференційовних на I функцій з компактним носієм (якщо $I = (t_1, t_2)$, тоді будемо писати $C^1_c(t_1,t_2)$ замість $C^1_c((t_1,t_2))$).

Нехай $H^1(\Omega) := \{ v \in L^2(\Omega) \mid v_{x_i} \in L^2(\Omega) \ (i = \overline{1,n}) \}$ – простір Соболєва, який є гільбертовим простором зі скалярним добутком $(v,w)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \big\{ \nabla v \nabla w + vw \big\}\, dx$ та нормою $\|v\|_{H^1(\Omega)} := \Big(\int\limits_\Omega \big\{ |\nabla v|^2 + |v|^2 \big\}\, dx \Big)^{1/2}$, де $\nabla v = (v_{x_1}, \dots, v_{x_n})$, $|\nabla v|^2 = \sum\limits_{i=1}^n |v_{x_i}|^2$. Під $H^1_0(\Omega)$ будемо розуміти замикання в $H^1(\Omega)$ простору $C^\infty_c(\Omega)$, де $C^\infty_c(\Omega)$ – лінійний простір, що складається з нескінченно диференційовних на Ω функцій, які мають компактний носій. Відомо, що на $H^1_0(\Omega)$ можна ввести скалярний добуток $(v,w)_{H^1_0(\Omega)} := \int\limits_S \nabla v \nabla w \, dx$, який породжує норму $\|v\|_{H^1_0(\Omega)} := \Big(\int\limits_S |\nabla v|^2 \, dx \Big)^{1/2}$, яка еквівалентна $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$. Далі будемо вважати, що на $H^1_0(\Omega)$ заданий саме такий скалярний добуток і відповідна йому норма. Позначимо через $H^{-1}(\Omega)$ спряжений до $H^1_0(\Omega)$ простір, тобто, гільбертів простір, складений з всіх лінійних неперервних функціоналів на $H^1_0(\Omega)$.

Припускаємо (після відповідних ототожнень функціоналів), що простір $\big(L^2(\Omega)\big)'$ є підпростором $H^{-1}(\Omega)$. Ототожнивши на підставі теореми Ріса простір $L^2(\Omega)$ з $\big(L^2(\Omega)\big)'$, одержимо неперервні та щільні вкладення

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega). \tag{2.1}$$

Зауважимо, що в цьому випадку $\langle g, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = (g, v)$ для будь-яких $v \in H_0^1(\Omega)$ та $g \in L^2(\Omega)$, де $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток на $L^2(\Omega)$, а $\langle \cdot,\cdot\rangle_{H_0^1(\Omega)}$ означає дію елемента з простору $H^{-1}(\Omega)$ на елемент простору $H_0^1(\Omega)$ (канонічний добуток на $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$). Тому далі вживатимемо позначення $(\cdot,\cdot)$ замість $\langle \cdot,\cdot\rangle_{H_0^1(\Omega)}$.

Позначимо

$$K := \inf_{v\in H_0^1(\Omega),\ v\neq 0} \frac{\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\, dx}{\int\limits_\Omega |v|^2\, dx}. \tag{2.2}$$

Відомо, що стала K є скінченною і співпадає з першим власним значенням задачі на власні значення:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.3}$$

З (2.2) легко випливає нерівність Фрідрікса:

$$\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\, dx \geq K \int\limits_\Omega |v|^2\, dx \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

З (2.4) маємо

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (K^{-1}+1)\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.5}$$

Далі важливу роль буде відігравати твердження, яке є добре відомим (див., наприклад, [68, теорема 3, с. 287]), але ми сформулюємо його у зручній для нас формі.

Лема 2.1. *Нехай функція* $z \in L^2(t_1, t_2; H_0^1(\Omega))$, *де* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$, *задовольняє тотожність*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \Big\{-z\psi\varphi' + (g_0\psi + \sum_{i=1}^n g_i\psi_{x_i})\varphi\Big\}\, dxdt = 0, \quad \psi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(t_1, t_2), \tag{2.6}$$

для деяких $g_i \in L^2(\Omega \times (t_1, t_2))$ $(i = \overline{0, n})$.

Тоді

1) похідна z_t *функції* z *у сенсі* $D'(t_1, t_2; H^{-1}(\Omega))$ *(простір розподілів) належить до* $L^2(t_1, t_2; H^{-1}(\Omega))$ *та, крім того,*

$$\text{для м.в. } t \in (t_1, t_2) : \quad z_t(\cdot, t) = -g_0(\cdot, t) + \sum_{i=1}^{n} \big(g_i(\cdot, t)\big)_{x_i} \text{ в } H^{-1}(\Omega), \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(\cdot, t)\|^2_{L^2(\Omega)} = (z_t(\cdot, t), z(\cdot, t)), \quad (2.8)$$

і

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \|z_t(\cdot, t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\, dt \le (K^{-1} + 1) \sum_{i=0}^{n} \|g_i\|^2_{L^2(\Omega \times (t_1, t_2))}, \quad (2.9)$$

де K *– стала з нерівності* (2.4)*;*

2) функція z *належить до простору* $C([t_1, t_2]; L^2(\Omega))$ *і для будь-яких* $\tau_1, \tau_2 \in [t_1, t_2]$ $(\tau_1 < \tau_2)$ *та довільних* $\theta \in C^1([t_1, t_2])$, $q \in L^2(t_1, t_2; H^1_0(\Omega))$ *маємо*

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \big(z_t(\cdot, t), q(\cdot, t)\big)\, dt + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int\limits_{\Omega} g_0 q\, dxdt + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int\limits_{\Omega} g_i q_{x_i}\, dxdt = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{2}\theta(t) \int\limits_{\Omega} |z(x, t)|^2\, dx \Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} - \frac{1}{2} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int\limits_{\Omega} |z|^2 \theta'\, dxdt + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int\limits_{\Omega} \big\{g_0 z + \sum_{i=1}^{n} g_i z_{x_i}\big\}\theta\, dxdt = 0. \quad (2.11)$$

Доведення. Оскільки твердження цієї леми безпосередньо випливають з відомих результатів, то наведемо схематично лише деякі моменти доведення. Почнемо з твердження 1). Легко переконатися, що простори $L^2(t_1, t_2; H^1_0(\Omega))$, $L^2(t_1, t_2; H^{-1}(\Omega))$ можуть бути ототожнені з підпросторами простору розподілів $D'(t_1, t_2; H^{-1}(\Omega))$. Це, зокрема, дозволяє говорити про похідні функцій з $L^2(t_1, t_2; H^1_0(\Omega))$ в сенсі розподілів $D'(t_1, t_2; H^{-1}(\Omega))$ і належність таких похідних до $L^2(t_1, t_2; H^{-1}(\Omega))$.

Перепишемо рівність (2.6) у вигляді

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\!\!\int\limits_{\Omega} z\psi\varphi'\, dxdt = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\!\!\int\limits_{\Omega} (g_0\psi + \sum_{i=1}^{n} g_i\psi_{x_i})\varphi\, dxdt, \quad \psi \in H^1_0(\Omega),\ \varphi \in C^1_c(t_1, t_2). \quad (2.12)$$

Згідно з означенням похідної в сенсі розподілів $D'(t_1,t_2;H^{-1}(\Omega))$, з (2.12) випливає існування похідної z_t і її належність до простору $L^2(t_1,t_2;H^{-1}(\Omega))$. Тому, відповідно до [68, теорема 3, с. 287], виконується рівність (2.8). Також з (2.12) для майже всіх $t\in(t_1,t_2)$ маємо

$$\big(z_t(\cdot,t),\psi(\cdot)\big) = -\int\limits_{\Omega}\Big[g_0(x,t)\psi(x)+\sum_{i=1}^n g_i(x,t)\psi_{x_i}(x)\Big]\,dx, \tag{2.13}$$

тобто, виконується (2.7).

З (2.13), використовуючи нерівність Коші-Буняковського, для м.в. $t\in(t_1,t_2)$ одержимо

$$\big|\big(z_t(\cdot,t),\psi(\cdot)\big)\big| \le \|g_0(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\|g_i(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_{x_i}(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\le$$

$$\le\Big(\sum_{i=0}^n\|g_i(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}\|\psi(\cdot)\|_{H^1(\Omega)}\le\big((K^{-1}+1)\sum_{i=0}^n\|g_i(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\big)^{1/2}\|\psi(\cdot)\|_{H^1_0(\Omega)}. \tag{2.14}$$

З (2.14) випливає, що для м.в. $t\in(t_1,t_2)$ виконується така оцінка

$$\|z_t(\cdot,t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\le(K^{-1}+1)\sum_{i=0}^n\|g_i(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

звідки випливає (2.9).

Розглянемо твердження 2) леми 2.1. Той факт, що функція z належить простору $C([t_1,t_2];L^2(\Omega))$ безпосередньо випливає з [68, теорема 3, твердження (I), с. 287].

Оскільки для м.в. $t\in S$ функція $q(\cdot,t)\in H^1_0(\Omega)$, то взявши $\psi(\cdot)=q(\cdot,t)$ в (2.13), маємо

$$\big(z_t(\cdot,t),q(\cdot,t)\big) = -\int\limits_{\Omega}\Big[g_0(x,t)q(x,t)+\sum_{i=1}^n g_i(x,t)q_{x_i}(x,t)\Big]\,dx,\quad t\in(t_1,t_2). \tag{2.15}$$

Інтегруючи тотожність (2.15) за t по (τ_1,τ_2) для довільних $\tau_1,\tau_2\in[t_1,t_2]$, отримаємо (2.10).

Беручи $q(\cdot,t)=\theta(t)z(\cdot,t),\ t\in[t_1,t_2],$ в (2.10), одержимо

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\theta(t)\big(z_t(\cdot,t),z(\cdot,t)\big)\,dt+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int\limits_{\Omega}\big\{g_0z+\sum_{i=1}^n g_iz_{x_i}\big\}\theta\,dxdt=0. \tag{2.16}$$

Використовуючи (2.8) та інтегруючи частинами, матимемо

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta(t)\big(z_t(\cdot,t), z(\cdot,t)\big)\,dt = \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta(t)\frac{d}{dt}\|z(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\theta(t)\|z(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} - \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta'(t)\|z(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

З (2.16) та останньої рівності отримуємо (2.11). ∎

2.1.2 Коректність задачі без початкових умов для слабко нелінійних параболічних рівнянь

Розглянемо рівняння

$$y_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,y,\nabla y) + a_0(x,t,y,\nabla y) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.17}$$

де $y : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ – невідома функція, а вхідні дані задовольняють умови:

($\mathcal{A}_1$) для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція

$$Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (x,t,s,\xi) \mapsto a_i(x,t,s,\xi) \in \mathbb{R}$$

є каратеодорівською, тобто, функція $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є неперервною для м.в. $(x,t) \in Q$, а $a_i(\cdot,\cdot,s,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ є вимірною для всіх $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;

крім того, $a_i(x,t,0,0) = 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$;

($\mathcal{A}_2$) для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ та для м.в. $(x,t) \in Q$ і всіх $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ виконується оцінка

$$|a_i(x,t,s,\xi)| \le h_{i,1}(t)\big(|s| + |\xi|\big) + h_{i,2}(x,t),$$

де $h_{i,1} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S)$, $h_{i,2} \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega))$;

($\mathcal{A}_3$) для м.в. $(x,t) \in Q$ та всіх (s_1,ξ^1), $(s_2,\xi^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(x,t,s_1,\xi^1)-a_i(x,t,s_2,\xi^2)\big)(\xi_i^1-\xi_i^2)+$$
$$+\big(a_0(x,t,s_1,\xi^1)-a_0(x,t,s_2,\xi^2)\big)(s_1-s_2)\geq\alpha(t)|\xi^1-\xi^2|^2,$$

де $\alpha\in C(S)$ така, що $\alpha(t)>0$ для всіх $t\in S$;

$(\mathcal{F})$ $\quad f\in L^2_{\rm loc}(S;L^2(\Omega))$.

Додатково від розв'язку рівняння (2.17) вимагатимемо виконання крайової умови

$$y\big|_{\Sigma}=0. \tag{2.18}$$

Означення 2.1. *Функцію y називаємо слабким розв'язком рівняння* (2.17), *який задовольняє крайову умову* (2.18), *якщо вона належить простору* $L^2_{\rm loc}(S;H^1_0(\Omega))\cap C(S;L^2(\Omega))$ *і виконується інтегральна тотожність*

$$\iint\limits_Q\Big\{-y\psi\varphi'+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t,y,\nabla y)\psi_{x_i}\varphi+a_0(x,t,y,\nabla y)\psi\varphi\Big\}\,dxdt=$$
$$=\iint\limits_Q f\psi\varphi\,dxdt,\quad \psi\in H^1_0(\Omega),\ \varphi\in C^1_c(-\infty,0). \tag{2.19}$$

Зауважимо, що може існувати багато слабких розв'язків рівняння (2.17), які задовольняють крайову умову (2.18). Для забезпечення єдиності слабкого розв'язку рівняння (2.17), який задовольняє умову (2.18), необхідно накладати додаткові умови на слабкий розв'язок, наприклад, обмеження на його поведінку при $t\to-\infty$. Ми будемо розглядати задачу відшукання слабкого розв'язку рівняння (2.17), який задовольняє крайову умову (2.18) та "аналог" початкової умови

$$\lim_{t\to-\infty}e^{\omega\int\limits_0^t\alpha(s)ds}\|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}=0, \tag{2.20}$$

де $\omega\in\mathbb{R}$.

Цю задачу коротко називатимемо задачею (2.17), (2.18), (2.20), а функцію y – слабким розв'язком задачі (2.17), (2.18), (2.20).

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{F})$. *Тоді правильні такі твердження:*

(i) якщо $\omega \le K$, *де* K – *стала, яка визначена в* (2.2), *то задача* (2.17), (2.18), (2.20) *має не більше одного розв'язку;*

(ii) якщо $\omega < K$ *та, крім того,*

$$f \in L^2_{\omega,1/\alpha}(S; L^2(\Omega)), \tag{2.21}$$

тоді існує єдиний слабкий розв'язок задачі (2.17), (2.18), (2.20), *він належить простору* $L^2_{\omega,\alpha}(S; H^1_0(\Omega))$ *і задовольняє оцінки:*

$$e^{\omega\int\limits_0^\tau \alpha(s)\,ds}\|y(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} \le C_1\|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}, \quad \tau \in S, \tag{2.22}$$

$$\|y\|_{L^2_{\omega,\alpha}(S_\tau;H^1_0(\Omega))} \le C_2\|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}, \quad \tau \in S, \tag{2.23}$$

де $S_\tau := (-\infty, \tau]$ $(\tau \in (-\infty, 0],\ S_0 = S)$, C_1, C_2 – *додатні сталі, що залежать лише від* K *та* ω.

Для доведення цієї теореми нам буде потрібне таке твердження.

Лема 2.2. *Нехай* $\omega < K$, *де* K – *стала, що визначена в* (2.2), *і виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$. *Тоді, якщо* y_1 *та* y_2 – *два слабкі розв'язки задач, які відрізняються від задачі* (2.17), (2.18), (2.20) *тільки тим, що в першій з них* $f = f_1$, *а в другій —* $f = f_2$, *де*

$$f_k \in L^2_{\omega,1/\alpha}(S; L^2(\Omega)) \quad (k = 1, 2), \tag{2.24}$$

то правильні такі оцінки:

$$e^{\omega\int\limits_0^\tau \alpha(s)\,ds}\|y_1(\cdot,\tau) - y_2(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_1\|f_1 - f_2\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}, \quad \tau \in S, \tag{2.25}$$

$$\|y_1 - y_2\|_{L^2_{\omega,\alpha}(S_\tau;H^1_0(\Omega))} \le C_2\|f_1 - f_2\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}, \quad \tau \in S, \tag{2.26}$$

де сталі C_1, C_2 *такі ж як, відповідно, у* (2.22) *та* (2.23).

Доведення. З (2.19) для $y_{12} := y_1 - y_2$ і $f_{12} := f_1 - f_2$ отримаємо таку інтегральну тотожність

$$\iint\limits_Q \Big\{ - y_{12}\psi\varphi' + \sum_{i=0}^n \big(a_i(y_1) - a_i(y_2)\big)\partial_i\psi\varphi\Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint_Q f_{12}\psi\varphi\,dxdt, \quad \psi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(-\infty,0), \tag{2.27}$$

де тут і далі використано позначення: для функції $z : Q \to \mathbb{R}$:

$$a_i(z)(x,t) := a_i(x,t,z(x,t),\nabla z(x,t)), \quad (x,t) \in Q,\ i = \overline{0,n}, \tag{2.28}$$

$$\partial_0 z(x,t) := z(x,t), \quad \partial_j z(x,t) := z_{x_j}(x,t), \quad j = \overline{1,n},\ (x,t) \in Q.$$

На підставі леми 2.1 з (2.27) випливає, що

$$\frac{1}{2}\theta(t)\int_\Omega |y_{12}(x,t)|^2\,dx\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} - \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega |y_{12}|^2\theta'\,dxdt +$$

$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \Big[\sum_{i=0}^n \big(a_i(y_1)-a_i(y_2)\big)\partial_i y_{12}\Big]\theta\,dxdt = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega f_{12}y_{12}\theta\,dxdt, \tag{2.29}$$

де $\theta \in C^1(S)$ та $\tau_1,\tau_2 \in S$ $(\tau_1 < \tau_2)$ – довільні.

Використовуючи нерівність Коші:

$$ab \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad a,b \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0, \tag{2.30}$$

оцінимо праву частину рівняння (2.29) так

$$\Big|\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega f_{12}y_{12}\theta\,dxdt\Big| \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha|y_{12}|^2\theta\,dxdt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega [\alpha]^{-1}|f_{12}|^2\theta\,dxdt, \tag{2.31}$$

де α – та ж функція, що в умові $(\mathcal{A}_3)$, а $\varepsilon > 0$ – довільне число.

З умови $(\mathcal{A}_3)$ отримуємо, що

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \Big[\sum_{i=0}^n \big(a_i(y_1)-a_i(y_2)\big)\partial_i y_{12}\Big]\theta\,dxdt \ge \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha|\nabla y_{12}|^2\theta\,dxdt, \tag{2.32}$$

де $\nabla y := (y_{x_1},\ldots,y_{x_n})$.

З (2.29), враховуючи (2.31) та (2.32), випливає нерівність

$$\frac{1}{2}\theta(\tau_2)\int_\Omega |y_{12}(x,\tau_2)|^2\,dx - \frac{1}{2}\theta(\tau_1)\int_\Omega |y_{12}(x,\tau_1)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega |y_{12}|^2\theta'\,dxdt +$$

$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha|\nabla y_{12}|^2\theta\,dxdt \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha|y_{12}|^2\theta\,dxdt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega [\alpha]^{-1}|f_{12}|^2\theta\,dxdt,$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число.

Взявши в цій нерівності $\theta(t) = 2e^{2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}$, $t \in S$, отримаємо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2} \alpha(s)\,ds}\int\limits_\Omega |y_{12}(x,\tau_2)|^2 dx - e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1} \alpha(s)\,ds}\int\limits_\Omega |y_{12}(x,\tau_1)|^2 dx -$$

$$-2\omega\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \alpha e^{2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}|y_{12}|^2 dxdt + 2\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \alpha e^{2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}|\nabla y_{12}|^2\,dxdt \le$$

$$\le \varepsilon\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \alpha e^{2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}|y_{12}|^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega [\alpha]^{-1} e^{2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}|f_{12}|^2\,dxdt.$$

Звідси та з (2.4) маємо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2} \alpha(s)\,ds}\int\limits_\Omega |y_{12}(x,\tau_2)|^2\,dx - e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1} \alpha(s)\,ds}\int\limits_\Omega |y_{12}(x,\tau_1)|^2\,dx + \tag{2.33}$$

$$+\chi(K,\omega,\varepsilon)\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \alpha e^{2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}|\nabla y_{12}|^2\,dxdt \le \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega [\alpha]^{-1} e^{2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}|f_{12}|^2\,dxdt,$$

де $\chi(K,\omega,\varepsilon) := (2(K-\omega)-\varepsilon)/K$, якщо $0 < \omega < K$, та $\chi(K,\omega,\varepsilon) := (2K-\varepsilon)/K$, якщо $\omega \le 0$.

Взявши в (2.33) $\varepsilon = K$, якщо $\omega \le 0$, та $\varepsilon = K - \omega$, якщо $0 < \omega < K$, у результаті отримаємо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2} \alpha(s)\,ds}\int\limits_\Omega |y_{12}(x,\tau_2)|^2\,dx - e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1} \alpha(s)\,ds}\int\limits_\Omega |y_{12}(x,\tau_1)|^2\,dx +$$

$$+C_3\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \alpha e^{2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}|\nabla y_{12}|^2\,dxdt \le C_4\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega [\alpha]^{-1} e^{2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}|f_{12}|^2\,dxdt, \tag{2.34}$$

де C_3, C_4 – додатні сталі, що залежать лише від K та ω.

З (2.20) випливає умова

$$e^{2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)ds}\int\limits_\Omega |y_{12}(x,t)|^2\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \tag{2.35}$$

Враховуючи (2.24) та (2.35), спрямуємо τ_1 до $-\infty$ в (2.34). У результаті, перепозначивши $\tau_2 = \tau \in S$, отримаємо

$$e^{2\omega \int\limits_0^\tau \alpha(s)\,ds} \int\limits_\Omega |y_{12}(x,\tau)|^2\,dx + C_3 \int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_\Omega \alpha e^{2\omega \int\limits_0^t \alpha(s)\,ds} |\nabla y_{12}|^2\,dxdt \leq$$

$$\leq C_4 \int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_\Omega [\alpha]^{-1} e^{2\omega \int\limits_0^t \alpha(s)\,ds} |f_{12}|^2\,dxdt. \tag{2.36}$$

Звідси отримуємо оцінки (2.25) та (2.26). ∎

Доведення теореми 2.1. Доведемо *твердження (i)*. Припустимо протилежне. Нехай y_1, y_2 – два слабкі розв'язки задачі (2.17), (2.18), (2.20). У випадку $\omega < K$, згідно з лемою 2.2 (див. (2.25)), маємо рівність

$$e^{2\omega \int\limits_0^\tau \alpha(s)\,ds} \int\limits_\Omega |y_1(x,\tau) - y_2(x,\tau)|^2\,dx = 0 \quad \forall \tau \in S. \tag{2.37}$$

З доведення леми 2.2 випливає, що рівність (2.37) правильна і для випадку $\omega = K$. Отже, з (2.37) отримуємо, що $y_1(x,t) - y_2(x,t) = 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$, тобто, $y_1(x,t) = y_2(x,t) = 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$. Отримане протиріччя доводить твердження (i).

Доведемо *твердження (ii)*, тобто, існування слабкого розв'язку задачі (2.52), (2.18), (2.20) та його оцінки. Почнемо з оцінок слабкого розв'язку. Припустимо, що y – слабкий розв'язок задачі (2.17), (2.18), (2.20). Легко бачити, використовуючи умову $(\mathcal{A}_1)$, що $y = 0$ є слабким розв'язком задачі (2.17), (2.18), (2.20) при $f = 0$, а тому з оцінок (2.25) та (2.26) (див. лему 2.2) при $y_1 = y,\ f_1 = f$ та $y_2 = 0, f_2 = 0$ випливають оцінки (2.22) та (2.23). З оцінки (2.23) маємо, що $y \in L^2_{\omega,\alpha}(S; H^1_0(\Omega))$.

Тепер для кожного $m \in N$ визначимо $f_m(\cdot,t) := f(\cdot,t)$, якщо $-m < t \leq 0$, і $f_m(\cdot,t) := 0$, якщо $t \leq -m$, та розглянемо задачу на знаходження функції $y_m \in L^2(-m,0; H^1_0(\Omega)) \cap C([-m,0]; L^2(\Omega))$, що задовольняє початкову умову

$$y_m(x,-m) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.38}$$

(як елемент простору $C([-m,0]; L^2(\Omega))$) та рівняння (2.17) в Q_m в сенсі такої інтегральної тотожності:

$$\iint\limits_{Q_m}\Big\{-y_m\psi\varphi'+\sum_{i=0}^{n}a_i(y_m)\partial_i\psi\varphi\Big\}\,dxdt=$$
$$=\iint\limits_{Q_m}f_m\psi\varphi\,dxdt,\quad \psi\in H_0^1(\Omega),\quad \varphi\in C_c^1(-m,0). \tag{2.39}$$

Існування та єдиність розв'язку цієї задачі легко випливає з відомих результатів (див., наприклад, [15]). Для кожного $m\in\mathbb{N}$ продовжимо нулем y_m на весь циліндр Q і залишимо позначення y_m для цього продовження. Зауважимо, що для кожного $m\in N$ функція y_m належить до простору $L^2(S;H_0^1(\Omega))\cap C(S;L^2(\Omega))$ та задовольняє інтегральну тотожність (2.19) з f_m замість f, тобто,

$$\iint\limits_{Q}\Big\{-y_m\psi\varphi'+\sum_{i=0}^{n}a_i(y_m)\partial_j\psi\varphi\Big\}\,dxdt=$$
$$=\iint\limits_{Q}f_m\psi\varphi\,dxdt,\quad \psi\in H_0^1(\Omega),\ \varphi\in C_c^1(-\infty,0). \tag{2.40}$$

Отже, ми приходимо до висновку, що y_m є слабким розв'язком задачі (2.17), (2.18), (2.20) з f_m замість f. Звідси та доведеного вище, зокрема, випливають (див. (2.22), (2.23)) оцінки

$$e^{2\omega\int_0^\tau\alpha(s)\,ds}\|y_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\le C_1\int\limits_{-\infty}^{\tau}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)\,ds}\|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt,\ \tau\in S, \tag{2.41}$$

$$\|y_m\|_{L^2_{\omega,\alpha}(S;H_0^1(\Omega))}\le C_2\|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S;L^2(\Omega))}. \tag{2.42}$$

Розглянемо тотожність (2.40) при $m=k$ та $m=l$, де k,l – довільні натуральні числа, $l>k$, та застосуємо до цих тотожностей твердження леми

2.2. У результаті отримаємо оцінки, які аналогічні до (2.25), (2.26), а саме

$$e^{2\omega\int\limits_0^\tau \alpha(s)\,ds}\|y_k(\cdot,\tau)-y_l(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \le$$

$$\le C_1\int\limits_{-l}^{-k}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}\|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt, \quad \tau\in S, \tag{2.43}$$

$$\|y_k-y_l\|_{L^2_{\omega,\alpha}(S;H^1_0(\Omega))} \le C_2\int\limits_{-l}^{-k}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}\|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt. \tag{2.44}$$

З умови (2.21) випливає, що праві частини нерівностей (2.43) та (2.44) прямують до нуля, коли k та l прямують до $+\infty$. Це означає, що послідовність $\{y_m\}_{m=1}^\infty$ є фундаментальною в просторах $L^2_{\omega,\alpha}(S;H^1_0(\Omega))$ та $C(S;L^2(\Omega))$. Оскільки ці простори є повними, то звідси маємо існування функції $y\in L^2_{\omega,\alpha}(S;H^1_0(\Omega))\cap C(S;L^2(\Omega))$ такої, що

$$y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} y \qquad \text{сильно в} \quad L^2_{\omega,\alpha}(S;H^1_0(\Omega)) \quad \text{і в} \quad C(S;L^2(\Omega)). \tag{2.45}$$

Зауважимо, що з (2.45) випливає, що

$$\partial_i y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \partial_i y \quad \text{сильно в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega)), \quad i=\overline{0,n}. \tag{2.46}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{A}_2)$ та оцінку (2.42), для будь-яких $t_1,t_2\in S$ $(t_1<t_2)$ отримаємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}|a_i(y_m)|^2\,dxdt \le C_5\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\left(|y_m|^2+|\nabla y_m|^2+|h_i|^2\right)dxdt \le C_6, \tag{2.47}$$

де C_5, C_6 – додатні сталі, що не залежать від m.

Отже, з (2.47) отримуємо, що послідовність $\{a_i(y_m)\}$ є обмеженою в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega))$. Звідси та з (2.46) випливає існування підпослідовності послідовності $\{y_m\}_{m=1}^\infty$ (яку також позначатимемо через $\{y_m\}_{m=1}^\infty$) та функцій $\chi_i\in L_{2,\mathrm{loc}}(S;L_2(\Omega))$ $(i=\overline{0,n})$ таких, що

$$\partial_i y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \partial_i y \quad \text{м.с. в} \quad Q, \quad i=\overline{0,n}, \tag{2.48}$$

$$a_i(y_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \quad \text{слабко в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(S;L_2(\Omega)), \quad i=\overline{0,n}. \tag{2.49}$$

З умови $(\mathcal{A}_1)$ та (2.48) випливає, що

$$a_i(y_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_i(y) \quad \text{м.с. в} \quad Q, \quad i=\overline{0,n}. \tag{2.50}$$

На підставі [27, лема 1.3] з (2.49) та (2.50) отримуємо, що

$$a_i(y_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_i(y) \quad \text{слабко в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(S;L_2(\Omega)), \quad i=\overline{0,n}. \tag{2.51}$$

Покажемо, що функція y є слабким розв'язком задачі (2.17), (2.18), (2.20). Для цього спрямуємо m до $+\infty$ в тотожності (2.40), беручи до уваги (2.46), (2.51) та означення функції f_m. У результаті отримаємо тотожність (2.19). Тепер, врахувавши (2.45), спрямуємо m до $+\infty$ в (2.41). З отриманої нерівності та умови (2.21) здобуваємо виконання умови (2.20). Отож, ми довели, що y є слабким розв'язком задачі (2.17), (2.18), (2.20). ∎

Зауваження 2.1 Функції $y_c(x,t) = cv(x)e^{-Kt}$, $(x,t) \in \overline{Q}$ $(c \in \mathbb{R})$, де v є власною функцією задачі (2.3), що відповідає першому власному значенню, є слабкими розв'язками рівняння (2.17), які задовольняють умову (2.18) у випадку, коли $a_i(x,t,s,\xi) = \xi_i$ $(i=\overline{1,n})$, $a_0(x,t,s,\xi) = 0$ та $f(x,t) = 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$ і для будь-яких $(s,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Тоді маємо $\alpha(t) = 1\ \forall\, t \in S$, а тому умова (2.20) набуває вигляду: $e^{\omega t}\|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Очевидно, що в даному випадку для ненульових розв'язків $(c \neq 0)$ маємо $e^{\omega t}\|y_c(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} C = \mathrm{const} \neq 0$, якщо $\omega = K$, $e^{\omega t}\|y_c(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, якщо $\omega < K$, та $e^{\omega t}\|y_c(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, якщо $\omega > K$. Це означає, що умова $\omega \leq K$ є істотною для гарантування єдиності слабкого розв'язку задачі (2.17), (2.18), (2.20), тобто, її не можна послабити.

2.1.3 Формулювання задачі оптимального керування та існування її розв'язку

Нехай $U := L^\infty(Q)$ – простір керувань, а множина допустимих керувань U_∂ – опукла замкнена множина в U складена з невід'ємних функцій, тобто, якщо $v \in U_\partial$, то $v(x,t) \geq 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$. Припускаємо, що стан досліджуваної системи для заданого керування $v \in U_\partial$ описується слабким розв'язком $y(v)$ задачі без початкових умов для рівняння

$$y_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,y,\nabla y) + a_0(x,t,y,\nabla y) + v(x,t)y = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.52}$$

з умовами (2.18) та (2.20), коли виконуються умови $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3), (\mathcal{F})$. Ця задача є аналогічною до задачі (2.17), (2.18), (2.20)), тобто, $y(v)$ належить простору $L^2_{\mathrm{loc}}(S; H^1_0(\Omega)) \cap C(S; L^2(\Omega))$, задовольняє інтегральну тотожність

$$\iint_Q \Big\{ -y\psi\varphi' + \sum_{i=0}^{n} a_i(x,t,y,\nabla y)\partial_i\psi\varphi + vy\psi\varphi \Big\} \, dxdt =$$

$$= \iint_Q f\psi\varphi \, dxdt, \quad \psi \in H^1_0(\Omega), \; \varphi \in C^1_c(-\infty, 0), \tag{2.53}$$

та умову (2.20).

Слабкий розв'язок y цієї задачі будемо називати слабким розв'язком задачі (2.52), (2.18), (2.20) для керування v і позначати y, або $y(v)$, або $y(x,t)$, $(x,t) \in Q$, або $y(x,t;v)$, $(x,t) \in Q$. Далі припускаємо, що умова (2.21) та нерівність $\omega < K$ виконуються. З попереднього пункту (див. теорему 2.1), маємо існування та єдиність слабкого розв'язку задачі (2.52), (2.18), (2.20) (для заданого $v \in U_\partial$) та його оцінки (2.22), (2.23).

Припустимо, що функція вартості має вигляд

$$J(v) = \|y(\cdot, 0; v) - z_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu \|v\|_{L^\infty(Q)}, \quad v \in U, \tag{2.54}$$

де $z_0 \in L^2(\Omega)$, $\mu \geq 0$ – задані.

Розглянемо **задачу оптимального керування**: знайти керування $u \in U_\partial$ таке, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{2.55}$$

Коротко цю задачу називатимемо (2.55), а її розв'язки – *оптимальними керуваннями.*

Одним з основних результатів даного підрозділу є таке твердження:

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$, (2.21) *та* $\omega < K$. *Крім того, припустимо, що* $\mu > 0$, *якщо* U_∂ *– необмежена. Тоді множина розв'язків задачі (2.55) є непорожньою і* $*$*-слабко замкненою.*

Доведення. Оскільки функція вартості J обмежена знизу, то існує мінімізуюча послідовність $\{v_k\}$ для J в U_∂, тобто, $J(v_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \inf\limits_{v\in U_\partial} J(v)$. Звідси та з (2.54) і припущення теореми випливає, що послідовність $\{v_k\}$ є обмеженою в просторі $L^\infty(Q)$, тобто

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in Q} |v_k(x,t)| \le C_7 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.56}$$

де C_7 – стала, що від k не залежить.

Оскільки для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $y_k := y(v_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ є слабким розв'яком задачі (2.52), (2.18), (2.20) для $v = v_k$, то

$$\iint\limits_Q \Big\{ - y_k\psi\varphi' + \sum_{i=0}^n a_i(y_k)\partial_i\psi\varphi + v_k y_k\psi\varphi\Big\}\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q f\psi\varphi\, dxdt \quad \forall\, \psi \in H_0^1(\Omega),\ \forall\, \varphi \in C_c^1(-\infty, 0). \tag{2.57}$$

Згідно з теоремою 2.1 для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо оцінки

$$e^{2\omega\int\limits_0^\tau \alpha(s)\,ds}\|y_k(\cdot,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} \le C_1 \int\limits_{-\infty}^{\tau} [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}\|f(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\, dt, \quad \tau \in S, \tag{2.58}$$

$$\|y_k\|_{L^2_{\omega,\alpha}(S;H_0^1(\Omega))} \le C_2 \|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S;L^2(\Omega))}\ , \tag{2.59}$$

де C_1, C_2 – сталі з оцінок (2.22), (2.23).

З $(\mathcal{A}_2)$ та (2.59) випливає, що

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} \sum_{i=0}^n |a_i(y_k)|^2\, dxdt \le C_8 \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} \big(|y_k|^2 + |\nabla y_k|^2 + |h_i|^2\big)\, dxdt \le C_9, \tag{2.60}$$

де $\tau_1, \tau_2 \in S$ $(\tau_1 < \tau_2)$ – довільні, а C_8, C_9 – додатні сталі, що від k не залежать (але можуть залежати від τ_1 і τ_2).

На підставі твердження *2)* леми 2.1 з (2.57) для довільних $\tau_1, \tau_2 \in S$ $(\tau_1 < \tau_2)$ та $k \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \|y_{k,t}\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\, dt \le (K^{-1}+1) \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^n |a_i(y_k)|^2 + |a_0(y_k) + v_k y_k - f|^2\Big) dxdt. \tag{2.61}$$

Беручи до уваги умови (2.21), (2.56) та (2.60), з оцінки (2.61) отримуємо, що

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \|y_{k,t}\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\,dt \le C_{10} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{2.62}$$

де $\tau_1, \tau_2 \in S$ $(\tau_1 < \tau_2)$ – довільні, $C_{10} > 0$ стала, що залежить від τ_1 та τ_2, але не залежить від k.

З леми про компактність (див., [88, розділ 4, твердження 4.2]), неперервності вкладень (2.1) та компактності першого з них (див. [26, с. 245]), оцінок (2.56), (2.59), (2.60), (2.62) випливає існування підпослідовності послідовності $\{v_k, y_k\}$ (яку також позначатимемо через $\{v_k, y_k\}$) та функцій $u \in U_\partial$, $y \in L^2_{\omega,\alpha}(S; H^1_0(\Omega))$ та $\chi_i \in L^2_{\rm loc}(S; L_2(\Omega))$ $(i = \overline{0,n})$ таких, що

$$v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(Q), \tag{2.63}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\omega,\alpha}(S; H^1_0(\Omega)), \tag{2.64}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{сильно в} \quad L^2_{\rm loc}(S; L^2(\Omega)), \tag{2.65}$$

$$a_i(y_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \quad \text{слабко в} \quad L_{2,\rm loc}(S; L_2(\Omega)), \quad i = \overline{0,n}. \tag{2.66}$$

Зауважимо, що з (2.64) випливають збіжності

$$\partial_i y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \partial_i y \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\rm loc}(S; L^2(\Omega)), \quad i = \overline{0,n}. \tag{2.67}$$

Покажемо, що зі збіжностей (2.63) та (2.65) випливає збіжність

$$\iint\limits_Q y_k v_k \psi\varphi\,dxdt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_Q yu\psi\varphi\,dxdt \quad \forall\,\psi \in H^1_0(\Omega), \forall\,\varphi \in C^1_c(-\infty, 0). \tag{2.68}$$

Справді, нехай $g := \psi\varphi$ та $t_1, t_2 \in S$ такі, що $\operatorname{supp}\varphi \subset [t_1, t_2]$. Тоді маємо

$$\iint\limits_Q y_k v_k g\,dxdt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega (y_k v_k - y v_k + y v_k) g\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega y v_k g\,dxdt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega (y_k - y) v_k g\,dxdt. \tag{2.69}$$

З (2.56) та (2.65) випливає, що

$$\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}(y_k-y)v_k g\,dxdt\Big|\le\Big(\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}|v_k g|^2\,dxdt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}|y_k-y|^2\,dxdt\Big)^{1/2}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{2.70}$$

Отже, на підставі (2.63) та (2.70), з (2.69) отримуємо (2.68).

Аналогічно до того, як було доведено збіжність (2.68), можна довести, що зі збіжностей (2.63) та (2.65) випливає

$$\iint\limits_{Q}|y_k|^2 v_k\varphi\,dxdt\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\iint\limits_{Q}|y|^2 u\varphi\,dxdt\quad\forall\,\varphi\in C_c^1(-\infty,0). \tag{2.71}$$

Спрямувавши k до $+\infty$ в (2.57), на підставі (2.65), (2.66), (2.68) отримаємо

$$\iint\limits_{Q}\Big\{-y\psi\varphi'+\sum_{i=0}^{n}\chi_i\partial_i\psi\varphi+uy\psi\varphi\Big\}\,dxdt=$$

$$=\iint\limits_{Q}f\psi\varphi\,dxdt,\quad \psi\in H_0^1(\Omega),\ \varphi\in C_c^1(-\infty,0). \tag{2.72}$$

Згідно з лемою 2.1 з тотожності (2.72) випливає, що $y\in C(S;L^2(\Omega))$.

Тепер покажемо, що рівність

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big\{\sum_{i=0}^{n}\chi_i\partial_i\psi\Big\}\,dx=\int\limits_{\Omega_t}\Big\{\sum_{i=0}^{n}a_i(y)\partial_i\psi\Big\}\,dx\quad\text{для м.в.}\quad t\in S \tag{2.73}$$

справедлива для всіх $\psi\in H_0^1(\Omega)$. Для цього використаємо метод монотонності (див. [27]).

Візьмемо довільні функції $w\in L_{2,\mathrm{loc}}(S;H^1(\Omega))$ та $\theta\in C_c^1(-\infty,0)$, $\theta(t)\ge 0$ для всіх $t\in(-\infty,0)$. З умови $(\mathcal{A}_3)$ для всіх $k\in\mathbb{N}$ маємо

$$W_k:=\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}(a_i(y_k)-a_i(w))(\partial_i y_k-\partial_i w)\Big\}\theta\,dxdt\ge 0.$$

Звідси отримуємо, що

$$W_k=\iint\limits_{Q}\sum_{i=0}^{n}a_i(y_k)\partial_i y_k\theta\,dxdt-$$

$$-\iint\limits_{Q}\sum_{i=0}^{n}\big[a_i(y_k)\partial_i w+a_i(w)(\partial_i y_k-\partial_i w)\big]\theta\ge 0,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{2.74}$$

На підставі леми 2.1 з (2.57) випливає, що

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_Q |y_k|^2\theta'\,dxdt + \iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=0}^n a_i(y_k)\partial_i y_k + v_k|y_k|^2\Big\}\theta\,dxdt = \iint\limits_Q f y_k\theta\,dxdt. \tag{2.75}$$

З (2.74), на підставі (2.75), отримаємо

$$W_k = \iint\limits_Q \Big\{\frac{1}{2}|y_k|^2\theta' + \big(fy_k - v_k|y_k|^2\big)\theta\Big\}dxdt -$$

$$-\iint\limits_Q \sum_{i=0}^n \big[a_i(y_k)\partial_i w + a_i(w)(\partial_i y_k - \partial_i w)\big]\theta\,dxdt \geq 0,\ k\in\mathbb{N}. \tag{2.76}$$

Взявши до уваги (2.65) та (2.71), маємо

$$\lim_{k\to\infty}\iint\limits_Q\Big\{\frac{1}{2}|y_k|^2\theta' + \big(fy_k - v_k|y_k|^2\big)\theta\Big\}\,dxdt = \iint\limits_Q\Big\{\frac{1}{2}|y|^2\theta' + \big(fy - u|y|^2\big)\theta\Big\}\,dxdt. \tag{2.77}$$

На підставі (2.66), (2.67) та (2.77), з (2.76) отримаємо

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} W_k = \iint\limits_Q \Big\{\frac{1}{2}|y|^2\theta' + \big(fy - u|y|^2\big)\theta\Big\}\,dxdt -$$

$$-\iint\limits_Q\sum_{i=0}^n \big[\chi_i\partial_i w + a_i(w)(\partial_i y - \partial_i w)\big]\theta dxdt. \tag{2.78}$$

З (2.72) на підставі леми 2.1 отримаємо

$$\iint\limits_Q \sum_{i=0}^n \chi_i\partial_i y\theta\;dxdt = \iint\limits_Q \Big\{\frac{1}{2}|y|^2\theta' + \big(fy - u|y|^2\big)\theta\Big\}\,dxdt. \tag{2.79}$$

Отже, з (2.78) та (2.79) випливає, що

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (\chi_i - a_i(w))(\partial_i y - \partial_i w)\Big\}\theta\,dxdt \geq 0. \tag{2.80}$$

Беручи $w = y - \lambda\psi$, де $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $\lambda > 0$ – довільні, та поділивши отриману нерівність на λ, отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (\chi_i - a_i(u - \lambda\psi))\partial_i\psi\Big\}\theta\;dxdt \geq 0. \tag{2.81}$$

Спрямувавши λ до $0+$ в (2.81) та використавши умову $(\mathcal{A}_2)$ і теорему Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла (див. [69, с. 648]), отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (\chi_i - a_i(y))\partial_i\psi \Big\} \theta \, dxdt = 0. \tag{2.82}$$

Оскільки $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $\theta \in C_c^1(-\infty, 0)$ – довільні функції, то з (2.82) випливає (2.73).

Отже, ми показали, що y є слабким розв'язком рівняння (2.52) при $(v = u)$, що задовольняє крайову умову (2.18).

Покажемо, що y задовольняє умову (2.20). Для цього доведемо, що

$$\forall \tau \in S: \quad y_k(\cdot, \tau) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y(\cdot, \tau) \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega). \tag{2.83}$$

З цією метою віднімемо тотожність (2.57) від тотожності (2.53) при $v = u$:

$$\iint\limits_Q \Big\{ -(y - y_k)\psi\varphi' + \sum_{i=0}^{n} \big(a_i(y) - a_i(y_k)\big)\partial_i\psi\varphi + (uy - v_k y_k)\psi\varphi \Big\} dxdt = 0,$$

$$\psi \in H_0^1(\Omega), \ \varphi \in C_c^1(-\infty, 0). \tag{2.84}$$

Тепер до тотожності (2.84) застосуємо лему 2.1 з $z := y - y_k$, $g_0 := a_0(y) - a_0(y_k) + uy - v_k y_k$, $g := a_i(y) - a_i(y_k)$ $(i = \overline{1,n})$, $\theta(t) = 2(t - \tau + 1)$, $\tau_1 = \tau - 1$, $\tau_2 = \tau$, де $\tau \in S$ – довільне фіксоване. У результаті отримаємо

$$\int\limits_\Omega |y(x,\tau) - y_k(x,\tau)|^2 \, dx - \int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_\Omega |y - y_k|^2 \, dxdt + \tag{2.85}$$

$$+ \int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_\Omega \Big[\sum_{i=0}^{n} \big(a_i(y) - a_i(y_k)\big)\partial_i(y - y_k) + (uy - v_k y_k)(y - y_k) \Big] \theta \, dxdt = 0.$$

З (2.85), враховуючи умову $(\mathcal{A}_3)$, маємо

$$\int\limits_\Omega |y(x,\tau) - y_k(x,\tau)|^2 \, dx \le \int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_\Omega \big[|y - y_k|^2 - (uy - v_k y_k)(y - y_k)\theta \big] \, dxdt. \tag{2.86}$$

З нерівності (2.86) маємо

$$\int\limits_\Omega |y(x,\tau) - y_k(x,\tau)|^2 \, dx \le 2\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_\Omega \big[(1+v_k)|y - y_k|^2 + |y||u - v_k||y - y_k| \big] dxdt. \tag{2.87}$$

На підставі (2.56) та нерівності Коші-Буняковського з (2.87) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} |y(x,\tau) - y_k(x,\tau)|^2\,dx \le C_{11}\Big(\Big[\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega} |y-y_k|^2\,dxdt\Big]^{1/2} + \int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega} |y-y_k|^2\,dxdt\Big), \tag{2.88}$$

де $C_{11} > 0$ – стала, що не залежить від k.

З (2.88), відповідно до (2.65), отримуємо (2.83). Взявши до уваги (2.83), спрямуємо k до $+\infty$ в (2.58). З отриманої нерівності, відповідно до умови (2.21), випливає, що

$$\lim_{\tau\to-\infty} e^{2\omega\int\limits_0^{\tau}\alpha(s)\,ds}\int\limits_{\Omega}|y(x,\tau|^2\,dx = 0, \tag{2.89}$$

тобто, виконується умова (2.20). Отже, ми показали, що $y = y(u) = y(x,t;u)$, $(x,t) \in Q$, є станом керованої системи для керування u.

Залишилось показати, що u є мінімізуючим елементом функціоналу J. Справді, з (2.83) випливає, що

$$\|y_k(\cdot,0) - z_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \|y(\cdot,0) - z_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.90}$$

Також з (2.63) та з властивостей $*$-слабко збіжних послідовностей маємо

$$\varliminf_{k\to\infty} \|v_k\|_{L^\infty(Q)} \ge \|u\|_{L^\infty(Q)}. \tag{2.91}$$

З (2.54), (2.90) та (2.91) легко випливає, що $\varliminf\limits_{k\to\infty} J(v_k) \ge J(u)$. Отож, ми показали, що u є розв'язком задачі (2.55).

Покажемо, що множина оптимальних керувань задачі (2.55) є $*$-слабко замкненою. Справді, нехай $\{u_k\}$ – послідовність оптимальних керувань така, що $u_k \to u$ $*$-слабко в $L^\infty(Q)$. Аналогічно як було зроблено вище у випадку послідовності $\{v_k\}$, показуємо, що $\varliminf\limits_{k\to\infty} J(u_k) \ge J(u)$. Але $J(u_k) = \inf\limits_{v\in U_\partial} J(v)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Отже, u є оптимальним керуванням задачі (2.55). ∎

2.1.4 Необхідні умови оптимальності

У даному пункті дослідимо необхідні умови існування розв'язку задачі оптимального керування з попереднього пункту при додаткових умовах. Перш за все припускаємо, що коефіцієнти рівняння (2.52) задовольняють ще умову

$(\mathcal{A})$ $a_0(x,t,s,\xi)=\widetilde{a}_0(x,t)s,\ a_i(x,t,s,\xi)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_j$ для м.в. $(x,t)\in Q$ і будь-яких $(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, де $\widetilde{a}_0,\ a_{ij}=a_{ji}\ (i=\overline{1,n})\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\widetilde{a}_0(x,t)\ge 0$ для м.в. $(x,t)\in Q$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\ge\alpha(t)|\xi|^2$ для м.в. $(x,t)\in Q$ і будь-яких $\xi\in\mathbb{R}^n$, де $\alpha\in C(S)$, $\alpha(t)>0$ для всіх $t\in S$.

Очевидно, що при виконанні умови $(\mathcal{A})$ виконуються умови $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$, а рівняння (2.52) має вигляд

$$y_t-\sum_{i,j=1}^{n}\big(a_{ij}(x,t)y_{x_j}\big)_{x_i}+(\widetilde{a}_0(x,t)+v(x,t))y=f(x,t),\quad (x,t)\in Q. \tag{2.92}$$

Будемо також припускати, що $v\in U_\partial$, а f задовольняє умову $(\mathcal{F})$.

Теорема 2.3 (необхідні умови оптимальності керування). *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, (2.21), $\omega<K$, U_∂ *– обмежена,* $\mu=0$ *та*

$$\alpha(t)\ge\alpha_0=const>0\quad \text{для м.в.}\quad t\in S. \tag{2.93}$$

Тоді оптимальне керування задачі (2.55) задовольняє співвідношення

$$\begin{cases} y\in L^2_{\omega,\alpha}(S;H^1_0(\Omega)),\quad y_t\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H^{-1}(\Omega)),\\ y_t-\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}y_{x_j})_{x_i}+(\widetilde{a}_0+u)y=f\quad \text{в}\quad L^2_{\mathrm{loc}}(S;H^{-1}(\Omega)),\\ y\big|_\Sigma=0,\quad \lim\limits_{t\to-\infty}e^{\omega\int\limits_0^t\alpha(s)ds}\|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}=0,\end{cases} \tag{2.94}$$

$$\begin{cases} p\in L^2_{-\omega,1/\alpha}(S;H^1_0(\Omega)),\quad p_t\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H^{-1}(\Omega)),\\ -p_t-\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}p_{x_j})_{x_i}+(\widetilde{a}_0+u)p=0\quad \text{в}\quad L^2_{\mathrm{loc}}(S;H^{-1}(\Omega)),\\ p\big|_\Sigma=0,\quad p(\cdot,0)=y(\cdot,0)-z_0(\cdot),\end{cases} \tag{2.95}$$

$$\iint\limits_Q yp(v-u)\,dxdt\le 0\quad \forall\, v\in U_\partial. \tag{2.96}$$

Відзначимо, що оскільки функція y належить до $L^2_{\omega,\alpha}(S;H^1_0(\Omega))$, а функція p належить до $L^2_{-\omega,1/\alpha}(S;H^1_0(\Omega))$, то добуток py належить до $L^1(Q)$, і отже, ліва частина нерівності (2.96) визначена коректно.

Задачу (2.95) називають задачею на спряжений стан системи, а її слабкий розв'язок – спряженим станом.

Перед доведенням теореми 2.3 наведемо додаткові твердження.

Лема 2.3. *Нехай виконується умова* (2.93). *Тоді правильними є вкладення*

$$L^2_{\omega,\alpha}(S_\tau;H^1_0(\Omega))\subset L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;H^1_0(\Omega))\subset L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))\quad\forall\,\tau\in S,$$

і вони є неперервними, тобто, існують додатні сталі C_8, C_9 *такі, що для довільних* $z\in L^2_{\omega,\alpha}(S;H^1_0(\Omega))$ *і* $\tau\in S$ *маємо*

$$\|z\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}\le C_8\|z\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;H^1_0(\Omega))}\le C_9\|z\|_{L^2_{\omega,\alpha}(S_\tau;H^1_0(\Omega))}. \tag{2.97}$$

Доведення леми 2.3. Перша нерівність (2.97) безпосередньо випливає з (2.4). На підставі (2.93), маємо $1/\alpha(t)\le 1/\alpha_0\le\alpha(t)/(\alpha_0)^2$ для всіх $t\in S$. Звідси випливає нерівність

$$\int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_{\Omega}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|\nabla z|^2\,dxdt\le[\alpha_0]^{-2}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|\nabla z|^2\,dxdt.$$

де $C_9=C_8[\alpha_0]^{-2}$, тобто, правильною є друга нерівність з (2.97). ∎

Лема 2.4. *Для довільних* $u,v\in U_\partial$ *існує функція* $\chi=\chi(u,v)=\chi(x,t;u,v)==\chi(x,t)$, $(x,t)\in Q$, *з* $L^2_{\omega,\alpha}(S;H^1_0(\Omega))$ *така, що* $\chi_t\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H^{-1}(\Omega))$ *(а звідси випливає, що* $\chi\in C(S;L^2(\Omega))$ *) і*

$$\chi^\varepsilon(u,v):=\frac{y(u+\varepsilon(v-u))-y(u)}{\varepsilon}\underset{\varepsilon\to0+}{\longrightarrow}\chi(u,v)\quad\text{слабко в}\quad L^2_{\omega,\alpha}(S;H^1_0(\Omega)), \tag{2.98}$$

$$\chi^\varepsilon(u,v)\underset{\varepsilon\to0+}{\longrightarrow}\chi(u,v)\quad\text{сильно в}\quad L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega)), \tag{2.99}$$

$$\forall\,\tau\in S:\quad\chi^\varepsilon(\cdot,\tau)\underset{\varepsilon\to0+}{\longrightarrow}\chi(\cdot,\tau)\quad\text{сильно в}\quad L^2(\Omega)\quad(\varepsilon\in(0,1)). \tag{2.100}$$

Крім того, функція χ *є слабким розв'язком такої задачі:*

$$\chi_t-\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}\chi_{x_j})_{x_i}+(\widetilde a_0+u)\chi=(u-v)y, \tag{2.101}$$

$$\chi\big|_\Sigma=0, \tag{2.102}$$

$$\lim_{t\to-\infty}e^{\omega\int\limits_0^t\alpha(s)ds}\|\chi(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}=0. \tag{2.103}$$

Доведення. Позначимо $w:=v-u$, $v^\varepsilon:=u+\varepsilon w$, $\varepsilon\in(0,1)$. Оскільки множина U_∂ є опуклою, то для довільного $\varepsilon\in(0,1)$ елемент v^ε належить до U_∂ для будь-яких $u,v\in U_\partial$. Очевидно, що

$$v^\varepsilon\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}u\quad\text{сильно в}\quad L^\infty(Q). \tag{2.104}$$

Нехай функція $y^\varepsilon := y(v^\varepsilon)$ – слабкий розв'язок задачі (2.92), (2.18), (2.20) для $v = v^\varepsilon$, де $\varepsilon \in (0,1)$, тобто, виконується інтегральна тотожність:

$$\iint\limits_Q \Big\{ -y^\varepsilon \psi \varphi' + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y^\varepsilon_{x_i} \psi_{x_j} \varphi + (\widetilde{a}_0 + v^\varepsilon) y^\varepsilon \psi \varphi \Big\}\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q f \psi \varphi \, dxdt, \quad \psi \in H^1_0(\Omega),\ \varphi \in C^1_c(-\infty, 0). \tag{2.105}$$

З теореми 2.1 випливає, що існує єдина функція y^ε, яка належить до $L^2_{\omega,\alpha}(S; H^1_0(\Omega))$, задовольняє тотожність (2.105) та задовольняє оцінки

$$e^{\omega \int\limits_0^\tau \alpha(s)\, ds} \|y^\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} \le C_1 \|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau; L^2(\Omega))}, \quad \tau \in S,\ \varepsilon \in (0,1), \tag{2.106}$$

$$\|y^\varepsilon\|_{L^2_{\omega,\alpha}(S_\tau; H^1_0(\Omega))} \le C_2 \|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau; L^2(\Omega))}, \quad \tau \in S,\ \varepsilon \in (0,1). \tag{2.107}$$

Зауважимо, що згідно з лемою 2.3 і (2.107) маємо

$$\|y^\varepsilon\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau; L^2(\Omega))} \le C_9 \|y^\varepsilon\|_{L^2_{\omega,\alpha}(S_\tau; H^1_0(\Omega))} \le$$

$$\le C_2 C_9 \|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau; L^2(\Omega))}, \quad \tau \in S. \tag{2.108}$$

Беручи до уваги твердження 2) леми 2.1, для довільних τ_1 і τ_2 з S $(\tau_1 < \tau_2)$ отримаємо

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \|y^\varepsilon_t\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\, dt \le \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n \big| \sum_{j=1}^n a_{ij} y^\varepsilon_{x_j} \big|^2 + |(\widetilde{a}_0 + v^\varepsilon) y^\varepsilon - f|^2 \Big) dxdt. \tag{2.109}$$

Враховуючи умову $(\mathcal{A})$, (2.21), (2.104) та (2.107), з оцінки (2.109) випливає

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \|y^\varepsilon_t(\cdot,t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\, dt \le C_{10}, \tag{2.110}$$

де $\tau_1, \tau_2 \in S$ $(\tau_1 < \tau_2)$ – довільні, $C_{10} > 0$ – стала, що залежить лише від τ_1 та τ_2, але не залежить від ε.

Згідно з лемою про компактність (див. [88, розділ 4, твердження 4.2]), враховуючи компактність вкладення $H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (див. [26 с. 245]), з (2.104), (2.107) та (2.110) випливає існування підпослідовності послідовності

$\{y^\varepsilon\}$ (яку також позначатимемо через $\{y^\varepsilon\}$) і функції $y \in L^2_{\omega,\alpha}(S; H^1_0(\Omega))$ таких, що

$$y^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} y \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\omega,\alpha}(S; H^1_0(\Omega)), \tag{2.111}$$

$$y^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} y \quad \text{сильно в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega)). \tag{2.112}$$

Зауважимо, що з (2.111) випливає

$$y^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} y, \quad y^\varepsilon_{x_i} \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} y_{x_i} \ (i=\overline{1,n}) \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega)). \tag{2.113}$$

Аналогічно як доводилось співвідношення (2.68) на підставі (2.104) та (2.112) показуємо, що

$$\iint\limits_Q y^\varepsilon v^\varepsilon \psi\varphi\, dxdt \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \iint\limits_Q yu\psi\varphi\, dxdt \quad \forall\ \psi \in H^1_0(\Omega), \forall\ \varphi \in C^1_c(-\infty,0). \tag{2.114}$$

Спрямувавши ε до 0 в (2.105), з врахуванням (2.113) і (2.114), отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ -y\psi\varphi' + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_{x_i}\psi_{x_j}\varphi + (\widetilde{a}_0+u)y\psi\varphi\Big\}\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q f\psi\varphi\, dxdt, \quad \psi \in H^1_0(\Omega),\ \varphi \in C^1_c(-\infty,0). \tag{2.115}$$

Згідно з лемою 2.1 з тотожності (2.115) випливає, що $y \in C(S; L^2(\Omega))$ і $y_t \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H^{-1}(\Omega))$. Аналогічно як при доведенні теореми 2.2

$$\forall \tau \in S: \quad y^\varepsilon(\cdot,\tau) \underset{\varepsilon\to\infty}{\longrightarrow} y(\cdot,\tau) \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega). \tag{2.116}$$

Звідси так само як при доведенні теореми 2.2 робимо висновок про те, що y задовольняє умову (2.20). Отже, функція $y = y(u)$ є слабким розв'язком задачі (2.92), (2.18), (2.20).

Безпосередньо з означення χ^ε випливає, що для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ функція χ^ε є слабким розв'язком такої задачі

$$\chi^\varepsilon_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\chi^\varepsilon_{x_j})_{x_i} + (\widetilde{a}_0+u)\chi^\varepsilon = -wy^\varepsilon, \tag{2.117}$$

$$\chi^\varepsilon\big|_\Sigma = 0, \tag{2.118}$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^{\omega\int\limits_0^t \alpha(s)ds} \|\chi^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{2.119}$$

тобто, χ_ε належить до $L^2_{\omega,\alpha}(S;H^1_0(\Omega))\cap C(S;L^2(\Omega))$, задовольняє інтегральну тотожність

$$\iint\limits_Q \Big\{ -\chi^\varepsilon\psi\varphi' + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\chi^\varepsilon_{x_i}\psi_{x_j}\varphi + (\widetilde{a}_0+u)\chi^\varepsilon\psi\varphi\Big\}\,dxdt =$$

$$= -\iint\limits_Q wy^\varepsilon\psi\varphi\,dxdt, \quad \psi\in H^1_0(\Omega),\ \varphi\in C^1_c(-\infty,0), \tag{2.120}$$

та умову (2.119).

Очевидно, що задача (2.117)-(2.119) співпадає із задачею (2.92), (2.18), (2.20) при $v=u$ і $f=-wy^\varepsilon$. Звідси на підставі теореми 2.1 отримуємо оцінки

$$e^{\omega\int\limits_0^\tau \alpha(s)\,ds}\|\chi^\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} \le C_1\|wy^\varepsilon\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}, \quad \tau\in S,\ \varepsilon\in(0,1), \tag{2.121}$$

$$\|\chi^\varepsilon\|_{L^2_{\omega,\alpha}(S_\tau;H^1_0(\Omega))} \le C_2\|wy^\varepsilon\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}, \quad \tau\in S,\ \varepsilon\in(0,1). \tag{2.122}$$

З оцінки (2.108) випливає

$$\|wy^\varepsilon\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))} \le C_2C_9\|w\|_{L^\infty(Q)}\|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}, \tag{2.123}$$

що разом з (2.121) і (2.122) дає оцінки

$$e^{\omega\int\limits_0^\tau \alpha(s)\,ds}\|\chi^\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} \le C_{10}\|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}, \quad \tau\in S, \tag{2.124}$$

$$\|\chi^\varepsilon\|_{L^2_{\omega,\alpha}(S_\tau;H^1_0(\Omega))} \le C_{11}\|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}, \quad \tau\in S, \tag{2.125}$$

де C_{10}, C_{11} – додатні сталі, які не залежать від ε.

Оскільки $L^2_{\omega,\alpha}(S;H^1_0(\Omega))$ – гільбертів простір, то з оцінки (2.125) випливає існування функції $\chi\in L^2_{\omega,\alpha}(S;H^1_0(\Omega))$ такої, що виконується (2.98).

З (2.98) і (2.112) випливає, що можна перейти до границі в (2.120) при $\varepsilon\to 0$:

$$\iint\limits_Q \Big\{ -\chi\psi\varphi' + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\chi_{x_i}\psi_{x_j}\varphi + (\widetilde{a}_0+u)\chi\psi\varphi\Big\}\,dxdt =$$

$$= -\iint\limits_Q wy\psi\varphi\,dxdt, \quad \psi\in H^1_0(\Omega),\ \varphi\in C^1_c(-\infty,0). \tag{2.126}$$

Звідси отримуємо, що функція χ є слабким розв'язком рівняння (2.101), який задовольняє умову (2.102). Нам залишилось довести, що функція χ задовольняє умову (2.103) і правильні збіжності (2.99), (2.100).

З (2.120) і твердження 1) леми 2.1 для довільних $\tau_1, \tau_2 \in S$ ($\tau_1 < \tau_2$) отримуємо

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\chi_t^\varepsilon\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\,dt \le \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n \big|\sum_{j=1}^n a_{ij}\chi^\varepsilon_{x_j}\big|^2 + |(\widetilde{a}_0+u)\chi^\varepsilon + wy^\varepsilon|^2\Big)dxdt. \qquad (2.127)$$

На підставі ($\mathcal{A}$) і (2.125) з оцінки (2.127) випливає

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\chi_t^\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\,dt \le C_{12}, \qquad (2.128)$$

де $\tau_1, \tau_2 \in S$ ($\tau_1 < \tau_2$) – довільні, $C_{12} > 0$ – стала, що залежить від τ_1 і τ_2, але не залежить від k.

Маючи оцінки (2.125), (2.128), приходимо до висновку (аналогічно, як було отримано (2.112)) про існування підпослідовності послідовності $\{\chi^\varepsilon\}$ (яку також позначаємо через $\{\chi^\varepsilon\}$) такої, що виконується (2.99).

Тепер доведемо (2.100). Для цього віднімемо тотожність (2.120) від тотожності (2.126). До одержаної тотожності застосуємо лему 2.1 з $z = \chi - \chi^\varepsilon$, $\quad g_0 = (\widetilde{a}_0+u)(\chi-\chi^\varepsilon) + w(y-y^\varepsilon)$, $\quad g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\chi_{x_j} - \chi^\varepsilon_{x_j})$ $(i=\overline{1,n})$, $\theta(t) = 2(t-\tau+1)$, $\tau_1 = \tau-1$, $\tau_2 = \tau$, де $\tau \in S$ – довільне. У результаті отримаємо

$$\int_\Omega |\chi(x,\tau) - \chi^\varepsilon(x,\tau)|^2\,dx - \int_{\tau-1}^{\tau}\int_\Omega |\chi-\chi^\varepsilon|^2\,dxdt +$$
$$+ \int_{\tau-1}^{\tau}\int_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\chi_{x_j} - \chi^\varepsilon_{x_j})(\chi_{x_i} - \chi^\varepsilon_{x_i})\Big]\theta\,dxdt +$$
$$+ \int_{\tau-1}^{\tau}\int_\Omega \big((\widetilde{a}_0+u)(\chi-\chi^\varepsilon) + w(y-y^\varepsilon)\big)\big(\chi-\chi^\varepsilon\big)\theta\,dxdt = 0. \qquad (2.129)$$

З (2.129), враховуючи $(\mathcal{A})$, матимемо

$$\int_{\Omega}|\chi(x,\tau)-\chi^{\varepsilon}(x,\tau)|^2\,dx\leq$$

$$\leq\int_{\tau-1}^{\tau}\int_{\Omega}|\chi-\chi^{\varepsilon}|^2\,dxdt+\int_{\tau-1}^{\tau}\int_{\Omega}|w||y-y^{\varepsilon}||\chi-\chi^{\varepsilon}|\,dxdt. \tag{2.130}$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, з (2.130) випливає

$$\int_{\Omega}|\chi(x,\tau)-\chi^{\varepsilon}(x,\tau)|^2\,dx\leq\int_{\tau-1}^{\tau}\int_{\Omega}|\chi-\chi^{\varepsilon}|^2\,dxdt+$$

$$+C_{13}\Big(\int_{\tau-1}^{\tau}\int_{\Omega}|\chi-\chi^{\varepsilon}|^2\,dxdt\Big)^{1/2}\Big(\int_{\tau-1}^{\tau}\int_{\Omega}|y-y^{\varepsilon}|^2\,dxdt\Big)^{1/2},$$

де $C_{13}:=\|w\|_{L^{\infty}(Q)}$.

Звідси, згідно з (2.99) і (2.112), отримуємо (2.100). Беручи до уваги (2.100), спрямуємо $\varepsilon\to 0$ в (2.124). З одержаної нерівності, відповідно до умови (2.21), випливає (2.103). ∎

Лема 2.5. *Існує єдиний слабкий розв'язок задачі* (2.95) *і, якщо* $\omega<K$, *то він належить до* $L^2_{-\omega,1/\alpha}(S;H^1_0(\Omega))$ *та задовольняє оцінки*

$$e^{-\omega\int_0^{\tau}\alpha(s)ds}\|p(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}\leq C_{14}\|p(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)},\quad \tau\in S, \tag{2.131}$$

$$\|p\|_{L^2_{-\omega,1/\alpha}(S;H^1_0(\Omega))}\leq C_{14}\|p(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.132}$$

де $C_{14}>0$ *– стала, яка не залежить від* p.

Доведення. Існування та єдиність слабкого розв'язку p задачі (2.95) легко випливає з відомих результатів (див., наприклад, [27]). З леми 2.1 випливає, що $p_t\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H^{-1}(\Omega))$. Отже, нам залишається показати правильність оцінок (2.131) і (2.132).

Згідно з лемою 2.1 для $\tau_1=\tau<0,\tau_2=0$, $z=-p$, $g_0=-(\widetilde{a}_0+u)p$, $g_i=$

$= -\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_{x_j}$ $(i = \overline{1,n})$, де $\theta \in C^1(S)$ – довільна функція, одержуємо

$$\frac{1}{2}\theta(0)\int\limits_{\Omega} |p(x,0)|^2\,dx - \frac{1}{2}\theta(\tau)\int\limits_{\Omega} |p(x,\tau)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{0}\int\limits_{\Omega} |p|^2\theta'\,dxdt -$$
$$- \int\limits_{\tau}^{0}\int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_{x_j} p_{x_i} + (\widetilde{a}_0 + u)|p|^2\Big]\theta\,dxdt = 0.$$

Взявши в цій рівності $\theta(t) = -e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds}$, $t \in S$, отримаємо

$$\frac{1}{2}e^{-2\omega\int_0^\tau \alpha(s)ds}\int\limits_{\Omega} |p(x,\tau)|^2\,dx - \omega\int\limits_{\tau}^{0}\int\limits_{\Omega} \alpha(t)e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds}|p|^2\,dxdt +$$
$$+ \int\limits_{\tau}^{0}\int\limits_{\Omega} e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_{x_j} p_{x_i} + (\widetilde{a}_0 + u)|p|^2\Big]\,dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |p(x,0)|^2\,dx. \tag{2.133}$$

Звідси, використовуючи умову $(\mathcal{A})$, маємо

$$e^{-2\omega\int\limits_0^\tau \alpha(s)\,ds}\int\limits_{\Omega}|p(x,\tau)|^2dx - 2\omega\int\limits_{\tau}^{0}\int\limits_{\Omega}\alpha(t)e^{-2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}|p|^2dxdt +$$
$$+2(\delta + 1 - \delta)\int\limits_{\tau}^{0}\int\limits_{\Omega} \alpha(t)e^{-2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}|\nabla p|^2\,dxdt \le \int\limits_{\Omega} |p(x,0)|^2\,dx,$$

де $\delta \in (0,1)$ – довільне.

Звідси згідно з (2.4) одержуємо

$$e^{-2\omega\int\limits_0^\tau \alpha(s)\,ds}\int\limits_{\Omega}|p(x,\tau)|^2dx + 2(\delta K - \omega)\int\limits_{\tau}^{0}\int\limits_{\Omega}\alpha(t)e^{-2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}|p|^2dxdt +$$
$$+2(1 - \delta)\int\limits_{\tau}^{0}\int\limits_{\Omega} \alpha(t)e^{-2\omega\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds}|\nabla p|^2\,dxdt \le \int\limits_{\Omega} |p(x,0)|^2\,dx.$$

Оскільки $\omega < K$, то можна вибрати $\delta \in (0,1)$ таким, щоби $\delta K - \omega > 0$.

Тоді матимемо

$$e^{-2\omega\int_0^\tau \alpha(s)ds}\int\limits_\Omega |p(x,\tau)|^2\,dx + \int\limits_\tau^0\int\limits_\Omega \alpha(t)e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds}|\nabla p|^2\,dxdt \le$$
$$\le C_{11}\int\limits_\Omega |p(x,0)|^2\,dx, \tag{2.134}$$

де $C_{11} > 0$ – стала, що залежить лише від ω та K.

З (2.134), відповідно до леми 2.3, отримуємо (2.131) і (2.132). ∎

Доведення теореми 2.3. Нехай u – оптимальне керування задачі (2.55), $v \in U_\partial$ – довільне. Тоді, використовуючи ті ж позначення, що були введені при доведенні леми 2.4, для всіх $\varepsilon \in (0,1)$ маємо

$$J(v^\varepsilon) - J(u) \ge 0. \tag{2.135}$$

Домноживши нерівність (2.135) на $1/\varepsilon$ і позначивши $w := v - u$, одержимо

$$0 \le \frac{1}{\varepsilon}\big(J(v^\varepsilon) - J(u)\big) = \frac{1}{\varepsilon}\Big[\int\limits_\Omega \big|y(x,0;v^\varepsilon) - z_0(x)\big|^2 dx -$$
$$-\int\limits_\Omega \big|y(x,0;u) - z_0(x)\big|^2 dx\Big] = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Omega \Big[\big|y(x,0;v^\varepsilon)\big|^2 - \big|y(x,0;u)\big|^2 -$$
$$-2z_0(x)y(x,0;v^\varepsilon) + 2z_0(x)y(x,0;u)\Big]\,dx =$$
$$= \int\limits_\Omega \frac{y(x,0;v^\varepsilon) - y(x,0;u)}{\varepsilon}\Big[y(x,0;v^\varepsilon) + y(x,0;u) - 2z_0(x)\Big]dx. \tag{2.136}$$

Перепишемо нерівність (2.136) так:

$$\int\limits_\Omega \Big(\chi^\varepsilon(x,0)\big(y^\varepsilon(x,0) + y(x,0)\big) - 2\chi^\varepsilon(x,0)z_0(x)\Big)dx \ge 0. \tag{2.137}$$

На підставі (2.83) і (2.100) перейдемо до границі в (2.137) при $\varepsilon \to 0+$. У результаті одержимо таку варіаційну нерівність

$$\int\limits_\Omega \chi(x,0)\big(y(x,0) - z_0(x)\big)dx \ge 0. \tag{2.138}$$

Виходячи із задачі на спряжений стан системи (2.95), для довільних $\tau \in S$ отримуємо

$$0 = \int\limits_{\tau}^{0} \Big(- p_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} p_{x_j})_{x_i} + (\widetilde{a}_0 + u)p, \chi\Big)\, dt =$$

$$= - \int\limits_{\tau}^{0} (p_t, \chi)\, dt + \int\limits_{\tau}^{0}\int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_{x_j} \chi_{x_i} + (\widetilde{a}_0 + u) p\chi \Big] dxdt = 0. \qquad (2.139)$$

Звідси, інтегруючи частинами та використовуючи умову $(\mathcal{A})$ (симетричність коефіцієнтів a_{ij}) і те, що χ є слабким розв'язком задачі (2.101)–(2.103), одержимо

$$0 = - \int\limits_{\Omega_t} p\chi\, dx \Big|_{t=\tau}^{t=0} + \int\limits_{\tau}^{0} (p, \chi_t)\, dt + \int\limits_{\tau}^{0}\int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_{x_i} \chi_{x_j} + (\widetilde{a}_0 + u) p\chi \Big] dxdt =$$

$$= - \int\limits_{\Omega} \chi(x,0) p(x,0)\, dx + \int\limits_{\Omega} \chi(x,\tau) p(x,\tau)\, dx + \int\limits_{\tau}^{0} (\chi_t, p)\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{0}\int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \chi_{x_i} p_{x_j} + (\widetilde{a}_0 + u) \chi p \Big] dxdt = - \int\limits_{\Omega} \chi(x,0) p(x,0)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \chi(x,\tau) p(x,\tau)\, dx + \int\limits_{\tau}^{0} \Big(\chi_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} \chi_{x_i})_{x_j} + (\widetilde{a}_0 + u)\chi, p \Big) =$$

$$= - \int\limits_{\Omega} \chi(x,0) p(x,0)\, dx + \int\limits_{\Omega} \chi(x,\tau) p(x,\tau)\, dx - \int\limits_{\tau}^{0}\int\limits_{\Omega} ypw\, dxdt. \qquad (2.140)$$

Враховуючи початкову умову задачі (2.95), з (2.140) матимемо

$$\int\limits_{\Omega} \big(y(x,0) - z_0(x) \big) \chi(x,0)\, dx = \int\limits_{\Omega} p(x,\tau) \chi(x,\tau)\, dx - \int\limits_{\tau}^{0}\int\limits_{\Omega} ypw\, dxdt. \quad (2.141)$$

Покажемо, що у (2.141) можна перейти до границі при $\tau \to -\infty$. Справді, відповідно до (2.103) і (2.131), маємо

$$\int\limits_{\Omega} |p(x,\tau)\chi(x,\tau)|\, dx \le \|p(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} \|\chi(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} \le$$

$$\leq e^{\omega\int_0^\tau \alpha(s)ds}\|p(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}e^{-\omega\int_0^\tau \alpha(s)ds}\gamma(\tau) = \|p(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}\gamma(\tau), \tag{2.142}$$

де, згідно з умовою (2.103), функція γ така, що $\gamma(\tau)\to 0$ при $\tau\to-\infty$.

З оцінок (2.23) та (2.132), використовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримаємо

$$\int\limits_\tau^0\int\limits_\Omega |ypw|\,dxdt \leq \Big(\int\limits_\tau^0\int\limits_\Omega [\alpha]^{-1}e^{-2\omega\int\limits_0^t\alpha(s)ds}|p|^2dxdt\Big)^{1/2}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_\tau^0\int\limits_\Omega \alpha e^{2\omega\int\limits_0^t\alpha(s)ds}|y|^2dxdt\Big)^{1/2} \leq C_2C_{14}\|p(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S;L^2(\Omega))},$$

звідки отримуємо, що $ypw\in L^1(Q)$.

Звідси та (2.142) випливає, що у рівності (2.141) можна перейти до границі при $\tau\to-\infty$. У результаті отримаємо

$$\int\limits_\Omega \chi(x,0)\big(y(x,0)-z_0(x)\big)\,dx = -\iint\limits_Q ypw\,dxdt. \tag{2.143}$$

З (2.138), враховуючи (2.143), одержуємо (2.96). ∎

2.2 Сильно нелінійні рівняння з монотонними просторовими частинами

2.2.1 Основні позначення

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково гладкою межею Γ. Позначимо $S:=(-\infty,0]$, $Q:=\Omega\times S$, $\Sigma:=\Gamma\times S$, $Q_{t_1,t_2}:=\Omega\times(t_1,t_2)$, $\Sigma_{t_1,t_2}:=\Gamma\times(t_1,t_2)$ для всіх $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ $(t_1<t_2)$.

Для кожного $q\in[1,\infty]$ під $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ розуміємо лінійний простір вимірних на Q функцій таких, що їх звуження на довільну обмежену вимірну множину $Q'\subset Q$ належить простору $L^q(Q')$. Будемо говорити, що послідовність функцій $\{z_k\}$ сильно (відп., слабко, $*$-слабко) збігається до z в $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(q\in[1,\infty))$, якщо для довільної обмеженої вимірної множини $Q'\subset Q$ послідовність $\{z_k|_{Q'}\}$ сильно (відп., слабко, $*$-слабко) збігається до функції $z|_{Q'}$ в $L^q(Q')$ (тут і далі $z|_{Q'}$ – звуження функції z на Q').

Нехай X – довільний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_X$. Позначимо через $L^q_{\mathrm{loc}}(S;X)$ $(q\in[1,\infty])$ лінійний простір вимірних функцій, визначених на S зі значеннями в X, звуження яких на будь-який відрізок $[a,b]\subset S$ належать простору $L^q(a,b;X)$. Послідовність функцій $z_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} z$ сильно (відп., слабко, $*$-слабко) в $L^q_{\mathrm{loc}}(S;X)$, якщо для кожних $t_1,t_2\in S\,(t_1<t_2)$ маємо, що $z_m|_{t_1,t_2} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} z|_{t_1,t_2}$ сильно (відп., слабко, $*$-слабко) в $L^q(t_1,t_2;X)$.

Позначимо через $C^1_c(a,b)$, де $-\infty\le a<b\le+\infty$, лінійний простір неперервно диференційовних функцій на (a,b) з компактим носієм. Через $C(S;X)$ позначимо простір неперервних функцій, визначених на S зі значеннями в X. Будемо говорити, що $z_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} z$ в $C(S;X)$, якщо для кожних $t_1,t_2\in S\,(t_1<t_2)$ маємо $\max_{\tau\in[t_1,t_2]}\|z(\tau)-z_k(\tau)\|_X \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Нехай $H^1(\Omega):=\{v\in L_2(\Omega)\mid v_{x_i}\in L_2(\Omega)\ (i=\overline{1,n})\}$ – простір Соболєва, який є гільбертовим простором зі скалярним добутком

$$(v,w)_{H^1(\Omega)}:=\int\limits_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^n v_{x_i}w_{x_i}+vw\Big\}\,dx$$

та відповідною нормою

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}:=\Big(\int\limits_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^n |v_{x_i}|^2+|v|^2\Big\}\,dx\Big)^{1/2}.$$

Під $H^1_0(\Omega)$ будемо розуміти замикання простору $C^\infty_c(\Omega)$ за нормою $H^1(\Omega)$, де $C^\infty_c(\Omega)$ – простір нескінченно диференційовних на Ω функцій з компактними носіями.

Також введемо позначення

$$\partial_0 z:=z,\quad \partial_j z:=z_{x_j}\ \text{якщо,}\ j\in\{1,\dots,n\}.$$

Позначимо

$$V^q(\Omega):=H^1_0(\Omega)\cap L^q(\Omega),$$

де $q>1$ – довільне.

Добре відомо, що

$$\big(V^q(\Omega)\big)':=H^{-1}(\Omega)+L^{q'}(\Omega),\quad q'=\frac{q}{q-1}.$$

2.2.2 Формулювання задачі оптимального керування та існування її розв'язку

Нехай $U := L^\infty(Q)$ – простір керувань. Припустимо, що U_∂ – опукла замкнена множина в просторі U і $U_\partial \subset \Big\{v \in U \Big| v \geq 0 \quad \text{м.с. на} \quad Q\Big\}$. Множина U_∂ є множиною допустимих керувань.

Стан досліджуваної еволюційної системи для заданого керування $v \in U_\partial$ визначається слабким розв'язком задачі

$$y_t - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,y,\nabla y) + \widehat{a}_0(x,t,y,\nabla y) + v(x,t)g(x,t,y) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.144}$$

$$y\big|_\Sigma = 0, \tag{2.145}$$

де функції $\widehat{a}_0, a_1, \ldots, a_n$, f і g задовольняють такі умови:

$(\mathcal{A}_1)$ функції

$$Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (x,t,s,\xi) \mapsto a_i(x,t,s,\xi) \in \mathbb{R} \ (i = \overline{1,n}),$$
$$Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (x,t,s,\xi) \mapsto \widehat{a}_0(x,t,s,\xi) \in \mathbb{R}$$

є каратеодорівськими функціями, тобто, $\widehat{a}_0(x,t,\cdot,\cdot)$, $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,n})$ неперервні функції для м.в. $(x,t) \in Q$, і $\widehat{a}_0(\cdot,\cdot,s,\xi)$, $a_i(\cdot,\cdot,s,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,n})$ є вимірними функціями для всіх $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$; більше того, $\widehat{a}_0(x,t,0,0) = 0$, $a_i(x,t,0,0) = 0$ $(i = \overline{1,n})$ для м. в. $(x,t) \in Q$;

$(\mathcal{A}_2)$ існує $p > 2$ таке, що для кожного $i \in \{1,\ldots,n\}$, для м. в. $(x,t) \in Q$ і всіх $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ є правильними оцінки:

$$|\widehat{a}_0(x,t,s,\xi)| \leq C_1\big(|s|^{p-1} + |\xi|^{2(p-1)/p}\big) + h_0(x,t),$$
$$|a_i(x,t,s,\xi)| \leq C_2\big(|s|^{p/2} + |\xi|\big) + h_i(x,t), \quad i = \overline{1,n},$$

де $C_1, C_2 = \text{const} > 0$, $h_0 \in L^{p'}_{\text{loc}}(\overline{Q})$, $h_i \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q})$ $(i = \overline{1,n})$;

$(\mathcal{A}_3)$ для м. в. $(x,t)\in Q$ і всіх (s_1,ξ^1), $(s_2,\xi^2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(x,t,s_1,\xi^1)-a_i(x,t,s_2,\xi^2)\big)(\xi_i^1-\xi_i^2)+$$
$$+\big(\widehat{a}_0(x,t,s_1,\xi^1)-\widehat{a}_0(x,t,s_2,\xi^2)\big)(s_1-s_2)\geq K\big[|s_1-s_2|^p+|\xi^1-\xi^2|^2\big],$$

де $K=\mathrm{const}>0$;

$(\mathcal{F})$ $f\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$;

$(\mathcal{G}_1)$ функція $Q\times\mathbb{R}\ni(x,t,s)\mapsto g(x,t,s)\in\mathbb{R}$ є каратеодорівською, тобто, $g(x,t,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ неперервна функція для м. в. $(x,t)\in Q$, а $g(\cdot,\cdot,s):Q\to\mathbb{R}$ є вимірною функцією для всіх $s\in\mathbb{R}$; $g(\cdot,\cdot,0)=0$;

$(\mathcal{G}_2)$ для кожних $s_1,s_2\in\mathbb{R}$ і для м.в. $(x,t)\in Q$ виконується нерівність

$$0\leq\big(g(x,t,s_1)-g(x,t,s_2)\big)\big(s_1-s_2\big)\leq M|s_1-s_2|^2,$$

де $M>0$ - деяка стала.

Надалі $p'=\frac{p}{p-1}$, тобто p' визначається рівністю $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$; $\nabla y==(y_{x_1},\dots,y_{x_n})$, $|\nabla y|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}|y_{x_i}|^2$.

Зауваження 2.1. *Приклад функції* g: $g(x,t,s)=g_0(x,t)g_1(s)$, *де* $g_0\in L^\infty(Q)$, $g_0\geq 0$ *для м.в.* $(x,t)\in Q$, *а* $g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *– монотонно зростаюча та задовольняє умову Ліпшиця:* $|g_1(s_1)-g_1(s_2)|\leq M|s_1-s_2|$ *для всіх* $s_1,s_2\in\mathbb{R}$.

Означення 2.2. *Функція* y *називається слабким розв'язком задачі* (2.144), (2.145), *якщо* $y\in Y^p_{loc}(Q):=L^2_{\mathrm{loc}}(S;H^1_0(\Omega))\cap L^p_{loc}(\overline{Q})\cap C(S;L^2(\Omega))$ *і* y *задовольняє таку інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_Q\Big\{-y\psi\varphi'+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t,y,\nabla y)\partial_i\psi\varphi+\widehat{a}_0(x,t,y,\nabla y)\psi\varphi+vg(x,t,y)\psi\varphi\Big\}\,dxdt$$
$$=\iint\limits_Q f\psi\varphi\,dxdt,\quad \psi\in V^p(\Omega),\ \varphi\in C^1_c(-\infty,0). \qquad (2.146)$$

Слабкий розв'язок y поставленої задачі буде називатися слабким розв'язком задачі (2.144), (2.145) для керування v, і буде позначатися y, чи $y(v)$, чи $y(x,t)$, $(x,t) \in Q$, чи $y(x,t;v)$, $(x,t) \in Q$. Методологія дослідження задач, подібних до задачі (2.144), (2.145), є досить добре розвинута, зокрема, у таких роботах [49, 43, 47]. Але саме таку задачу, яку ми розглядаємо в даному підрозділі, раніше не досліджували. Тому для повного розуміння матеріалу у наступному пункті ми наводимо повне доведення єдиності та існування слабкого розв'язку цієї задачі та його оцінки. Існування та єдиність слабкого розв'язку задачі (2.144), (2.145) показано в наступному пункті (див. теорема 2.5).

Ми припускаємо, що функція вартості має вигляд

$$J(v) := G(y(\cdot,\cdot;v)) + \mu\|v\|_{L^\infty(Q)}, \tag{2.147}$$

де $\mu \geq 0$ довільна фіксована стала, причому $\mu > 0$, якщо U_∂ – необмежена, а функціонал $G : Y^p_{\text{loc}}(Q) \to [0,+\infty)$ задовольняє умову:

($\mathcal{J}$) $\inf\limits_{z \in Y^p_{\text{loc}}(Q)} G(z) > -\infty$, G є напівнеперервним знизу у $L^2_{\text{loc}}(S;L^2(\Omega))$, чи $C(S;L^2(\Omega))$, чи $L^2_{\text{loc}}(S;L^2(\Omega)) \cap C(S;L^2(\Omega))$.

Зауваження 2.2. *Ми можемо вибрати функціонал G у такому вигляді*

$$G(y(\cdot,\cdot;v)) := \mu_1 \int\limits_S \gamma(t)\|y(\cdot,t;v) - y_{d,1}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt +$$
$$+\mu_2 \max_{t\in S}\left[\rho(t)\|y(\cdot,t;v) - y_{d,2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] +$$
$$+\sum_{i=1}^{N} \mu_{3,i}\|y(\cdot,t_i;v) - z_{d,i}(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad v \in U,$$

де $N \in \mathbb{N}$, $y_{d,1} \in L^2_{loc}(S;L^2(\Omega))$, $y_{d,2} \in C(S;L^2(\Omega))$, $z_{d,i} \in L^2(\Omega)$ $(i = \overline{1,N})$, $\gamma \in L^\infty(S)$ і $\rho \in C(S)$ є невід'ємні функції, які зануляється поза деяким обмеженим інтервалом, $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_{3,i} \geq 0$ $(i = \overline{1,N})$ задані сталі і $\mu_1 + \mu_2 + \sum\limits_{i=1}^{N}\mu_{3,i} > 0$, а $t_i \in S$ $(i = \overline{1,N})$ – довільним чином вибрані і фіксовані точки.

Розглядаємо таку **задачу оптимального керування**: знайти керування $u \in U_\partial$ таке, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{2.148}$$

Коротко цю задачу називаємо задачею (2.148), а її розв'язки – *оптимальними керуваннями.*

Стосовно цієї задачі маємо таке твердження.

Теорема 2.4. *Припустимо, що виконуються умови* $(\mathcal{A}_1) - (\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{G}_1), (\mathcal{G}_2)$ *і* $(\mathcal{J})$. *Тоді множина розв'язків задачі (2.148) є непорожньою і* $*$*-слабко замкненою.*

2.2.3 Коректність задачі без початкових умов для сильно нелінійних параболічних рівнянь з монотонними просторовими частинами

У даному підрозділі показано коректність задачі (2.144), (2.145).

Теорема 2.5. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1) - (\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{G}_1), (\mathcal{G}_2)$, $(\mathcal{F})$ *і* $v \in U_\partial$. *Тоді існує єдиний слабкий розв'язок задачі* (2.144), (2.145). *Крім того, правильною є оцінка*

$$\max_{t \in [t_0 - R_0, t_0]} \int_\Omega |y(x,t)|^2 \, dx + \int_{t_0 - R_0}^{t_0} \int_\Omega \left[|\nabla y|^2 + |y|^p \right] dxdt \leq$$

$$\leq C \Big\{ R^{-2/(p-2)} + \int_{t_0 - R}^{t_0} \int_\Omega |f|^{p'} \, dxdt \Big\} \tag{2.149}$$

для всіх t_0, R_0 *і* R *таких, що* $t_0 \in S$, $R_0 > 0$ *і* $R > \max\{1; 2R_0\}$. *Тут* C *- деяка додатна стала, яка залежить тільки від* K, p *і* $mes_n \Omega$.

Надалі через $\mathrm{mes}_n \Omega$ позначатимемо міру Лебега множини Ω.

Зауваження 2.3. *Зауважимо, що в теоремі 2.5 не накладаються обмеження на поведінку слабкого розв'язку і зростання функцій* a_j $(j = \overline{0,n})$ *і* f *при* $t \to -\infty$. *Однак, коли у формулюванні теореми замінити умову* $p = 2$ *на умову* $p > 2$ *(див., на приклад, [49]), то твердження теореми не є правильним. Отже, умова* $p > 2$ *є суттєвою.*

Лема 2.6. *Припустимо, що функція* $z \in L^2(t_1,t_2;H_0^1(\Omega)) \cap L^p(Q_{t_1,t_2})$, *де* $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$, *задовольняє тотожність*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\Big\{-z\psi\varphi' + \sum_{i=0}^{n} g_i\partial_i\psi\varphi\Big\}\,dxdt = 0, \quad \psi \in V^p(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(t_1,t_2), \tag{2.150}$$

для деяких $g_i \in L^2(Q_{t_1,t_2})$ $(i=\overline{1,n})$, $g_0 \in L^{p'}(Q_{t_1,t_2})$.
Тоді

(i) *функція* z *належить простору* $C([t_1,t_2];L^2(\Omega))$ *і для кожного* $\theta \in C^1([t_1,t_2])$ *і всіх* $\tau_1,\tau_2 \in [t_1,t_2]$ $(\tau_1 < \tau_2)$ *маємо*

$$\frac{1}{2}\theta(t)\int\limits_{\Omega}|z(x,t)|^2\,dx\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} - \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}|z|^2\theta'\,dxdt + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=0}^{n} g_i\partial_i z\theta\,dxdt = 0; \tag{2.151}$$

(ii) *похідна* z_t *функції* z *у сенсі простору розподілів* $D'\big(t_1,t_2;(V^p(\Omega))'\big)$ *належить до* $L^{p'}\big(t_1,t_2;(V^p(\Omega))'\big)$, *крім того, виконується оцінка*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\|z_t(\cdot,t)\|^{p'}_{(V^p(\Omega))'}\,dt \le C_3\Big[\sum_{i=1}^{n}\|g_i\|^{p'}_{L^{p'}(t_1,t_2;L^2(\Omega))} + \|g_0\|^{p'}_{L^{p'}(Q_{t_1,t_2})}\Big], \tag{2.152}$$

де $C_3 > 0$ — *стала, що залежить тільки від* t_1,t_2,p *і* n.

Доведення. Доведення першого твердження випливає з леми 2 [51]. Перейдемо до доведення другого твердження. Відмітимо, що маємо такі неперервні і щільні вкладення

$$V^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \big(V^p(\Omega)\big)'. \tag{2.153}$$

Оскільки простори $L^2(t_1,t_2;V^p(\Omega))$, $L^{p'}(t_1,t_2;(V^p(\Omega))')$ можуть бути ототожнені з підпросторами простору розподілів $D'(t_1,t_2;(V^p(\Omega))')$, то це дає нам змогу говорити про похідні функцій $L^2(t_1,t_2;V^p(\Omega))$ у сенсі $D'(t_1,t_2;(V^p(\Omega))')$ і їхню належність простору $L^{p'}(t_1,t_2;(V^p(\Omega))')$.

Перепишемо рівність (2.150) у вигляді

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} z\psi\varphi'\,dxdt = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=0}^{n} g_i\partial_i\psi\varphi\,dxdt, \quad \psi \in V^p(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(t_1,t_2). \tag{2.154}$$

Згідно з означенням похідної в сенсі розподілів з $D'(t_1,t_2;\big(V^p(\Omega)\big)')$, (2.154) маємо, що z_t належить простору $L^{p'}(t_1,t_2;(V^p(\Omega))')$ і для майже всіх $t\in(t_1,t_2)$:

$$< z_t(\cdot,t),\psi(\cdot) >_{V^p(\Omega)}= -\int\limits_{\Omega}\sum_{i=0}^{n} g_i(x,t)\partial_i\psi(x)\,dx,$$

де $<\cdot\,,\,\cdot>_{V^p(\Omega)}$ — канонічний скарярний добуток між $(V^p(\Omega))'$ і $V^p(\Omega)$.

З вищенаведеного, використовуючи нерівність Коші-Буняковського, для майже всіх $t\in(t_1,t_2)$, отримаємо

$$|< z_t(\cdot,t),\psi(\cdot) >_{V^p(\Omega)}| \le \sum_{i=1}^{n}\|g_i(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_i\psi(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}+$$

$$+\|g_0(\cdot,t)\|_{L^{p'}(\Omega)}\|\psi(\cdot)\|_{L^p(\Omega)}\le$$

$$\le \Big(\sum_{i=1}^{n}\|g_i(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}\|\psi(\cdot)\|_{H^1(\Omega)}+\|g_0(\cdot,t)\|_{L^{p'}(\Omega)}\|\psi(\cdot)\|_{L^p(\Omega)}. \qquad (2.155)$$

З (2.155) випливає, що для майже всіх $t\in(t_1,t_2)$ справедливою є оцінка

$$\|z_t(\cdot,t)\|_{(V^p(\Omega))'}\le\Big(\sum_{i=1}^{n}\|g_i(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}+\|g_0(\cdot,t)\|_{L^{p'}(\Omega)}\le \qquad (2.156)$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\|g_i(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}+\|g_0(\cdot,t)\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Використаємо нерівність Гельдера

$$\big(\sum_{i=0}^{n}a_i\big)^{p'}\le(n+1)^{p'/p}\sum_{i=0}^{n}a_i^{p'},\quad \text{якщо}\quad a_i\ge0\quad(i=\overline{0,n}). \qquad (2.157)$$

З (2.156), використавши (2.157), отримаємо

$$\|z_t(\cdot,t)\|^{p'}_{(V^p(\Omega))'}\le C_4\Big(\sum_{i=1}^{n}\|g_i(\cdot,t)\|^{p'}_{L^2(\Omega)}+\|g_0(\cdot,t)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}\Big), \qquad (2.158)$$

де $C_4:=(n+1)^{p'/p}$.

Проінтегрувавши (2.158) за t від t_1 до t_2, ми отримаємо (2.152). ∎

Лема 2.7. *Нехай виконуються умови* ($\mathcal{A}_1$) – ($\mathcal{A}_3$) *і* ($\mathcal{G}_1$),($\mathcal{G}_2$). *Припустимо, що функції* y_l $(l=1,2)$ *з* $L^2(t_1,t_2;H^1_0(\Omega))\cap L^p(Q_{t_1,t_2})\cap C([t_1,t_2];L^2(\Omega))$ *для* *заданих* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *таких, що* $t_2 - t_1 \ge 1$, *задовольняють рівності*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\Big(-y_l\psi\varphi' + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,y_l,\nabla y_l)\partial_i\psi\varphi + \widehat{a}_0(x,t,y_l,\nabla y_l)\psi\varphi + vg(x,t,y_l)\psi\varphi\Big)dxdt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} f_l\psi\varphi\,dxdt, \quad \psi \in V^p(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(t_1,t_2), \quad (2.159)$$

де $f_l \in L^{p'}(Q_{t_1,t_2})$ $(l = 1, 2)$.

Тоді справедливою є нерівність

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_{\Omega} |y_1(x,t) - y_2(x,t)|^2\,dx + \int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_{\Omega} \big(|\nabla(y_1 - y_2)|^2 + |y_1 - y_2|^p\big)\,dxdt \le$$

$$\le C\Big\{R^{-2/(p-2)} + \int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_{\Omega} |f_1 - f_2|^{p'}\,dxdt\Big\} \quad (2.160)$$

для всіх t_0, R_0 *і* R *таких, що* $R_0 > 0$, $R \ge \max\{1; 2R_0\}$ *і* $t_1 \le t_0 - R < t_0 \le t_2$. *Тут* $C > 0$ *– стала така ж як в* (2.149).

Доведення. Нехай t_0, R_0, R задовольняють умови, що вказані у формулюванні леми, і $\eta(t) := t - t_0 + R$, $t \in \mathbb{R}$. Для заданих $\psi \in V^p(\Omega)$, $\varphi \in C_c^1(t_1, t_2)$ віднімемо рівність (2.159), при $l = 1$ від цієї ж рівності при $l = 2$. Тоді, поклавши

$$y_{12}(x,t) := y_1(x,t) - y_2(x,t), \quad f_{12}(x,t) := f_1(x,t) - f_2(x,t),$$
$$g_{12}(x,t) := g(x,t,y_1) - g(x,t,y_2),$$
$$\widehat{a}_{0,12}(x,t) := \widehat{a}_0(x,t,y_1(x,t),\nabla y_1(x,t)) - \widehat{a}_0(x,t,y_2(x,t),\nabla y_2(x,t)),$$
$$a_{i,12}(x,t) := a_i(x,t,y_1(x,t),\nabla y_1(x,t)) - a_i(x,t,y_2(x,t),\nabla y_2(x,t))$$
$$(i = \overline{1,n};\ (x,t) \in Q),$$

отримаємо рівність, з якої використавши лему 2.6 з $w = y_{12}$, $g_0 = \widehat{a}_{0,12} + vg_{12} - f_{12}$, $g_j = a_{j,12}$ $(j = \overline{1,n})$, $\theta = \eta^s$, $s := 2p/(p-2)$, $\tau_1 = t_0 - R$,

$\tau_2 = \tau \in (t_0 - R, t_0]$, матимемо рівність

$$\eta^s(\tau)\int\limits_\Omega |y_{12}(x,\tau)|^2 dx + 2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega \Big[\sum_{i=1}^n a_{i,12}\partial_i y_{12} + \widehat{a}_{0,12}y_{12} + vg_{12}y_{12}\Big]\eta^s\,dxdt = \tag{2.161}$$

$$= s\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega |y_{12}|^2\eta^{s-1}\,dxdt + 2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega f_{12}y_{12}\eta^s\,dxdt.$$

Зробимо відповідні оцінки інтегралів рівності (2.161).

З умов $(\mathcal{A}_3)$ і $(\mathcal{G}_2)$ отримаємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega \Big[\sum_{i=1}^n a_{i,12}\partial_i y_{12} + \widehat{a}_{0,12}y_{12} + vg_{12}y_{12}\Big]\eta^s\,dxdt \geq$$

$$\geq K\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega \big[|\nabla y_{12}|^2 + |y_{12}|^p\big]\eta^s\,dxdt. \tag{2.162}$$

Далі нам буде потрібна нерівність Юнга:

$$a\,b \leq \varepsilon|a|^q + \varepsilon^{-1/(q-1)}\,|b|^{\,q'}, \quad a,b\in\mathbb{R},\ q>1,\ 1/q+1/q'=1,\ \varepsilon>0, \tag{2.163}$$

яка є наслідком стандартної нерівності Юнга: $a\,b \leq |a|^q/q + |b|^{q'}/q'$.

Поклавши у (2.163) $q = p/2$, $q' = p/(p-2)$, $a = |y_{12}|^2\eta^{s/q}$, $b = \eta^{s/q'-1}$, $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$, ми отримаємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega |y_{12}|^2\eta^{s-1}dxdt \leq \varepsilon_1\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega |y_{12}|^p\eta^s\,dxdt + \varepsilon_1^{-2/(p-2)}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega \eta^{s-p/(p-2)}\,dxdt, \tag{2.164}$$

де $\varepsilon_1 > 0$ — довільне число.

Знову використавши нерівність (2.163), отримаємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega f_{12}y_{12}\eta^s dxdt \leq \varepsilon_2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega |y_{12}|^p\eta^s\,dxdt + \varepsilon_2^{-1/(p-1)}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_\Omega |f_{12}|^{p'}\eta^s dxdt, \tag{2.165}$$

де $\varepsilon_2 > 0$ — довільне число.

З (2.161), використавши (2.162), (2.164), (2.165), $(\mathcal{G}_2)$ і взявши якщо $\varepsilon_1 = K/(2s)$, $\varepsilon_2 = K/4$, отримаємо нерівність

$$\eta^s(\tau)\int\limits_{\Omega_R} |y_{12}(x,\tau)|^2\,dx + K\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{|\nabla y_{12}|^2 + |y_{12}|^p\Big\}\eta^s\,dxdt \le$$

$$\le C_5\Big[\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\eta^{s-p/(p-2)}\,dxdt + \int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|f_{12}|^{p'}\eta^s\,dxdt\Big], \quad (2.166)$$

де $C_5 > 0$ — стала, яка залежить тільки від K і p.

Зазначимо, що $0 \le \eta(t) \le R$, якщо $t \in [t_0 - R, t_0]$, і $\eta(t) \ge R - R_0$, якщо $t \in [t_0 - R_0, t_0]$. Використавши це і те, що $R \ge \max\{1; 2R_0\}$ (тоді, зокрема, маємо $R/(R-R_0) = 1 + R_0/(R-R_0) \le 2$), з (2.166) ми отримаємо потрібне нам твердження. ∎

Доведення теореми 2.5. Спочатку доведемо, що існує не більше одного слабкого розв'язку задачі (2.144), (2.145). Доводимо від супротивного. Нехай y_1, y_2 — два (різні) слабкі розв'язки даної задачі. Використавши лему 2.7, отримаємо

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]}\int\limits_{\Omega}|y_1(x,t) - y_2(x,t)|^2\,dx \le CR^{-2/(p-2)}, \quad (2.167)$$

де t_0, R_0, R — довільні числа такі, що $t_0 \in S$, $R_0 > 0$, $R > \max\{1; 2R_0\}$.

Зафіксуємо числа $R_0 > 0$, $t_0 \in S$ і перейдемо у (2.167) до границі, коли $R \to +\infty$. У результаті отримаємо, що $y_1 = y_2$ майже всюди на $Q_{t_0-R_0,t_0}$. Оскільки R_0 і t_0 — довільні числа, то ми одержимо, що $y_1 = y_2$ майже всюди на Q. Отримана суперечність доводить наше твердження.

Тепер доведемо існування слабкого розв'зку задачі (2.144), (2.145). Для кожного $m \in \mathbb{N}$ розглядаємо мішану задачу для рівняння (2.144) у області $Q_m = \Omega \times (-m, 0)$ з однорідною початковою умовою і крайовими умовами (2.145), а саме: шукаємо функцію $y_m \in L^2(-m,0;H_0^1(\Omega)) \cap L^p(Q_m) \cap C([-m,0];L^2(\Omega))$, яка задовольняє початкову умову:

$$y_m|_{t=-m} = 0$$

та інтегральну тотожність

$$\iint\limits_{Q_m} \Big\{ - y_m\psi\varphi' + \sum_{i=1}^{n} a_i(y_m)\partial_i\psi\varphi + \widehat{a}_0(y_m)\psi\varphi + vg(y_m)\psi\varphi\Big\}\, dxdt = \tag{2.168}$$

$$= \iint\limits_{Q_m} f_m\psi\varphi\, dxdt, \quad \psi \in V^p(\Omega), \varphi \in C_c^1(-m,0),$$

де $f_m(x,t) := f(x,t)$, якщо $(x,t) \in Q_m$, і $f_m(x,t) := 0$, якщо $(x,t) \in Q \setminus Q_m$, $g(z)(x,t) := g(x,t,z(x,t))$, $a_i(z)(x,t) := a_i(x,t,z(x,t),\nabla z(x,t))$, $\widetilde{a}_0(z)(x,t))(x,t) := \widetilde{a}_0(z)(x,t))(x,t,z(x,t),\nabla z(x,t))$.

Існування та єдиність функції y_m випливає з відомих результатів (див., наприклад, [24, с. 539]).

Продовжимо y_m нулем на Q і за цим продовження залишимо те ж саме позначення y_m. Доведемо, що послідовність $\{y_m\}$ збігається у певному сенсі до слабкого розв'язку задачі (2.144), (2.145). Справді, зазначимо, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ функція y_m є слабким розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (2.144), (2.145 тільки тим, що f маємо f_m. Використавши лему 2.7, для будь-яких натуральних m і k отримаємо

$$\max_{t\in[t_0,t_0-R_0]}\int\limits_{\Omega} |y_m(x,t)-y_k(x,t)|^2 dx + \int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_{\Omega} \left[|\nabla(y_m-y_k)|^2 + |y_m-y_k|^p\right] dxdt \le$$

$$\le C\Big\{R^{-2/(p-2)} + \int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_{\Omega} |f_m - f_k|^{p'}\, dxdt\Big\}, \tag{2.169}$$

де t_0, R_0, R — довільні числа такі, що $t_0 \in S$, $R_0 > 0$, $R > \max\{1; 2R_0\}$.

Покажемо, що для фіксованих t_0 і R_0 ліва частина нерівності (2.169) прямує до нуля, коли $m,k \to +\infty$. Справді, нехай $\varepsilon > 0$ — довільне якзавгодно мале число. Виберемо R настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$CR^{-2/(p-2)} < \varepsilon. \tag{2.170}$$

Це можливо, оскільки $p > 2$. Згідно з (2.170) для довільних $m,k \in \mathbb{N}$ таких, що $\max\{-m,-k\} \le t_0 - R$ (тоді $f_m = f_k$ майже всюди на $\Omega \times (t_0 - R, t_0)$) права частина нерівності (2.169) є менша за ε. Звідси випливає, що послідовність звужень $\{y_m\}$ на $Q_{t_0-R_0,t_0}$ є фундаментальною у $L^2(t_0-R_0, t_0; H_0^1(\Omega))\cap$

$L^p(Q_{t_0-R,t_0}) \cap C([t_0-R_0,t_0];L^2(\Omega))$. Оскільки t_0 і R_0 — довільні, то звідси випливає існування функції $y \in Y^p_{\rm loc}(Q)$ такої, що $y_m \to y$ сильно у просторах $L^2_{\rm loc}(S;H^1_0(\Omega))$, $L^p_{\rm loc}(\overline{Q})$, і $(S;L^2(\Omega))$. Звідси, умов $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{G}_1)$ і леми 2.2 монографії [15] за допомогою простих міркувань отримуємо

$$\iint\limits_Q \Big(\sum_{i=1}^n a_i(y_m)\partial_i\psi\varphi + \widehat{a}_0(y_m)\psi\varphi + vg(y_m)\psi\varphi\Big)\,dxdt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_Q \Big(\sum_{i=1}^n a_i(y)\partial_i\psi\varphi + \widehat{a}_0(y)\psi\varphi + vg(y)\psi\varphi\Big)\,dxdt.$$

Взявши до уваги те, що у (2.168) інтегрування по Q_m може бути замінене на інтегрування по Q, перейдемо до границі у тотожності (2.168) при $m \to \infty$. У результаті отримаємо (2.146). Це означає, що функція y є слабким розв'язком задачі (2.144), (2.145). Поклавши в лемі 2.7 $y_1 = y$, $y_2 = 0$, $f_1 = f$, $f_2 = 0$, отримаємо оцінку (2.149) ∎

2.2.4 Доведення теореми 2.4

Нехай $\{v_k\}$ – мінімізуюча послідовність для J у U_∂, тобто, $J(v_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \inf\limits_{v\in U_\partial} J(v)$. Звідси та з (2.147) і умови на G випливає, що послідовність $\{v_k\}$ є обмеженою у просторі $L^\infty(Q)$, тобто,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in Q} |v_k(x,t)| \le C_6 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.171}$$

де $C_6 > 0$ — стала, яка не залежить від k.

Оскільки для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $y_k := y(v_k)$ є слабким розв'язком задачі (2.144), (2.145) для $v = v_k$, то

$$\iint\limits_Q \Big\{ -y_k\psi\varphi' + \sum_{i=1}^n a_i(y_k)\partial_i\psi\varphi + \widehat{a}_0(y_k)\psi\varphi + v_k g(y_k)\psi\varphi\Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q f\psi\varphi\,dxdt, \quad \psi \in V^p(\Omega),\ \varphi \in C^1_c(-\infty,0). \tag{2.172}$$

Згідно з теоремою 2.5 для кожного $k\in\mathbb{N}$ маємо оцінку

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]}\int\limits_{\Omega}|y_k(x,t)|^2\,dx+\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\left[|\nabla y_k|^2+|y_k|^p\right]dxdt\le$$
$$\le C\Big\{R^{-2/(p-2)}+\int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_{\Omega}|f|^{p'}\,dxdt\Big\},\qquad(2.173)$$

де t_0,R_0,R — довільні такі, що $t_0\in S$, $R_0>0,R\ge\max\{1,2R_0\}$, а C – стала, яка не залежить від $k\in\mathbb{N},$.

Нехай $\tau_1,\tau_2\in S\,(\tau_1<\tau_2)$ — довільні. З (2.173) і умови $(\mathcal{F})$ отримаємо

$$\|\nabla y_k\|_{L^2(Q_{\tau_1,\tau_2})}\le C_7,\quad \|y_k\|_{L^p(Q_{\tau_1,\tau_2})}\le C_7,\quad k\in\mathbb{N},\qquad(2.174)$$

де $C_7>0$ – стала, яка не залежить від k.

З $(\mathcal{A}_2)$ і (2.174) випливає, що

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}|\widehat{a}_0(y_k)|^{p'}\,dxdt\le C_8\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\left(|y_k|^p+|\nabla y_k|^2+|h_0|^{p'}\right)dxdt\le C_9,\qquad(2.175)$$

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}|a_i(y_k)|^2dxdt\le C_{10}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\Big(|y_k|^p+|\nabla y_k|^2+\sum_{i=1}^{n}|h_i|^2\Big)\,dxdt\le C_{11},\quad i=\overline{1,n},\qquad(2.176)$$

де C_8,C_9,C_{10},C_{11} – додатні сталі, що не залежать від k.

Оскільки $p>2$, то $1<p'<2$. Отже, маємо неперервні вкладення

$$L^p(Q_{\tau_1,\tau_2})\subset L^2(Q_{\tau_1,\tau_2})\subset L^{p'}(Q_{\tau_1,\tau_2}).\qquad(2.177)$$

Згідно (2.174), (2.176) і (2.177), отримуємо

$$\Big(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\|a_i(y_k)\|^{p'}_{L^2(\Omega)}\,dt\Big)^{1/p'}\le C_{12}\Big(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\|a_i(y_k)\|^{2}_{L^2(\Omega)}\,dt\Big)^{1/2}\le C_{13},\qquad(2.178)$$

$$\|y_k\|_{L^{p'}(Q_{\tau_1,\tau_2})}\le C_{14}\|y_k\|_{L^p(Q_{\tau_1,\tau_2})}\le C_{15},\qquad(2.179)$$

де $C_{12},C_{13},C_{14},C_{15}$ — додатні сталі, що не залежать від k.

З $(\mathcal{G}_1),(\mathcal{G}_2)$, отримуємо

$$|g(x,t,y_k(x,t))|\le M|y_k(x,t)|\quad \text{для м. в.}\quad (x,t)\in Q.$$

Звідси та з (2.171), (2.174) і (2.179) одержимо

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} |v_k g(y_k)|^{p'} dxdt \le (C_6)^{p'} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} |g(y_k)|^{p'} dxdt \le \tag{2.180}$$

$$\le C_{16} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} (|y_k|^{p'}) dxdt \le C_{17},$$

де C_{16}, C_{17} – додатні сталі, які не залежать від k.

Враховуючи твердження *(ii)* леми 2.6 і (2.157), згідно з $(\mathcal{F})$, (2.175), (2.178), (2.180) з (2.172) отримаємо

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \|y_{k,t}(\cdot,t)\|^{p'}_{(V^p(\Omega))'} dt \le C_3 \Big[\sum_{i=1}^{n} \|a_i(y_k)\|^{p'}_{L^{p'}(t_1,t_2;L^2(\Omega))} +$$

$$+ \|\widehat{a}_0(y_k) + v_k g(y_k) - f\|^{p'}_{L^{p'}(Q_{t_1,t_2})} \Big] \le C_{18}, \tag{2.181}$$

де $C_{18} > 0$ – стала, незалежна від k.

Далі будемо використовувати таке твердження:

Твердження 2.1 (теорема Обена, див. [36] і [41, с. 393]). *Нехай $q > 1, r > 1$ – довільні дійсні числа, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$, $\mathcal{W}, \mathcal{L}, \mathcal{B}$ – банахові простори такі, що $\mathcal{W} \overset{K}{\subset} \mathcal{L} \circlearrowleft \mathcal{B}$. Тоді*

$$\{u \in L^q(t_1,t_2;\mathcal{W}) \mid u' \in L^r(t_1,t_2;\mathcal{B})\} \overset{K}{\subset} \Big(L^q(t_1,t_2;\mathcal{L}) \cap C([t_1,t_2];\mathcal{B})\Big),$$

тобто, якщо $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ – обмежена послідовність в $L^q(t_1,t_2;\mathcal{W})$ і $\{u'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ обмежена послідовність в $L^r(t_1,t_2;\mathcal{B})$, то існують підпослідовність $\{u_{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ і функція $u \in L^q(t_1,t_2;\mathcal{L}) \cap C([t_1,t_2];\mathcal{B})$ такі, що $u_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u$ сильно в $L^q(t_1,t_2;\mathcal{L})$ і в $C([t_1,t_2];\mathcal{B})$.

Оскільки $V^p(\Omega) \circlearrowright H^1_0(\Omega) \overset{K}{\subset} L^2(\Omega)$ (див. [26, с. 245]), то $V^p(\Omega) \overset{K}{\subset} L^2(\Omega)$. На підставі твердження 2.1 для $\mathcal{W} = V^p(\Omega)$, $\mathcal{L} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{B} = (V^p(\Omega))'$, $q = 2$, $r = p'$, з оцінок (2.171), (2.174), (2.175), (2.176), (2.181) випливає, що існують підпослідовність послідовності $\{v_k, y_k\}$ (яку також позначаємо через $\{v_k, y_k\}$) і функції $u \in U_\partial$, $y \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H^1_0(\Omega)) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ та $\chi_0 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$,

$\chi_i \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i = \overline{1,n})$ такі, що

$$v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(Q), \tag{2.182}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S; H^1_0(\Omega)), \tag{2.183}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{слабко в} \quad L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \tag{2.184}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{сильно в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega)), \tag{2.185}$$

$$\widehat{a}_0(y_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_0 \quad \text{слабко в} \quad L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \tag{2.186}$$

$$a_i(y_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.187}$$

Зауважимо, що з (2.183) випливає

$$\partial_i y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \partial_i y \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad i = \overline{0,n}. \tag{2.188}$$

Покажемо, що з (2.182) та (2.185) випливає

$$\iint\limits_Q v_k g(y_k)\psi\varphi\, dxdt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_Q u g(y)\psi\varphi\, dxdt \quad \forall\, \psi \in V^p(\Omega), \forall\, \varphi \in C^1_c(-\infty, 0). \tag{2.189}$$

Дійсно, нехай $\varphi \in C^1_c(-\infty,0)$ – довільне, і $t_1, t_2 \in S$ такі, що $\operatorname{supp}\varphi \subset [t_1, t_2]$. Тоді маємо

$$\iint\limits_Q v_k g(y_k)\psi\varphi\, dxdt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega (v_k g(y_k) - v_k g(y) + v_k g(y))\psi\varphi\, dxdt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega v_k g(y)\psi\varphi\, dxdt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega v_k(g(y_k) - g(y))\psi\varphi\, dxdt. \tag{2.190}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{G}_2)$, легко отримати

$$|g(y_k) - g(y)| \le M|y_k - y|.$$

Отже, використовуючи нерівність Коші-Буняковського, (2.171) і (2.185), одержуємо

$$\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega v_k(g(y_k) - g(y))\psi\varphi\, dxdt\Big| \le M\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega v_k|y_k - y||\psi\varphi|\, dxdt \le$$

$$\le M\Big(\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega |v_k\psi\varphi|^2\, dxdt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega |y_k - y|^2\, dxdt\Big)^{1/2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.191}$$

Отже, на підставі (2.182) та (2.191) з (2.190) випливає (2.189).

Аналогічно до (2.189) можна показати, що з (2.182) та (2.185) випливає

$$\iint\limits_Q v_k g(y_k) y_k \varphi \, dxdt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_Q u g(y) y \varphi \, dxdt \quad \forall \, \varphi \in C_c^1(-\infty, 0). \tag{2.192}$$

Справді,

$$\iint\limits_Q v_k g(y_k) y_k \varphi \, dxdt = \iint\limits_Q \big(v_k g(y_k) y_k - v_k g(y) y_k + v_k g(y) y_k\big) \varphi \, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q v_k y_k (g(y_k) - g(y)) \varphi \, dxdt + \iint\limits_Q v_k g(y) y_k \varphi \, dxdt.$$

Аналогічно до (2.189), з (2.182) та (2.185) отримуємо

$$\iint\limits_Q v_k g(y) y_k \varphi \, dxdt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_Q u g(y) y \varphi \, dxdt. \tag{2.193}$$

З умови $(\mathcal{G}_2)$, нерівності Коші-Буняковського, (2.171), (2.174) та (2.185) випливає

$$\Big| \iint\limits_Q v_k y_k (g(y_k) - g(y)) \varphi \, dxdt \Big| \le M \iint\limits_Q v_k |y_k| |y_k - y| |\varphi| \, dxdt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.194}$$

З (2.193) та (2.194) одержуємо (2.192).

Спрямуємо k до ∞ в (2.172), використовуючи (2.186) – (2.189) отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ - y\psi\varphi' + \sum_{i=0}^n \chi_i \partial_i \psi \varphi + u g(y) \psi \varphi \Big\} \, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q f \psi \varphi \, dxdt, \quad \psi \in V^p(\Omega), \ \varphi \in C_c^1(-\infty, 0). \tag{2.195}$$

Згідно з лемою 2.6, з тотожності (2.195) випливає, що $y \in C(S; L^2(\Omega))$. Звідси та того, що $y \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H_0^1(\Omega)) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ випливає включення $y \in Y^p_{\mathrm{loc}}(Q)$.

Покажемо, що правильна така рівність

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big\{ \sum_{i=0}^n \chi_i \partial_i \psi \Big\} \, dx = \int\limits_{\Omega_t} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(y) \partial_i \psi + \widehat{a}_0(y) \psi \Big\} \, dx \tag{2.196}$$

для м.в. $t \in S$ і кожного $\psi \in V^p(\Omega)$. Для цього використаємо метод монотонності (див. [27, розділ 2]).

Виберемо довільним чином функції $w \in L^2_{\rm loc}(S; H^1(\Omega))$ і $\theta \in C^1_c(-\infty, 0)$, $\theta(t) \geq 0$ для всіх $t \in (-\infty, 0)$. Використовуючи умову $(\mathcal{A}_3)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$W_k := \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n \big[(a_i(y_k) - a_i(w))(\partial_i y_k - \partial_i w) + \\ +(\widehat{a}_0(y_k) - \widehat{a}_0(w))(y_k - w)\big]\Big\}\theta \, dxdt \geq 0.$$

Звідси отримуємо

$$W_k = \iint\limits_Q \Big(\sum_{i=1}^n a_i(y_k)\partial_i y_k + \widehat{a}_0(y_k)y_k\Big)\theta \, dxdt - \iint\limits_Q \Big(\sum_{i=1}^n \big[a_i(y_k)\partial_i w + \tag{2.197}$$

$$+a_i(w)(\partial_i y_k - \partial_i w)\big] + \widehat{a}_0(y_k)w + \widehat{a}_0(w)(y_k - w)\Big)\theta \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.198}$$

На підставі леми 2.6 з (2.172) маємо

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_Q |y_k|^2\theta' \, dxdt + \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(y_k)\partial_i y_k + \widehat{a}_0(y_k)y_k + v_k g(y_k)y_k\Big\}\theta \, dxdt = \\ = \iint\limits_Q f y_k \theta \, dxdt. \tag{2.199}$$

З (2.198), використовуючи (2.199), отримаємо

$$W_k = \iint\limits_Q \Big\{\frac{1}{2}|y_k|^2\theta' + \big(f y_k - v_k g(y_k)y_k\big)\theta\Big\} dxdt - \iint\limits_Q \Big(\sum_{i=1}^n \big[a_i(y_k)\partial_i w + \tag{2.200}$$

$$+a_i(w)(\partial_i y_k - \partial_i w)\big] + \widehat{a}_0(y_k)w + \widehat{a}_0(w)(y_k - w)\Big)\theta \, dxdt \geq 0, \; k \in \mathbb{N}.$$

Враховуючи (2.185) та (2.192), маємо

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_Q \Big\{\frac{1}{2}|y_k|^2\theta' + \big(f y_k - v_k g(y_k)y_k\big)\theta\Big\} \, dxdt = \\ = \iint\limits_Q \Big\{\frac{1}{2}|y|^2\theta' + \big(f y - u g(y)y\big)\theta\Big\} \, dxdt. \tag{2.201}$$

Враховуючи (2.186) – (2.188) та (2.201) з (2.200) отримуємо

$$0 \le \lim_{k\to\infty} W_k = \iint\limits_Q \Big\{\frac{1}{2}|y|^2\theta' + \big(fy - ug(y)y\big)\theta\Big\}\, dxdt -$$

$$-\iint\limits_Q \Big(\sum_{i=1}^n \big[\chi_i\partial_i w + a_i(w)(\partial_i y - \partial_i w)\big] + \chi_0 w + \widehat{a}_0(w)(y-w)\Big)\theta dxdt. \quad (2.202)$$

З (2.195), використовуючи лему 2.6, одержуємо

$$\iint\limits_Q \sum_{i=0}^n \chi_i\partial_i y\theta\, dxdt = \iint\limits_Q \Big\{\frac{1}{2}|y|^2\theta' + \big(fy - ug(y)y\big)\theta\Big\}\, dxdt. \quad (2.203)$$

Отже, з (2.202) та (2.203) маємо

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(w))(\partial_i y - \partial_i w) + (\chi_0 - \widehat{a}_0(w))(y-w)\Big\}\theta\, dxdt \ge 0. \quad (2.204)$$

Підставляючи у цю нерівність $w = y - \lambda\psi$, де $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $\lambda > 0$ – довільні, та поділивши одержану нерівність на λ, матимемо

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(u - \lambda\psi))\partial_i\psi + (\chi_0 - \widehat{a}_0(u - \lambda\psi))\psi\Big\}\theta\, dxdt \ge 0. \quad (2.205)$$

Використовуючи умову $(\mathcal{A}_2)$ та теорему Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла (див. [69, с. 648]), перейдемо до границі при $\lambda \to 0+$ в (2.205). У результаті отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(y))\partial_i\psi + (\chi_0 - \widehat{a}_0(y))\psi\Big\}\theta\, dxdt = 0. \quad (2.206)$$

Оскільки $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $\theta \in C_c^1(-\infty, 0)$ – довільні функції, то з (2.206) випливає (2.196). З тотожності (2.195) та (2.196) маємо (2.146) для $v = u$.

Отже, ми показали, що y є узагальненим розв'язком задачі (2.144), (2.145) з $v = u$, тобто, $y = y(u) = y(x,t;u)$, $(x,t) \in Q$, є станом керованої системи для керування u. Покажемо тепер, що u є оптимальним керуванням. Спершу доведемо, що

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{в} \quad C(S; L^2(\Omega)), \quad (2.207)$$

тобто, для кожного інтервалу $[\alpha,\beta]\subset S$, маємо

$$\max_{\tau\in[\alpha,\beta]}\int\limits_{\Omega}|y(x,\tau)-y_k(x,\tau)|^2dx\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{2.208}$$

Для цього віднімемо від тотожності (2.146) з $v=u$ тотожність (2.172):

$$\iint\limits_{Q}\Big\{-(y-y_k)\psi\varphi'+\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(y)-a_i(y_k)\big)\partial_i\psi\varphi+$$
$$+\big(\widehat{a}_0(y)-\widehat{a}_0(y_k)\big)\psi\varphi+(ug(y)-v_kg(y_k))\psi\varphi\Big\}\,dxdt=0,$$
$$\psi\in V^p(\Omega),\ \varphi\in C_c^1(-\infty,0). \tag{2.209}$$

Застосуємо до одержаної тотожності (2.209) лему 2.6 з $\theta(t)=2(t-\tau+1)$, $\tau_1=\tau-1$, $\tau_2=\tau$, де $\tau\in S$– довільне фіксоване. У результаті отримаємо

$$\int\limits_{\Omega}|y(x,\tau)-y_k(x,\tau)|^2\,dx-\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|y-y_k|^2\,dxdt+$$
$$+\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(y)-a_i(y_k)\big)(\partial_iy-\partial_iy_k)+ \tag{2.210}$$
$$+\big(\widehat{a}_0(y)-\widehat{a}_0(y_k)\big)(y-y_k)+(ug(y)-v_kg(y_k))(y-y_k)\Big]\theta\,dxdt=0.$$

З (2.210), враховуючи умови $(\mathcal{A}_3)$ та $(\mathcal{G}_2)$, матимемо:

$$\int\limits_{\Omega}|y(x,\tau)-y_k(x,\tau)|^2\,dx\le \tag{2.211}$$
$$\le\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\big[|y-y_k|^2-(ug(y)-v_kg(y)+v_kg(y)-v_kg(y_k))(y-y_k)\theta\big]\,dxdt\le$$
$$\le\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\big[|y-y_k|^2-(u-v_k)g(y)(y-y_k)\theta-v_k(g(y)-g(y_k))(y-y_k)\theta\big]\,dxdt\le$$
$$\le 2\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\big[|y-y_k|^2+|u-v_k||g(y)||y-y_k|\big]\,dxdt.$$

Використовуючи (2.171), $(\mathcal{G}_1)$, $(\mathcal{G}_2)$ та нерівність Коші-Буняковського, з (2.211) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega}|y(x,\tau)-y_k(x,\tau)|^2\,dx \le C_{17}\Big(\Big[\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|y-y_k|^2\,dxdt\Big]^{1/2}+$$

$$+\int\limits_{\tau-1}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|y-y_k|^2dxdt\Big), \tag{2.212}$$

де $C_{17}>0$ – довільна стала, що не залежить від k.

Для кожного $\tau\in[\alpha,\beta]$, маємо $[\tau-1,\tau]\subset[\alpha-1,\beta]$. Отже, з оцінки (2.212) отримаємо

$$\max_{\tau\in[\alpha,\beta]}\int\limits_{\Omega}|y(x,\tau)-y_k(x,\tau)|^2dx \le \tag{2.213}$$

$$\le C_{17}\Big(\Big[\int\limits_{\alpha-1}^{\beta}\int\limits_{\Omega}|y-y_k|^2dxdt\Big]^{1/2}+\int\limits_{\alpha-1}^{\beta}\int\limits_{\Omega}|y-y_k|^2dxdt\Big) \quad \forall\tau\in[\alpha,\beta].$$

Отже, відповідно до (2.185), з оцінки (2.213) випливає (2.208).

Залишається довести, що u – мінімізуючий елемент функціоналу J. Справді, оскільки функціонал $G: Y^p_{\mathrm{loc}}(Q)\to\mathbb{R}$ є напівнеперервним знизу в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega))$, або в $C(S;L^2(\Omega))$, або в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega))\cap C(S;L^2(\Omega))$ і маємо (2.185), (2.207), то

$$\varliminf_{k\to\infty} G(y_k)\ge G(y). \tag{2.214}$$

Також з (2.182) та властивостей $*$-слабко збіжних послідовностей (див. [59, твердження 3.13, с. 63]) випливає

$$\varliminf_{k\to\infty}\|v_k\|_{L^\infty(Q)}\ge\|u\|_{L^\infty(Q)}. \tag{2.215}$$

З (2.147), (2.214), (2.215) легко отримати, що $\lim\limits_{k\to\infty}J(v_k)\ge\varliminf\limits_{k\to\infty}G(y_k)+\mu\varliminf\limits_{k\to\infty}\|v_k\|_{L^\infty}(Q)\ge J(u)$. Отже, ми показали, що u є розв'язком задачі (2.148), тобто, оптимальним керуванням.

Покажемо, що множина оптимальних керувань задачі (2.148) є $*$-слабко замкненою. Справді, нехай $\{u_k\}$ – послідовність оптимальних керувань така, що $u_k\to u$ $*$-слабко в $L^\infty(Q)$. Аналогічно, як було зроблено вище, показуємо, що $\varliminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$. Але $J(u_k) = \inf_{v\in U_\partial} J(v) \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Отже, u є оптимальним керуванням задачі (2.148).

2.3 Сильно нелінійні рівняння з немонотонними просторовими частинами

2.3.1 Основні позначення

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею Γ. Позначимо $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \Gamma \times S$, $\Omega_t := \Omega \times \{t\}$, $t \in \mathbb{R}$. Для будь-якої вимірної множини $G \subset \mathbb{R}^m$, де $m = n$ або $m = n+1$, та довільного $q \in [1,\infty]$ позначимо через $L^q(G)$ простір Лебега з нормою $\|\cdot\|_{L^q(G)}$. Під $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, де $q \in [1,\infty]$, розуміємо лінійний простір вимірних функцій на Q таких, що їх звуження на будь-яку обмежену вимірну множину $Q' \subset Q$ належить простору $L^q(Q')$.

Нехай X – довільний банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$, $q \in [1,\infty]$. Позначимо через $L^q_{\mathrm{loc}}(S;X)$ лінійний простір функцій, які визначені на S і приймають значення в X, а їх звуження на будь-який відрізок $[a,b] \subset S$ належить простору $L^q(a,b;X)$.

Нехай $\nu \in \mathbb{R}$. Введемо простір

$$L^q_\nu(S;X) := \Big\{ f \in L^q_{\mathrm{loc}}(S;X) \ \Big| \ \int\limits_S e^{-2\nu t} \|f(t)\|^q_X dt < \infty \Big\}.$$

Цей простір є банаховим з нормою

$$\|f\|_{L^q_\nu(S;X)} := \Big(\int\limits_S e^{-2\nu t} \|f(t)\|^q_X \, dt \Big)^{1/q}.$$

Якщо X – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$, то простір $L^2_\nu(S;X)$ також є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L^2_\nu(S;X)} = \int\limits_S e^{-2\nu t} (f(t), g(t))_X \, dt.$$

Позначимо через $C^1_c(I)$, де $I \subset \mathbb{R}$ – інтервал, лінійний простір неперервно диференційованих на I функцій з компактним носієм (якщо $I = (t_1,t_2)$, тоді писатимемо $C^1_c(t_1,t_2)$ замість $C^1_c((t_1,t_2))$). Під $C(I;X)$, де $I \subset \mathbb{R}$ –

проміжок, X – довільний банахів простір, розуміємо простір неперервно диференційовних функцій на I зі значенням в X. Якщо I – числовий відрізок, то $C(I;X)$ – банахів простір з нормою $\|z\|_{C(I;X)} = \max\limits_{t\in I} \|z(t)\|_X$. У випадку коли I – відкритий інтервал, то кажемо, що $z_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} z$ в $C(I;X)$, якщо для кожного $\tau_1, \tau_2 \in I$ $(\tau_1 < \tau_2)$ маємо $\|z - z_m\|_{C([\tau_1,\tau_2];X)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Нехай $H^1(\Omega) := \{v \in L_2(\Omega) \mid v_{x_i} \in L_2(\Omega)\ (i = \overline{1,n})\}$ – простір Соболєва, який є гільбертовим простором зі скалярним добутком $(v,w)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \big\{ \sum\limits_{i=1}^n v_{x_i} w_{x_i} + vw \big\}\, dx$ та нормою $\|v\|_{H^1(\Omega)} := \big(\int\limits_\Omega \big\{ \sum\limits_{i=1}^n |v_{x_i}|^2 + |v|^2 \big\}\, dx \big)^{1/2}$. Під $H_0^1(\Omega)$ будемо розуміти замикання в $H^1(\Omega)$ простору $C_c^\infty(\Omega)$, де $C_c^\infty(\Omega)$ – простір, що скаладється з нескінченно диференційовних на Ω функцій з компактним носієм. На $H_0^1(\Omega)$ задаємо скалярний добуток і норму так: $(v,w)_{H_0^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \nabla v \nabla w\, dx$, $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \Big(\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\, dx \Big)^2$.

Позначимо

$$K := \inf_{v\in H_0^1(\Omega),\ v\neq 0} \frac{\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\, dx}{\int\limits_\Omega |v|^2\, dx}. \tag{2.216}$$

Відомо, що константа K є скінченною і співпадає з першим власним значенням задачі на власні значення:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.217}$$

З (2.216) легко випливає нерівність Фрідріхса:

$$\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\, dx \geq K \int\limits_\Omega |v|^2\, dx \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.218}$$

Нехай $q > 1$ дійсне число, $q' := \frac{q}{q-1}$ – спряжене до q, тобто, визначене рівністю $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Позначимо

$$V^q(\Omega) := H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega).$$

Добре відомо, що

$$\big(V^q(\Omega)\big)' := H^{-1}(\Omega) + L^{q'}(\Omega).$$

Також позначимо $\int\limits_{\Omega_t} z\, dx := \int\limits_\Omega z(x,t)\, dx$ для кожного $z \in L^1_{\mathrm{loc}}(S; L^1(\Omega))$ та м. в. $t \in S$.

2.3.2 Формулювання задачі оптимального керування та існування її розв'язку

Нехай U – замкнений лінійний підпростір простору $L^\infty(Q)$, наприклад, $U := L^\infty(Q)$ або $U := \{u \in L^\infty(Q) \mid v(x,t) = 0$ для м.в. $(x,t) \in Q \setminus Q_{t^*,0}\}$, де $t^* < 0$ є довільно фіксованим. Припускаємо, що U – є простір керувань, а $U_\partial := \left\{v \in U \,\middle|\, 0 \le v \le M \quad \text{м.в. в} \quad Q\right\}$ – множина допустимих керувань, де $M = \text{const} > 0$ – задана стала.

Припустимо, що стан досліджуваної еволюційної системи для заданого керування $v \in U_\partial$ визначається слабким розв'язком задачі

$$y_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) y_{x_j})_{x_i} + c(x)|y|^{p-2}y - v(x,t)y = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.219}$$

$$y\big|_\Sigma = 0, \tag{2.220}$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-\lambda t}\|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{2.221}$$

де $\lambda \in \mathbb{R}$ – задана стала.

Перед тим, як дати означення слабкого розв'язку задачі (2.219)-(2.221), зробимо деякі припущення:

($\mathcal{A}$) $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$ $(i,j = \overline{1,n})$, існує стала $\mu =$const> 0 така, що $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \mu \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^2$ для м.в. $x \in \Omega$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$; крім того,
$$M - \mu K > 0;$$

($\mathcal{C}$) $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \ge c_0 = \text{const} > 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$;

($\mathcal{F}$) $f \in L^2_{\text{loc}}(S; L^2(\Omega))$;

($\mathcal{P}$) $p > 2$.

Визначимо $p' = \frac{p}{p-1}$, тобто, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Означення 2.3. *Слабким розв'язком задачі* (2.219)– (2.221) *називають функцію* $y \in L^2_{loc}(S; H^1_0(\Omega)) \cap L^p_{loc}(S; L^p(\Omega)) \cap C(S; L^2(\Omega))$, *якщо її похідна* y_t *належить до* $L^2_{loc}(S; L^2(\Omega))$ *і виконується інтегральна рівність*

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big\{ y_t\psi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_{x_i} \psi_{x_j} + (c|y|^{p-2}y - vy)\psi \Big\}\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_t} f\psi\, dx \quad \text{для м.в. } t \in S \text{ і для всіх } \psi \in V^p(\Omega). \tag{2.222}$$

Слабкий розв'язок y задачі (2.219)–(2.221) будемо позначати через y, або $y(v)$, або $y(x,t)$, $(x,t) \in Q$, чи $y(x,t;v)$, $(x,t) \in Q$.

Тут і далі вважатимемо, що $\lambda > 0$ і функція вартості має вигляд

$$J(v) = \iint\limits_{Q} \big[\, |y(x,t;v)| - \rho(x,t)|v|^2 \,\big]\, dxdt, \quad v \in U, \tag{2.223}$$

де $\rho \in L^1(Q)$ – відома функція.

Зауваження 2.4. *Якщо* $\lambda > 0$ *та виконується* (2.221), *тоді функціонал* J *є коректно визначеним. Справді, з* (2.221) *маємо, що* $\|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le \widetilde{C} e^{\lambda t}$ $\forall\, t \in S$, *де* $\widetilde{C} = const > 0$. *Використавши нерівність Коші-Буняковського, отримаємо*

$$\iint\limits_{Q} |y(x,t)|\, dxdt = \int\limits_{S} dt \int\limits_{\Omega} |y(x,t)|\, dx \le (mes_n \Omega)^{1/2} \int\limits_{S} \|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\, dt \le$$

$$\le \widetilde{C} (mes_n \Omega)^{1/2} \int\limits_{S} e^{\lambda t} dt < \infty.$$

Отже, перший доданок функціоналу J *коректно визначений. З того що* $\rho \in L^1(Q)$, $v \in L^\infty(Q)$, *випливає, що і другий доданок функціоналу* J *також коректно визначений.*

Розглядаємо *задачу оптимального керування*: знайти керування $u \in U_\partial$ таке, що

$$J(u) = \sup_{v \in U_\partial} J(v). \tag{2.224}$$

Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (2.224), а її розв'язок – *оптимальним керуванням.*

Основним результатом даного підрозділу є таке твердження.

Теорема 2.6. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{P})$, $\lambda > M - \mu K$ *та*

$$f \in L^2_\lambda(S; L^2(\Omega)). \tag{2.225}$$

Тоді множина розв'язків задачі (2.224) є непорожньою і $*$*-слабко замкненою.*

Зауваження 2.5. *У реальних процесах функція* y *описує щільність популяції. В цьому випадку природно вимагати невід'ємність* y. *Ця умова виконується якщо* $f \geq 0$ *(див. лема 2.9).*

2.3.3 Коректність задачі без початкових умов для нелінійних параболічних рівнянь з немонотонними просторовими частинами

Лема 2.8. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{P})$ *та* $\lambda \geq M - \mu K$. *Тоді задача* (2.219)–(2.221) *має не більше одного слабкого розв'язку.*

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай y_1, y_2 два різні розв'язки задачі (2.219)–(2.221). Розглянемо різницю між рівністю (2.222) з $u = u_1$ і рівністю (2.222) з $u = u_2$. Тоді для $z = y_1 - y_2$ отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big[z_t\psi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_{x_i}\psi_{x_j} + \, c(|y_1|^{p-2}y_1 - |y_2|^{p-2}y_2)\psi -$$

$$-vz\psi \Big]\, dx = 0 \quad \text{для та м.в. } t \in S \ \text{ та } \ \forall \psi \in V^p(\Omega). \tag{2.226}$$

З (2.221) випливає, що

$$e^{-2\lambda t} \int\limits_{\Omega_t} |z|^2\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \tag{2.227}$$

Беручи в (2.226) $\psi(\cdot) = z(\cdot, t)$, отримуємо

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big[z_t z + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_{x_i} z_{x_j} + \tag{2.228}$$

$$+c(|y_1|^{p-2}y_1 - |y_2|^{p-2}y_2)(y_1 - y_2) - v|z|^2 \Big]\, dx = 0 \quad \text{для м. в. } \ t \in S.$$

Виберемо довільні числа $\tau_1, \tau_2 \in S$ $(\tau_1 < \tau_2)$. Помноживши тотожність (2.228) на $2e^{-2\lambda t}$, проінтегрувавши від τ_1 до τ_2, отримаємо

$$e^{-2\lambda t}\int\limits_{\Omega}|z(x,t)|^2\,dx\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} + 2\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}z_{x_i}z_{x_j} +$$

$$+c(|y_1|^{p-2}y_1 - |y_2|^{p-2}y_2)(y_1-y_2) + (\lambda - v)|z|^2\Big]\,dxdt = 0.$$

Отже, беручи до уваги, що $c \ge 0$, $(|s_1|^{p-2}s_1 - |s_2|^{p-2}s_2)(s_1-s_2) \ge 0\ \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, і врахувавши $(\mathcal{A})$ та (2.218), отримуємо

$$e^{-\lambda\tau_2}\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau_2)|^2\,dx \;-\; e^{-\lambda\tau_1}\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau_1)|^2\,dx +$$

$$+\,2(\lambda + \mu K - M)\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t}|z|^2\,dxdt \le 0. \tag{2.229}$$

З того, що $\lambda \ge M - \mu K$, та з (2.229) маємо

$$e^{-2\lambda\tau_2}\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau_2)|^2\,dx \le e^{-2\lambda\tau_1}\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau_1)|^2\,dx. \tag{2.230}$$

В (2.230) фіксуємо τ_2 та перейдемо до границі при $\tau_1 \to -\infty$. Згідно з умовою (2.227) отримуємо $e^{-2\lambda\tau_2}\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau_2)|^2\,dx = 0$. Так як $\tau_2 \in S$ – довільне число, то маємо $z(x,t) = 0$ для м. в. $(x,t) \in Q$, тобто, $y_1(x,t) = y_2(x,t) = 0$ для м. в. $(x,t) \in Q$. Отримане протиріччя доводить наше твердження. ∎

Зауваження 2.6. *У випадку* $M - \mu K \le 0$ *немає необхідності вимагати додаткову умову на поведінку розв'язків на нескінченності (умова* (2.221)*) для забезпечення єдиності розв'язку* (2.219)–(2.221) *(див. [52]).*

Лема 2.9. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{P})$, $f \ge 0$ *та* $\lambda \ge M - \mu K$. *Тоді слабкий розв'язок задачі* (2.219)–(2.221) *є невід'ємним.*

Доведення. Позначимо $y^-(x,t) := \begin{cases} y(x,t), & \text{якщо } y(x,t) \le 0, \\ 0, & \text{якщо } y(x,t) > 0, \end{cases}$ для м. в. $(x,t) \in Q$. Розглянемо інтегральну тотожність (2.222). В цій тотожності для майже всіх $t \in S$ візьмемо $\psi(\cdot) = y^-(\cdot,t)$. Тоді

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big\{(y^-)_t y^- + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y^-)_{x_i}(y^-)_{x_j} + c|y^-|^p - v|y^-|^2\Big\}\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_t} f y^- \, dx \quad \text{для м. в.} \;\; t \in S. \tag{2.231}$$

Помноживши (2.231) на $e^{-2\lambda t}$ та проінтегрувавши від τ_1 до τ_2 ($\tau_1, \tau_2 \in S$ – довільні числа, $\tau_1 < \tau_2$), отримаємо

$$\frac{1}{2} e^{-2\lambda\tau_2} \int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_2)|^2 \, dx - \frac{1}{2} e^{-2\lambda\tau_1} \int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_1)|^2 \, dx + \lambda \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t} |y^-|^2 \, dx dt +$$

$$+ \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (y^-)_{x_i} (y^-)_{x_j} + c|y^-|^p - v|y^-|^2 \Big] \, dx dt = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{\Omega} f y^- e^{-2\lambda t} \, dx dt. \tag{2.232}$$

З того, що $f \geq 0$, та умови $(\mathcal{A})$ отримаємо

$$\frac{1}{2} e^{-2\lambda\tau_2} \int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_2)|^2 \, dx - \frac{1}{2} e^{-2\lambda\tau_1} \int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_1)|^2 \, dx$$

$$+ \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda t} \big[(\lambda + \mu K - M) |y^-|^2 \big] \, dx dt \leq 0.$$

Врахувавши, що $\lambda \geq M - \mu K$, з попередньої нерівності здобуваємо

$$e^{-2\lambda\tau_2} \int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_2)|^2 \, dx \leq e^{-2\lambda\tau_1} \int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_1)|^2 \, dx. \tag{2.233}$$

Перейдемо до границі при $\tau_1 \to -\infty$ в (2.233), враховуючи (2.221). У результаті матимемо $e^{-2\lambda\tau_2} \int\limits_{\Omega} |y^-(x,\tau_2)|^2 \, dx \leq 0$. Беручи до уваги, що $\tau_2 \in S$ довільне в (2.233), приходимо до висновку, що $|y^-(x,t)|_{L^2(\Omega)} = 0$ для м. в. $t \in S$, звідки $y^-(x,t) = 0$ м. в. в Q . ∎

Теорема 2.7. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{P})$, (2.225) *та* $\lambda > M - \mu K$. *Тоді задача* (2.219)–(2.221) *має єдиний слабкий розв'язок* y , *причому* $y \in L^2_\lambda(S; H^1_0(\Omega)) \cap L^p_\lambda(S; L^p(\Omega))$, $y_t \in L^2_\lambda(S; L^2(\Omega))$. *Крім того, виконуються такі оцінки:*

$$e^{-2\lambda t} \|y(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-2\lambda s} \|f(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)} \, ds, \;\; t \in S, \tag{2.234}$$

$$\|y\|^2_{L^2_\lambda(S;H^1_0(\Omega))} + \|y_t\|^2_{L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))} + \|y\|^p_{L^p_\lambda(S;L^p(\Omega))} \leq C_2 \|f\|^2_{L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))}, \tag{2.235}$$

де C_1, C_2 *– додатні сталі, що залежать тільки від* M, K, μ *та* λ .

Доведення теореми 2.7. Для кожного $m \in N$ визначимо $Q_m := \Omega \times (-m, 0]$, $\Sigma_m := \Gamma \times (-m, 0]$, $f_m(\cdot, t) := f(\cdot, t)$, якщо $-m < t \le 0$, та $f_m(\cdot, t) := 0$, якщо $t \le -m$.

Розглянемо задачу: знайти функцію y_m, що задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$y_{m,t} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) y_{m,x_j})_{x_i} + c(x)|y_m|^{p-2} y_m - v(x,t) y_m = f_m(x,t), \quad (x,t) \in Q_m, \tag{2.236}$$

крайову умову

$$y\big|_{\Sigma_m} = 0, \tag{2.237}$$

та початкову умову

$$y_m(x, -m) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{2.238}$$

Слабким розв'язком задачі (2.236)–(2.238) називаємо функцію $y_m \in L^2(-m, 0; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(-m, 0; L^p(\Omega)) \cap C([-m, 0]; L^2(\Omega))$, $y_{m,t} \in L^2(-m, 0; L^2(\Omega))$, яка задовольняє умову (2.238) та інтегральну тотожність

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big\{ y_{m,t}\psi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_{m,x_j} \psi_{x_i} + (c|y_m|^{p-2} y_m - v y_m)\psi \Big\}\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_t} f_m \psi \, dxdt \quad \text{для м. в. } t \in [-m, 0] \text{ та всіх } \psi \in V^p(\Omega)\ . \tag{2.239}$$

Лема 2.10. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{F})$ *та* $(\mathcal{P})$. *Тоді задача* (2.236)–(2.238) *має єдиний розв'язок* y_m. *Більше того, для довільного* $\lambda > M - \mu K$ *цей розв'язок задовольняє оцінки:*

$$e^{-2\lambda t} \int\limits_{\Omega_t} |y_m|^2 \, dx \le C_1 \int\limits_{-m}^{t} \int\limits_{\Omega} e^{-2\lambda s} |f(x,s)|^2 \, dxds, \quad t \in [-m, 0], \tag{2.240}$$

$$\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t} \Big[|\nabla y_m|^2 + |y_{m,t}|^2 + |y_m|^p \Big] \, dxdt \le C_2 \iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t} |f_m|^2 \, dxdt, \tag{2.241}$$

де C_1, C_2 *– додатні сталі, що залежать тільки від* M, K, μ *і* λ.

Доведення леми 2.10 наведено нижче в цьому підрозділі.

Для кожного $m \in \mathbb{N}$ продовжимо y_m нулем на Q і за цим продовженням збережемо позначення y_m. Зауважимо. що для кожного $m \in N$ функція

y_m належить до $L^2(S;H_0^1(\Omega))\cap L^p(S;L^p(\Omega))\cap C(S;L^2(\Omega))$, її похідна $y_{m,t}$ належить простору $L^2(S;L^2(\Omega))$ і правильна інтегральна рівність (2.222) з $f=f_m$, тобто,

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big\{y_{m,t}\psi+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_{x_j}\psi_{x_i}+(c|y_m|^{p-2}y_m-vy_m)\psi\Big\}\,dx=\int\limits_{\Omega_t}f_m\psi\,dx$$

$$\text{для м. в. } t\in S \text{ та всіх } \psi\in V^p(\Omega). \tag{2.242}$$

Звідси випливає, що y_m – слабкий розв'язок задачі (2.219)–(2.221) з $f=f_m$, та з леми 2.10 та умови (2.225), отримуємо оцінки:

$$e^{-2\lambda t}\|y_m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\le C_1\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-2\lambda s}\|f(\cdot,s\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds,\quad t\in S, \tag{2.243}$$

$$\|y_m\|^2_{L^2_\lambda(S;H_0^1(\Omega))}+\|y_{m,t}\|^2_{L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))}+\|y_m\|^p_{L^p_\lambda(S;L^p(\Omega))}\le C_2\|f\|^2_{L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))}. \tag{2.244}$$

З твердження 2.1, оцінки (2.244) та компактності вкладення $H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$ отримуємо існування підпослідовності послідовності $\{y_m\}$ (для спрощення за нею залишаємо теж саме позначення $\{y_m\}$) та функції $y\in L^2_\lambda(S;H_0^1(\Omega))\cap L^p_\lambda(S;L^p(\Omega))\cap C(S;L^2(\Omega))$ такої, що $y_t\in L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))$ та

$$y_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}y\qquad\text{слабко в}\quad L^2_\lambda(S;H_0^1(\Omega)), \tag{2.245}$$

$$y_{m,t}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}y_t\qquad\text{слабко в}\quad L^2_\lambda(S;L^2(\Omega)), \tag{2.246}$$

$$y_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}y\qquad\text{слабко в}\quad L^p_\lambda(S;L^p(\Omega)), \tag{2.247}$$

$$y_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}y\quad\text{в}\quad C(S;L^2(\Omega)), \tag{2.248}$$

$$y_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}y\quad\text{м. в. в } Q, \tag{2.249}$$

$$|y_m|^{p-2}y_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}|y|^{p-2}y\quad\text{слабко в}\quad L^{p'}_\lambda(Q). \tag{2.250}$$

З (2.250) для будь-яких $\psi\in V^p(\Omega)$ та $\varphi\in C_c^1(-\infty,0)$ маємо

$$\iint\limits_{Q}c|y_m|^{p-2}y_m\psi\varphi\,dxdt\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\iint\limits_{Q}c|y|^{p-2}y\psi\varphi\,dxdt. \tag{2.251}$$

Покажемо, що функція y є слабким розв'язком задачі (2.219)–(2.221). Для цього домножимо рівність (2.239) на довільну функцію $\varphi\in C_c^1(-\infty,0)$ і проінтегруємо по $t \in S$:

$$\iint\limits_Q \Big\{ y_{m,t}\psi\varphi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_{x_j} \psi_{x_i}\varphi + (c|y_m|^{p-2}y_m - v y_m)\psi\varphi \Big\}\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q f_m \psi\varphi\, dxdt, \quad \psi \in V^p(\Omega), \quad \varphi \in C_c^1(-\infty, 0). \tag{2.252}$$

Спрямуємо в тотожності (2.252) m до $+\infty$, беручи до уваги (2.245), (2.246), (2.251) та означення функції f_m. З отриманої інтегральної тотожності, використовуючи лему Дюбуа-Реймона, отримаємо тотожність (2.222). Далі, врахувавши (2.248), спрямуємо m до $+\infty$ в (2.243). З отриманої нерівності та умови (2.225), отримуємо умову (2.221). Отже, ми довели, що y – слабкий розв'язок задачі (2.219)–(2.221). З оцінки (2.244) та збіжностей (2.245)–(2.247) маємо оцінку (2.235). Оцінка (2.234) легко отримується з (2.243) та (2.248). ∎

Доведення леми 2.10. Для спрощення записів слабкий розв'язок y_m задачі (2.236)–(2.238), для довільного фіксованого $m \in \mathbb{N}$, позначатимемо через z.

Використаємо метод Гальоркіна. Нехай $\{w_l \,|\, l \in \mathbb{N}\}$ повна лінійно незалежна система функцій з $V^p(\Omega)$ така, що множина скінченних лінійних комбінацій цих функцій є щільної в $V^p(\Omega)$. Для кожного $r \in \mathbb{N}$ покладемо

$$z_r(x,t) = \sum_{k=1}^r c_{r,k}(t) w_k(x), \quad (x,t) \in \overline{Q_m},$$

де $c_{r,1}, \ldots, c_{r,r}$ абсолютно неперервні функції, що є розв'язком задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\int\limits_{\Omega_t} z_{r,t} w_l\, dx + \int\limits_{\Omega_t} \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_{r,x_j} w_{l,x_i} + c|z_r|^{p-2} z_r w_l - v z_r w_l \Big\}\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_t} f w_l\, dx, \quad t \in [-m, 0], \quad l = \overline{1,r}, \tag{2.253}$$

$$c_{r,l}(-m) = 0, \quad l = \overline{1,r}. \tag{2.254}$$

З лінійної незалежності функцій $w_1, \ldots, w_r$ випливає, що матриця $(b^r_{k,l})^r_{k,l=1}$ додатно визначена, де $b^r_{k,l} = \int_\Omega w_k w_l\, dx$ $(k, l = \overline{1,r})$. Отже, система звичайних диференціальних рівнянь (2.253) може бути зведена до нормальної форми. Тоді з відомих результатів (див. [65]) випливає існування глобального розв'язку $c_{r,1},\ldots.,c_{r,r}$ задачі (2.253), (2.254), визначеної на $[-m,\overline{t}\rangle$, де $\overline{t}\in(-m,0]$ і під "$\rangle$" розуміємо або "$)$", або "$]$". Пізніше буде встановлено, що $[-m,\overline{t}\rangle=[-m,0]$.

Домножимо рівняння з номером $l\in\{1,\ldots,r\}$ системи (2.253) на $e^{-2\lambda t}c_{r,l}$ та підсумуємо за $l\in\{1,\ldots,r\}$. Проінтегрувавши отриману рівність по $t\in[-m,\tau]\subset[-m,\overline{t}\rangle$, отримаємо

$$\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda t}z_{r,t}z_r\,dxdt+\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda t}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}z_{r,x_j}z_{r,x_i}+$$
$$+c|z_r|^p-v|z_r|^2\Big]\,dxdt=\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda t}fz_r\,dxdt. \tag{2.255}$$

З (2.255), використовуючи (2.254), нерівність Коші та формулу інтегрування частинами, отримуємо

$$\frac12\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda\tau}|z_r(x,\tau)|^2\,dx+\lambda\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda t}|z_r|^2\,dxdt+$$
$$+\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda t}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}z_{r,x_j}z_{r,x_i}+c|z_r|^p-v|z_r|^2\Big]\,dxdt\le \tag{2.256}$$
$$\le\frac{\varepsilon_1}{2}\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda t}|z_r|^2\,dxdt+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda t}|f|^2\,dxdt,\quad\tau\in[-m,\overline{t}\rangle,$$

де $\varepsilon_1>0$ – довільне число.

Оскільки $v(x,t)\le M$ для м. в. $(x,t)\in Q$, то використовуючи (2.218) та умову $(\mathcal{A})$, з (2.256), отримаємо

$$\frac12\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda\tau}|z_r(x,\tau)|^2\,dx+(\lambda-M+\mu K(1-\varepsilon_2)-\frac{\varepsilon_1}{2})\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda t}|z_r|^2\,dxdt+$$
$$+\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda t}\big[\varepsilon_2\mu|\nabla z_r|^2+c_0|z_r|^p\big]\,dxdt\le$$
$$\le\frac{1}{2\varepsilon_1}\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_{\Omega}e^{-2\lambda t}|f|^2\,dxdt,\quad\tau\in[-m,\overline{t}\rangle, \tag{2.257}$$

де $\varepsilon_2 \in (0,1)$ – довільне число.

Оскільки $\lambda > M - \mu K$, то можна легко вибрати $\varepsilon_1 > 0$ та $\varepsilon_2 \in (0,1)$ такі що $\lambda - M + \mu K(1-\varepsilon_2) - \frac{\varepsilon_1}{2} > 0$ (наприклад, $\varepsilon_2 = \frac{\lambda - M + \mu K}{4\mu K} > 0$ і $\varepsilon_1 = \frac{\lambda - M+\mu K}{2} > 0$). Звідси випливає нерівність:

$$\int\limits_\Omega e^{-2\lambda\tau}|z_r(x,\tau)|^2\,dx + C_3\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_\Omega e^{-2\lambda t}\big[|\nabla z_r|^2+|z_r|^2+|z_r|^p\big]\,dxdt \le \tag{2.258}$$

$$\le C_4\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_\Omega e^{-2\lambda t}|f|^2\,dxdt, \quad \tau\in[-m,\bar t\rangle,$$

де C_3, C_4 – додатні сталі, що не залежать від m та r.

З (2.258) отримуємо оцінки:

$$e^{-2\lambda\tau}\int\limits_\Omega|z_r(x,\tau)|^2\,dx \le C_1\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_\Omega e^{-2\lambda t}|f|^2\,dxdt, \quad \tau\in[-m,\bar t\rangle, \tag{2.259}$$

$$\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_\Omega e^{-2\lambda t}\big[|\nabla z_r|^2+|z_r|^2+|z_r|^p\big]\,dxdt \le$$

$$\le C_2\int\limits_{-m}^{\tau}\int\limits_\Omega e^{-2\lambda t}|f|^2\,dxdt, \quad \tau\in[-m,\bar t\rangle. \tag{2.260}$$

З оцінки (2.259) випливає, що для кожного $r\in\mathbb{N}$ маємо, що величина $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in[-m,\bar t\rangle}\|z_r(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ є скінченною і не залежить від $\bar t$. Це означає, що $[-m,\bar t\rangle = [-m,0]$.

Домножимо рівняння з номером $l\in\{1,\dots,r\}$ системи (2.253) на $e^{-2\lambda t}c'_{r,l}(t)$ та просумуємо за $l\in\{1,\dots,r\}$. Проінтегрувувавши $t\in[-m,0]$, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|z_{r,t}|^2\,dxdt + \iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}\Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}z_{r,x_j}z_{r,x_it} +$$

$$+c|z_r|^{p-2}z_rz_{r,t} - vz_rz_{r,t}\Big]\,dxdt = \iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}fz_{r,t}\,dxdt. \tag{2.261}$$

З (2.261), використовуючи (2.254), формулу інтегрування частинами та те, що у нашому випадку

$$|z_r|^{p-2}z_rz_{r,t} = \frac{1}{p}(|z_r|^p)_t,$$

маємо

$$\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|z_{r,t}|^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_{r,x_j}(x,0) z_{r,x_i}(x,0)\,dx +$$

$$+\lambda \iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_{r,x_j} z_{r,x_i}\,dxdt + \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} c(x)|z_r(x,0)|^p\,dx$$

$$+\frac{2\lambda}{p}\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t} c|z_r|^p\,dxdt = \iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t} f z_{r,t}\,dxdt + \iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t} v z_r z_{r,t}\,dxdt. \quad (2.262)$$

Використовуючи умови $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{C})$ та нерівність Коші, з (2.262) отримуємо

$$\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|z_{r,t}|^2\,dxdt + \lambda\mu \iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|\nabla z_r|^2\,dxdt +$$

$$+\frac{2\lambda c_0}{p}\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|z_r|^p\,dxdt \le \frac{1}{2\varepsilon_4}\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|f|^2\,dxdt +$$

$$+\frac{M}{2\varepsilon_3}\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|z_r|^2\,dxdt + \Big(\frac{\varepsilon_3 M}{2} + \frac{\varepsilon_4}{2}\Big)\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|z_{r,t}|^2\,dxdt. \quad (2.263)$$

З (2.263) та (2.260), та взявши $\varepsilon_3 > 0$ і $\varepsilon_4 > 0$ такі, що $1 - \frac{\varepsilon_3 M}{2} - \frac{\varepsilon_4}{2} > 0$, отримуємо оцінку

$$\iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|z_{r,t}|^2\,dxdt \le C_5 \iint\limits_{Q_m} e^{-2\lambda t}|f|^2\,dxdt, \quad (2.264)$$

де $C_5 > 0$ – стала, що не залежить від m та r.

З оцінок (2.259), (2.260) і (2.264) випливає, що послідовність $\{z_r\}_{r=1}^{\infty}$ обмежена в просторах $L^2(-m,0;H_0^1(\Omega))$, $L^\infty(-m,0;L^2(\Omega))$ та $L^p(-m,0;L^p(\Omega))$, а $z_{r,t}$ обмежена в $L^2(-m,0;L^2(\Omega))$. Отже, беручи до уваги твердження 2.1, отримуємо існування підпослідовності $\{z_r\}_{r=1}^{\infty}$ та функції $z \in L^2(-m,0;H_0^1(\Omega))$

$\cap L^\infty(-m,0;L^2(\Omega))\cap L^p(-m,0;L^p(\Omega))$ такої, що $z_t\in L^2(-m,0;L^2(\Omega))$ і

$$z_r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} z \quad \text{слабко в} \quad L^2(-m,0;H_0^1(\Omega)), \tag{2.265}$$

$$z_{r,t} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} z_t \quad \text{слабко в} \quad L^2(-m,0;L^2(\Omega)), \tag{2.266}$$

$$z_r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} z \quad \text{слабко в} \quad L^p(-m,0;L^p(\Omega)), \tag{2.267}$$

$$z_r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} z \quad \text{сильно в} \quad L^2(Q_m) \text{ та в } C([-m,0];L^2(\Omega)), \tag{2.268}$$

$$z_r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} z \quad \text{м.в. в} \ \ Q, \tag{2.269}$$

$$|z_r|^{p-2}z_r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} |z|^{p-2}z \quad \text{слабко в} \quad L_\lambda^{p'}(Q). \tag{2.270}$$

З (2.269), (2.270), аналогічно як з (2.251), маємо збіжності

$$\iint\limits_{Q_m} c|z_r|^{p-2}z_r\psi\varphi\,dxdt \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_{Q_m} c|z|^{p-2}z\psi\varphi\,dxdt. \tag{2.271}$$

Нехай $\nu_1,...,\nu_k$ $(k\in\mathbb{N})$ – довільні дійсні числа і $\varphi\in C_c^1(-m,0)$ – довільна функція. Для кожного $j\in\{1,...,k\}$ домножуємо рівняння з номером $j\in\{1,\ldots,r\}$ системи (2.253) на ν_j, підсумуємо отримані рівності та переходимо до границі при $r\to\infty$. У результаті, позначивши $\psi=\sum\limits_{j=1}^{k}\nu_jw_j$ та проінтегрувавши отриману рівність по $t\in[-m,0]$, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_m} z_t\psi\varphi\,dxdt+\iint\limits_{Q_m}\Big\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}z_{x_j}\psi_{x_i}+c|z|^{p-2}z\psi-vz\psi\Big\}\varphi\,dxdt=$$
$$=\iint\limits_{Q_m} f\psi\varphi\,dxdt \quad \forall\,\varphi\in C_c^1(-m,0). \tag{2.272}$$

Оскільки множина $\{\nu_1w_1+...+\nu_kw_k\,\big|\,k\in\mathbb{N},\nu_1,...,\nu_k\in\mathbb{R}\}$ є щільною в $V^p(\Omega)$, то з (2.272) випливає рівність

$$\iint\limits_{Q_m} z_t\psi\varphi\;dxdt+\iint\limits_{Q_m}\Big\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}z_{x_i}\psi_{x_j}+c|z|^{p-2}z\psi-vz\psi\Big\}\varphi\,dxdt=$$
$$=\iint\limits_{Q_m} f\psi\varphi\,dxdt, \quad \psi\in V^p(\Omega), \quad \varphi\in C_c^1(-m,0). \tag{2.273}$$

Використавши лему Дюбуа-Реймона, одержуємо рівність (2.239). Отже, ми показали, що задача (2.236)–(2.238) має розв'язок $z=y_m$. З (2.259), (2.260) та (2.264), беручи до уваги (2.265) – (2.268), отримуємо, що функція y_m задовольняє оцінки (2.240), (2.241). ∎

2.3.4 Доведення теореми 2.6

Нехай $\{v_k\}$ – послідовність елементів з U_∂ така, що $J(v_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sup\limits_{v\in U_\partial} J(v)$. Послідовність $\{v_k\}$ обмежена в $L^\infty(Q)$, тобто,

$$0 \le v_k(x,t) \le M \quad \text{для м.в.} \quad (x,t) \in Q. \tag{2.274}$$

Оскільки для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $y_k := y(v_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ є слабким розв'язком задачі (2.219)–(2.221) при $v = v_k$, то виконується тотожність:

$$\iint\limits_Q \Big\{ y_{k,t}\psi\varphi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_{k,x_j}\psi_{x_i}\varphi + (c|y_k|^{p-2}y_k - v_k y_k)\psi\varphi \Big\}\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q f\psi\varphi\, dxdt, \quad \psi \in V^p(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(-\infty,0). \tag{2.275}$$

З теореми 2.7 маємо оцінки

$$e^{-2\lambda t}\|y_k(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_1 \int\limits_{-\infty}^t e^{-2\lambda s}\|f(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds,\ t \in S, \tag{2.276}$$

$$\|y_k\|^2_{L^2_\lambda(S;H_0^1(\Omega))} + \|y_{k,t}\|^2_{L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))} + \|y_k\|^p_{L^p_\lambda(S;L^p(\Omega))} \le C_2\|f\|^2_{L^2_\lambda(S;L^p(\Omega))}. \tag{2.277}$$

Беручи до уваги оцінку (2.277) для довільних $\tau_1, \tau_2 \in S$ $(\tau_1 < \tau_2)$, отримуємо

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \|y_{k,t}\|^2_{L^2(\Omega_t)}\, dt \le C_6 \quad \forall\ k \in \mathbb{N}, \tag{2.278}$$

де $C_6 > 0$ – стала, що залежить від τ_1 і τ_2, але не залежить від k.

З того, що $\rho \in L^1(Q)$, використовуючи (2.274), одержуємо, що послідовність $\{\sqrt{\rho} v_k\}_{k=1}^\infty$ обмежена в $L^2(Q)$. Оскільки $V^p(\Omega) \circlearrowright H_0^1(\Omega) \overset{K}{\subset} L^2(\Omega)$ (див. [26, с. 245]), то $V^p(\Omega) \overset{K}{\subset} L^2(\Omega)$. З твердження 2.1 при $\mathcal{W} = V^p(\Omega)$, $\mathcal{L} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{B} = L^2(\Omega)$, $q = 2$, $r = 2$, з оцінок (2.274), (2.277), (2.278) випливає існування підпослідовності послідовності $\{v_k, y_k\}$ (за нею збережемо позначення $\{v_k, y_k\}$) та функцій $u \in U_\partial$, $\zeta \in L^2(Q)$, $y \in L^2_\lambda(S; H_0^1(\Omega)) \cap$

$L^p_\lambda(S;L^p(\Omega))$, $y_t\in L^2_\lambda(S;L^2(\Omega))$, таких, що

$$v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(Q), \tag{2.279}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{слабко в} \quad L^2_\lambda(S;H^1_0(\Omega)), \tag{2.280}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{слабко в} \quad L^p_\lambda(S;L^p(\Omega)), \tag{2.281}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{в} \quad C(S;L^2(\Omega)) \quad \text{та сильно в} \quad L^2_{\rm loc}(S;L^2(\Omega)), \tag{2.282}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{м. в. в} \quad Q, \tag{2.283}$$

$$y_{k,t} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_t \quad \text{слабко в} \quad L^2_\lambda(S;L^2(\Omega)) \tag{2.284}$$

$$|y_k| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |y| \quad \text{слабко в} \quad L^2_\lambda(S;L^2(\Omega)). \tag{2.285}$$

Зауважимо, що з (2.280) випливає

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y, \quad y_{k,x_i} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_{x_i} \ (i=\overline{1,n}) \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\rm loc}(S;L^2(\Omega)). \tag{2.286}$$

Як у (2.271), з (2.277), (2.282) та [15, лема 2.2] отримуємо

$$c|y_k|^{p-2}y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} c|y|^{p-2}y \quad \text{слабко в} \quad L^{p'}_{\rm loc}(\overline{Q}). \tag{2.287}$$

Покажемо, що з (2.279) та (2.282) випливає

$$\iint\limits_Q y_k v_k \psi\varphi\, dxdt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_Q yu\psi\varphi\, dxdt \quad \forall\, \psi\in V^p(\Omega), \forall\, \varphi\in C^1_c(-\infty,0). \tag{2.288}$$

Справді, нехай $g:=\psi\varphi$, а $t_1,t_2\in S$ такі, що $\operatorname{supp}\varphi\subset[t_1,t_2]$. Тоді маємо

$$\iint\limits_Q y_k v_k g\, dxdt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega (y_k v_k - yv_k + yv_k) g\, dxdt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega y v_k g\, dxdt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega (y_k - y) v_k g\, dxdt. \tag{2.289}$$

З (2.274) та (2.282) випливає

$$\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega (y_k-y)v_k g\, dxdt\Big| \le \Big(\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega |v_k g|^2\, dxdt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega |y_k-y|^2\, dxdt\Big)^{1/2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.290}$$

Отже, використовуючи (2.279) та (2.290), з (2.289) маємо (2.288).

Використавши (2.286) та (2.288) і спрямувавши k до $+\infty$ в (2.275), отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ y_t\psi\varphi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_{x_i}\psi_{x_j}\varphi + (c|y|^{p-2}y - uy)\psi\varphi \Big\}\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q f\psi\varphi\, dxdt \quad \forall\,\psi \in V^p(\Omega) \quad \forall\,\varphi \in C_c^1(-\infty, 0). \qquad (2.291)$$

На підставі леми Дюбуа-Реймона з тотожності (2.291) отримаємо, що функція $y = y(u)$ задовольняє інтегральну тотожність (2.222). Покажемо, що y задовольняє умову (2.221).

Маючи на увазі (2.282), перейдемо до границі в (2.276) при $k \to \infty$. З отриманої нерівності, врахувавши умову (2.225), отримаємо

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-2\lambda t} \int\limits_\Omega |y(x,t)|^2\, dx = 0. \qquad (2.292)$$

Отже, ми показали, що $y = y(u) = y(x,t;u)$, $(x,t) \in Q$, – стан керованої системи для керування u.

Залишається довести, що u максимізуючий елемент функціоналу J. Справді, з (2.279) отримуємо

$$\sqrt{\rho} v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\rho} u \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q). \qquad (2.293)$$

На підставі [59, с. 58, твердження 3.5] отримуємо

$$\varliminf_{k\to\infty} \|\sqrt{\rho} v_k\|^2_{L^2(Q)} \ge \|\sqrt{\rho} u\|^2_{L^2(Q)}. \qquad (2.294)$$

Можна переконатися, що функціонал $w \mapsto \iint\limits_Q w\, dxdt : L^2_\lambda(S; L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}$ коректно визначений. Справді,

$$\Big| \iint\limits_Q w\, dxdt \Big| \le \iint\limits_Q |w|\, dxdt = \iint\limits_Q e^{-\lambda t} e^{\lambda t} |w|\, dxdt \le$$

$$\le \Big(\iint\limits_Q e^{-2\lambda t} |w|\, dxdt \Big)^{1/2} \Big(\iint\limits_Q e^{2\lambda t}\, dxdt \Big)^{1/2} = C_7 \|w\|_{L^2_\lambda(S; L^2(\Omega))}, \qquad (2.295)$$

де $C_7 > 0$ – деяка стала. Позначимо цей функціонал через $\mathbb{I}$. Він належить до $\big(L^2_\lambda(S; L^2(\Omega))\big)'$. Справді, лінійність $\mathbb{I}$ очевидна. З оцінки (2.295) випливає, що $\mathbb{I}$ обмежений. Отже, з (2.285) маємо:

$$\iint\limits_Q |y_k|\,dxdt = \langle \mathbb{I}, |y_k| \rangle \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle \mathbb{I}, |y| \rangle = \iint\limits_Q |y|\,dxdt. \tag{2.296}$$

З (2.223), (2.294) та (2.296) легко випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} J(v_k) = \lim_{k\to\infty}\Big[\iint\limits_Q |y_k|\,dxdt - \iint\limits_Q \rho|v_k|^2\,dxdt\Big] \le$$

$$\le \lim_{k\to\infty}\iint\limits_Q |y_k|\,dxdt - \varliminf_{k\to\infty}\|\sqrt{\rho}v_k\|^2_{L^2(Q)} \le \iint\limits_Q |y|\,dxdt - \|\sqrt{\rho}u\|^2_{L^2(Q)} = J(u).$$

Отже, ми показали, що u – розв'язок задачі (2.224).

Покажемо, що множина оптимальних керувань задачі (2.224) є $*$-слабко замкненою. Справді, нехай $\{u_k\}$ – послідовність оптимальних керувань, тобто, $J(u_k) = \sup\limits_{v\in U_\partial} J(v)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, така, що $u_k \to u$ $*$-слабко в $L^\infty(Q)$. Аналогічно, як було зроблено вище, показуємо, що $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) \le J(u)$. Отже, u є оптимальним керуванням задачі (2.224).

Висновки до розділу 2

У розділі 2 знайдено достатні, а в одному з випадків і необхідні, умови існування розв'язків задач оптимального керування системами, стани яких описуються слабкими розв'язками задач без початкових умов для слабко та сильно нелінійних параболічних рівнянь з керуваннями у коефіцієнтах.

Розділ 3

Оптимальне керування в задачах без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей

У цьому розділі досліджено задачі оптимального керування процесами, які моделюються задачами без початкових умов для слабко та сильно нелінійних варіаційних нерівностей.

Матеріали розділу викладено в працях [11, 55].

3.1 Слабко нелінійні варіаційні нерівності з керуваннями у коефіцієнтах

3.1.1 Основні позначення та допоміжні факти

Нехай $S := (-\infty, 0]$. Під V і H розумітимемо сепарабельні гільбертові простори, відповідно, зі скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)$ і нормами $\|\cdot\|$, $|\cdot|$. Припускатимемо, що простір V вкладається в H щільно, неперервно і компактно, тобто, V є підмножиною H, замикання V в H збігається з H, існує стала $\lambda > 0$ така, що

$$\lambda |v|^2 \leqslant \|v\|^2 \quad \forall v \in V, \tag{3.1}$$

і для будь-якої обмеженої послідовності $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ в V існує елемент $w \in V$ і підпослідовність $\{w_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що $w_{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w$ сильно в H.

Нехай V' і H' спряжені, відповідно, до V та H простори. Вважатимемо, провівши відповідне ототожнення функціоналів, що простір H' є підпростором простору V'. Ототожнивши на підставі теореми Ріса простори H і H', отримаємо неперервні та щільні вкладення

$$V \subset H \subset V'. \tag{3.2}$$

Зауважимо,, що в даному випадку $\langle g, v\rangle_V = (g, v)$ для будь-яких $v \in V, g \in H$, де $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ означає дію елемента з V' на елемент з V (канонічний добуток на $V \times V'$). Тому далі вживатимемо позначення $(\cdot, \cdot)$ замість $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. Також використовуватимемо позначення $\| \cdot \|_*$ для норми в V'. Зауважимо, що

$$\lambda \|h\|_*^2 \leqslant |h|^2 \quad \forall h \in H, \tag{3.3}$$

де λ — стала з нерівності (3.1). Справді, на підставі (3.1) маємо

$$\|h\|_* = \sup_{v \in V, \|v\|=1} |(h, v)| \leqslant \sup_{v \in V, \|v\|=1} |h||v| \leqslant \lambda^{-1/2} |h|.$$

Введемо потрібні нам простори функцій і розподілів. Нехай X — довільний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_X$ і нормою $\| \cdot \|_X$. Через $C(S; X)$ позначатимемо простір визначених і неперервних на S зі значеннями в X функцій. Будемо говорити, що послідовність $z_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} z$ в $C(S; X)$, якщо для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ маємо $\|z - z_m\|_{C([t_1,t_2];X)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Нехай $q \in [1, \infty]$, q' — спряжене до q, тобто, $1/q + 1/q' = 1$. Під $L^q_{\text{loc}}(S; X)$ розумітимемо лінійний простір визначених і вимірних на S зі значеннями в X функцій таких, що для будь-яких $t_1, t_2 \in S\,(t_1 < t_2)$ їх звуження на відрізок $[t_1, t_2] \subset S$ належать простору $L^q(t_1, t_2; X)$. Будемо говорити, що послідовність $\{z_m\}$ обмежена (відповідно, збігається до z сильно, слабко чи $*$-слабко) в $L^q_{\text{loc}}(S; X)$, якщо для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ послідовність звужень членів послідовності $\{z_m\}$ на відрізок $[t_1, t_2]$ обмежена відповідно, збігається до звуження z на цей відрізок сильно (відповідно, слабко чи $*$-слабко) в $L^q(t_1, t_2; X)$.

Нехай $\nu \in \mathbb{R}$. Визначимо

$$L^2_\nu(S; X) := \Big\{ f \in L^2_{\text{loc}}(S; X) \;\Big|\; \int_S e^{-2\nu t} \|f(t)\|_X^2 dt < \infty \Big\}.$$

Даний простір є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(f, g)_{L^2_\nu(S;X)} = \int_S e^{-2\nu t} (f(t), g(t))_X \, dt$$

та нормою

$$\|f\|_{L^2_\nu(S;X)} := \Big(\int\limits_S e^{-2\nu t} \|f(t)\|_X^2 \, dt \Big)^{1/2}.$$

Також введемо простір $L^\infty_\nu(S;X) := \{ f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;X) \mid \operatorname*{ess\,sup}_{t\in S} \big[e^{-\nu t}\|f(t)\|_X \big] < \infty \}$.

Під $D'(-\infty,0;V'_w)$ розумітимемо простір визначених на $D(-\infty,0)$ зі значеннями в V'_w розподілів, тобто, простір лінійних неперервних функціоналів на $D(-\infty,0)$ зі значеннями в V'_w (тут і далі $D(-\infty,0)$ — простір нескінченно диференційовних і фінітних на $(-\infty,0)$ функцій з відповідною топологією, V'_w — лінійний простір V' зі слабкою топологією). Легко переконатися (див. (3.2)), що простори $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V)$, $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$, $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$ можна ототожнити з відповідними підпросторами $D'(-\infty,0;V'_w)$. Це, зокрема, дозволяє говорити про похідні z' функцій z з $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V)$ чи $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ у сенсі розподілів $D'(-\infty,0;V'_w)$ і належності цих похідних до $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ чи $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$.

Введемо ще простори

$$H^1_{\mathrm{loc}}(S;H) := \{ z \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H) \,\big|\, z' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H) \},$$

$$W_{2,\mathrm{loc}}(S;V) := \{ z \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V) \,\big|\, z' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V') \}. \tag{3.4}$$

З відомих результатів (див., наприклад, [15, с. 177-179]) легко випливає, що $H^1_{\mathrm{loc}}(S;H) \subset C(S;H)$ і $W_{2,\mathrm{loc}}(S;V) \subset C(S;H)$. Більше того, для довільної функції z з $W_{2,\mathrm{loc}}(S;V)$ чи з $H^1_{\mathrm{loc}}(S;H)$ функція $t \to |z(t)|^2$ є абсолютно неперервною на будь-якому відрізку променя S та виконується нерівність

$$\frac{d}{dt}|z(t)|^2 = 2(z'(t), z(t)) \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S. \tag{3.5}$$

Позначимо

$$H^1_\nu(S;H) := \{ z \in L^2_\nu(S;H) \,\big|\, z' \in L^2_\nu(S;H) \}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

В цьому підрозділі використовуватимемо такі відомі факти.

Твердження 3.2 (нерівність Гельдера [15, с. 158]). *Нехай* t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$ *і* X *— гільбертів простір зі скалярним добутком* $(\cdot,\cdot)_X$. *Тоді, якщо* $v \in L^2(t_1,t_2;X)$ *і* $w \in L^2(t_1,t_2;X)$, *то* $(w(\cdot),v(\cdot))_X \in L^1\big(t_1,t_2\big)$ *і*

$$\int_{t_1}^{t_2} (w(t),v(t))_X \, dt \leqslant \|w\|_{L^2(t_1,t_2;X)} \|v\|_{L^2(t_1,t_2;X)}.$$

Твердження 3.3 ([20, с. 173,179]). *Нехай Y — банахів простір з нормою $\|\cdot\|_Y$, і $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність елементів простору Y, яка слабко чи $*$-слабко збігається до v в Y. Тоді* $\varliminf\limits_{k\to\infty}\|v_k\|_Y \geqslant \|v\|_Y$.

Твердження 3.4. *Якщо послідовність $\{z_m\}$ є обмеженою у просторі $L^2_{\rm loc}(S;V)$, послідовність $\{z'_m\}$ є обмеженою у просторі $L^2_{\rm loc}(S;H)$, то існують функція $z\in L^2_{\rm loc}(S;V)$, $z'\in L^2_{\rm loc}(S;H)$, і підпослідовність $\{z_{m_j}\}$ послідовності $\{z_m\}$ такі, що $z_{m_j}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$ в $C(S;H)$ і слабко в $L^2_{\rm loc}(S;V)$, а також, $z'_{m_j}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z'$ слабко в $L^2_{\rm loc}(S;H)$.*

Доведення. З твердження 2.1 при $q=2$, $r=2$, $\mathcal{W}=V$, $\mathcal{L}=\mathcal{B}=H$ випливає, що для будь-яких $t_1,t_2\in S$ $(t_1<t_2)$ з послідовності звужень членів послідовності $\{z_m\}$ на відрізок $[t_1,t_2]$ можна вибрати підпослідовність, яка збігається в $C([t_1,t_2];H)$ і слабко в $L^2(t_1,t_2;V)$, а послідовність похідних членів цієї підпослідовності збігається слабко в $L^2(t_1,t_2;H)$. Для кожного $k\in\mathbb{N}$ виберемо підпослідовність $\{z_{m_{(k,j)}}\}_{j=1}^{\infty}$ даної послідовності, яка збігається в $C([-k,0];H)$ і слабко в $L^2(-k,0;V)$ до деякої функції $\widehat{z}_k\in C([-k,0];H)\cap L^2(-k,0;V)$, а послідовність $\{z'_{m_{(k,j)}}\}_{j=1}^{\infty}$ слабко збігається до її похідної $\widehat{z}'_k$ в $L^2(-k,0;H)$. При цьому виборі стежимо за тим, щоб послідовність $\{z_{m_{(k+1,j)}}\}_{j=1}^{\infty}$ була підпослідовністю послідовності $\{z_{m_{(k,j)}}\}_{j=1}^{\infty}$. Тепер згідно з діагональним процесом вибираємо потрібну нам підпослідовність у вигляді $\{z_{m_{(j,j)}}\}_{j=1}^{\infty}$, а функцію z визначимо за правилом: для кожного $k\in\mathbb{N}$ приймаємо $z(t):=\widehat{z}_k(t)$ для $t\in(-k,-k+1]$. ∎

3.1.2 Коректність задачі без початкових умов для слабко нелінійних варіаційних нерівностей

Нехай $\Phi: V\to(-\infty,+\infty]$ – власний функціонал, тобто, $\mathrm{dom}(\Phi):=\{v\in V:\ \Phi(v)<+\infty\}\neq\emptyset$, що задовольняє умови:

$$(\mathcal{A}_1)\qquad \Phi\big(\alpha v+(1-\alpha)w\big)\leqslant \alpha\Phi(v)+(1-\alpha)\Phi(w)\quad \forall\, v,w\in V,\ \forall\,\alpha\in[0,1],$$

тобто, функціонал Φ є *опуклим*,

$$(\mathcal{A}_2)\qquad v_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v \text{ in } V\quad\Longrightarrow\quad \varliminf_{k\to\infty}\Phi(v_k)\geq\Phi(v),$$

тобто, функціонал Φ є *напівнеперервним знизу.*

Нагадаємо, що *субдиференціалом* функціоналу Φ називають відображення $\partial\Phi : V \to 2^{V'}$, визначене так:

$$\partial\Phi(v) := \{v^* \in V' \mid \Phi(w) \geqslant \Phi(v) + (v^*, w - v) \quad \forall\, w \in V\}, \quad v \in V,$$

а *область визначення* субдиференціалу $\partial\Phi$ – множину $D(\partial\Phi) := \{v \in V \,|\, \partial\Phi(v) \neq \varnothing\}$. Ототожнюємо субдиференціал $\partial\Phi$ з його графіком, припускаючи, що $[v, v^*] \in \partial\Phi$ тоді і тільки тоді, коли $v^* \in \partial\Phi(v)$, тобто, $\partial\Phi = \big\{[v, v^*] \mid v \in D(\partial\Phi),\ v^* \in \partial\Phi(v)\big\}$. Р. Рокафеллар [94, теорема A] довів, що субдиференціал $\partial\Phi$ є *максимально монотонним оператором*, тобто,

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant 0 \quad \forall\, [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi$$

і для кожного елементу $[v_1, v_1^*] \in V \times V'$ маємо імплікацію

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant 0 \quad \forall\, [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi \quad \Longrightarrow \quad [v_1, v_1^*] \in \partial\Phi.$$

Додатково припускаємо, що виконуються такі умови:

$(\mathcal{A}_3)$ існує стала $K_1 > 0$ така, що

$$\Phi(v) \geqslant K_1\|v\|^2 \quad \forall\, v \in \mathrm{dom}(\Phi);$$

крім того, $\Phi(0) = 0$;

$(\mathcal{A}_4)$ існує стала $K_2 > 0$ така, що

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant K_2|v_1 - v_2|^2 \quad \forall\, [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi.$$

Зауваження 3.1. *З умови* $(\mathcal{A}_3)$ *випливає, що* $\Phi(v) \geq \Phi(0) + (0, v - 0)$ $\forall v \in V$*, звідси маємо* $0 \in \partial\Phi(0)$*. Звідси та умови* $(\mathcal{A}_4)$ *отримаємо*

$$(v^*, v) \geq K_2|v|^2 \quad \forall\, [v, v^*] \in \partial\Phi. \tag{3.6}$$

Розглянемо еволюційну варіаційну нерівність

$$y'(t) + \partial\Phi\big(y(t)\big) + u(t)y(t) \ni f(t), \quad t \in S, \tag{3.7}$$

де $f : S \to V'$ і $u : S \to \mathbb{R}$ – задані вимірні функції.

Означення 3.1. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$ *і* $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S)$, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$. *Функція* y *називається* розв'язком *варіаційної нерівності* (3.7), *якщо вона задовольняє умови:*

1) $y \in W_{2,\mathrm{loc}}(S;V)$;

2) $y(t) \in D(\partial\Phi)$ *для м.в.* $t \in S$;

3) *існує функція* $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$ *така, що для м.в.* $t \in S$ *маємо* $g(t) \in \partial\Phi\big(y(t)\big)$ *і*

$$y'(t) + g(t) + u(t)y(t) = f(t) \quad \text{в } V'.$$

Для варіаційної нерівності (3.7) розглянемо задачу: знайти розв'язок, що задовольняє умову

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-\gamma t}|y(t)| = 0, \tag{3.8}$$

де $\gamma \in \mathbb{R}$ – задане.

Задачу на знаходження розв'язку варіаційної нерівності (3.7) для заданих Φ, u, f, що задовольняє (3.8) для заданого γ, називають задачею без початкових умов для еволюційної варіаційної нерівності (3.7), яку коротко називатимемо задачею $\mathbf{P}(\Phi,u,f,\gamma)$, а функцію y — її розв'язком.

Зауваження 3.2. *Задача* $\boldsymbol{P}(\Phi,u,f,\gamma)$ *є частковим випадком такої задачі. Нехай* K *– опукла замкнена множина в* V, $A : V \to V'$ *– монотонний, обмежений та семінеперервний оператор такий, що* $(A(v),v) \geq \widetilde{K}_1\|v\|^2 \quad \forall v \in V$, *де* $\widetilde{K}_1 = const > 0$. *Задача полягає у знаходженні функції* $y \in W_{2,\mathrm{loc}}(S;V)$, *що задовольняє умову* (3.8) *і для м.в.* $t \in S$:

$$y(t) \in K \quad \text{і} \quad (y'(t) + A(y(t)) + u(t)y(t), v - y(t)) \geq (f(t), v - y(t)) \quad \forall\, v \in K.$$

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_4)$. *Припустимо, що*

$$(\mathcal{F}) \qquad -\infty < \widetilde{m} := \operatorname*{ess\,inf}_{t\in S} u(t) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{t\in S} u(t) =: \widetilde{M} < +\infty\,, \qquad f \in L^2_\gamma(S;H)\,,$$

де $\gamma \in \mathbb{R}$ — *стала, що задовольняє нерівність*

$$K_2 + \widetilde{m} + \gamma > 0. \tag{3.9}$$

Тоді задача $\boldsymbol{P}(\Phi, u, f, \gamma)$ *має єдиний розв'язок, він належить простору* $L^\infty_\gamma(S;V) \cap L^2_\gamma(S;V) \cap H^1_\gamma(S;H)$ *і задовольняє оцінку:*

$$e^{-2\gamma\tau}\|y(\tau)\|^2 + \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}\|y(t)\|^2\,dt + \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|y'(t)|^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f(t)|^2\,dt, \quad \tau \in S, \tag{3.10}$$

де $C_1 > 0$ *— стала, яка залежить тільки від* K_1, K_2, γ, λ, $\widetilde{m}$ *і* $\widetilde{M}$.

Перед доведенням теореми 3.1 наведемо допоміжні твержєення.

Визначимо функціонал $\Phi_H : H \to \mathbb{R}_\infty$ за правилом: $\Phi_H(v) := \Phi(v)$, якщо $v \in V$, і $\Phi_H(v) := +\infty$ в іншому випадку. Зазначимо, що умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, лема IV.5.2 і твердження IV.5.2 монографії [96] гарантують, що Φ_H є власним, опуклим і напівнеперервним знизу функціоналом на H, $\mathrm{dom}(\Phi_H) = \mathrm{dom}(\Phi) \subset V$ і $\partial\Phi_H = \partial\Phi \cap (V \times H)$, де $\partial\Phi_H : H \to 2^H$ є субдиференціалом функціоналу Φ_H. Крім того, з умови $(\mathcal{A}_3)$ випливає, що $0 \in \partial\Phi_H(0)$.

Твердження 3.5 ([96, лема IV.4.3]). *Припустимо, що* $z \in H^1(a,b;H)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ *та існує* $g \in L^2(a,b;H)$ *така, що* $g(t) \in \partial\Phi_H\big(z(t)\big)$ *для майже всіх* $t \in (a,b)$. *Тоді функція* $\Phi_H\big(z(\cdot)\big)$ *є абсолютно неперервною на* $[a,b]$ *і для довільної функції* $h : [a,b] \to H$ *такої, що* $h(t) \in \partial\Phi_H\big(z(t)\big)$ *для майже всіх* $t \in (a,b)$, *виконується рівність*

$$\frac{d}{dt}\Phi_H\big(z(t)\big) = (h(t), z'(t)) \quad \textit{для майже всіх} \quad t \in (a,b).$$

Твердження 3.6 ([60, твердження 3.12], [96, твердження IV.5.2]). *Нехай* $T > 0$, $\widetilde{f} \in L^2(0,T;H)$ *і* $z_0 \in \mathrm{dom}(\Phi)$. *Тоді існує єдина функція* $z \in H^1(0,T;H)$ *така, що* $z(0) = z_0$ *і для майже всіх* $t \in (0,T)$ *маємо* $z(t) \in D(\partial\Phi_H)$ *і*

$$z'(t) + \partial\Phi_H\big(z(t)\big) \ni \widetilde{f}(t) \quad \textit{в } H. \tag{3.11}$$

Твердження 3.7. *Нехай* $T > 0$, $\widetilde{f} \in L^2(0,T;H), \widetilde{u} \in L^\infty(0,T)$ *і* $z_0 \in \mathrm{dom}(\Phi_H)$. *Тоді існує єдина функція* $z \in H^1(0,T;H)$ *така, що* $z(0) = z_0$ *і для майже всіх* $t \in (0,T)$ *маємо* $z(t) \in D(\partial\Phi_H)$ *і*

$$z'(t) + \partial\Phi_H\big(z(t)\big) + \widetilde{u}(t)z(t) \ni \widetilde{f}(t) \quad \textit{в } H. \tag{3.12}$$

Доведення. Нехай $\alpha > 0$ — довільне фіксоване число і нехай

$$\rho(z_1, z_2) = \max_{t\in[0,T]} \left[e^{-\alpha t}|z_1(t) - z_2(t)|\right], \quad z_1, z_2 \in C([0,T]; H),$$

— метрика на $C([0,T]; H)$. Очевидно, що простір $C([0,T]; H)$ з цією метрикою є повним. Розглянемо оператор $A : C([0,T]; H) \to C([0,T]; H)$ визначений за правилом: для довільної заданої функції $\widetilde{z} \in C([0,T]; H)$ визначимо функцію $\widehat{z} \in H^1(0,T; H) \subset C([0,T]; H)$ таку, що $\widehat{z}(0) = z_0$ і для майже всіх $t \in (0,T)$ виконується включення $\widehat{z}(t) \in D(\Phi_H)$ і

$$\widehat{z}\,'(t) + \partial\Phi_H(\widehat{z}(t)) \ni \widetilde{f}(t) - \widetilde{u}(t)\widetilde{z}(t) \quad \text{в} \quad H. \tag{3.13}$$

Очевидно, що варіаційна нерівність (3.13) тотожня варіаційній нерівності (3.11) після заміни $\widetilde{f}$ на $\widetilde{f} - \widetilde{u}\widetilde{z}$. Отже, використавши твердження 3.6 ми отримуємо, що оператор A є коректно визначений. Покажемо, що оператор A є стискуючим. Справді, нехай $\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2$ — довільні функції з $C([0,T]; H)$ і $\widehat{z}_1 := A\widetilde{z}_1$, $\widehat{z}_2 = A\widetilde{z}_2$. Згідно з (3.13) існують функції $\widetilde{g}_1$ і $\widetilde{g}_2$ з $L^2(0,T; H)$ такі, що для кожного $k \in \{1,2\}$ і для майже всіх $t \in (0,T)$ матимемо, що $\widetilde{g}_k(t) \in \partial\Phi_H(\widehat{z}_k(t))$ і

$$\widehat{z}_k'(t) + \widetilde{g}_k(t) = \widetilde{f}(t) - \widetilde{u}(t)\widetilde{z}_k(t), \tag{3.14}$$

причому $\widehat{z}_k(0) = z_0$.

Віднімаємо тотожність (3.14) при $k = 2$ від тотожності (3.14) при $k = 1$, і помножимо, для майже всіх $t \in (0,T)$, отриману тотожність на $\widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t)$. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \big((\widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t))', \widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t)\big) + (\widetilde{g}_1(t) - \widetilde{g}_2(t), \widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t)) = \\ = -\widetilde{u}(t)(\widetilde{z}_1(t) - \widetilde{z}_2(t), \widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t)) \quad \text{для м.в.} \quad t \in (0,T), \\ \widehat{z}_1(0) - \widehat{z}_2(0) = 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Проінтегруємо рівність (3.15) за змінною t від 0 до $\tau \in (0,T]$, беручи до уваги, що для м.в. $t \in (0,T)$ маємо

$$\big((\widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t))', \widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t)\big) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\widehat{z}_1(t) - \widehat{z}_2(t)|^2.$$

У результаті отримаємо

$$\frac{1}{2}|\widehat{z}_1(\tau)-\widehat{z}_2(\tau)|^2+\int_0^\tau (\widetilde{g}_1(t)-\widetilde{g}_2(t),\widehat{z}_1(t)-\widehat{z}_2(t))\,dt=$$
$$=-\int_0^\tau \widetilde{u}(t)(\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t),\widehat{z}_1(t)-\widehat{z}_2(t))\,dt. \qquad (3.16)$$

Зважаючи на умову $(\mathcal{A}_4)$, для м.в. $t\in(0,T)$ маємо нерівність

$$(\widetilde{g}_1(t)-\widetilde{g}_2(t),\widehat{z}_1(t)-\widehat{z}_2(t))\geqslant K_2|\widehat{z}_1(t)-\widehat{z}_2(t))|^2. \qquad (3.17)$$

Якщо $\widetilde{u}\in L^\infty(0,T)$, то існує стала $\widetilde{M}\geqslant 0$ така, що $|\widetilde{u}(t)|\leqslant\widetilde{M}$ для м.в. $t\in(0,T)$. Враховуючи це і використовуючи на нерівність Коші, для м.в. $t\in(0,T)$ отримуємо

$$\left|\widetilde{u}(t)\big(\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t),\widehat{z}_1(t)-\widehat{z}_2(t)\big)\right|\leqslant\widetilde{M}|\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t)||\widehat{z}_1(t)-\widehat{z}_2(t)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon\widetilde{M}}{2}|\widehat{z}_1(t)-\widehat{z}_2(t)|^2+\frac{\widetilde{M}}{2\varepsilon}|\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t)|^2, \qquad (3.18)$$

де $\varepsilon>0$ – довільна стала.

З(3.16), беручи до уваги (3.17) і (3.18), маємо

$$|\widehat{z}_1(\tau)-\widehat{z}_2(\tau)|^2+(2K_2-\varepsilon\widetilde{M})\int_0^\tau|\widehat{z}_1(t)-\widehat{z}_2(t)|^2\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\widetilde{M}\varepsilon^{-1}\int_0^\tau|\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t)|^2\,dt. \qquad (3.19)$$

Вибравши $\varepsilon>0$ таке, що виконується умова $2K_2-\varepsilon\widetilde{M}\geqslant 0$, з (3.19) отримуємо

$$|\widehat{z}_1(\tau)-\widehat{z}_2(\tau)|^2\leqslant C_2\int_0^\tau|\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t)|^2\,dt,\quad \tau\in(0,T], \qquad (3.20)$$

де $C_2>0$ – деяка стала.

Домноживши (3.20) на $e^{-2\alpha\tau}$, отримуємо

$$e^{-2\alpha\tau}|\widehat{z}_1(\tau)-\widehat{z}_2(\tau)|^2\leqslant C_2e^{-2\alpha\tau}\int_0^\tau e^{2\alpha t}e^{-2\alpha t}|\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t)|^2\,dt\leqslant$$
$$\leqslant C_2e^{-2\alpha\tau}\max_{t\in[0,T]}\left[e^{-2\alpha t}|\widetilde{z}_1(t)-\widetilde{z}_2(t)|^2\right]\int_0^\tau e^{2\alpha t}\,dt=$$
$$=\frac{C_2}{2\alpha}(1-e^{-2\alpha\tau})\big(\rho(\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2)\big)^2\leqslant\frac{C_2}{2\alpha}\big(\rho(\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2)\big)^2,\quad \tau\in[0,T]. \qquad (3.21)$$

З (3.21) випливає, що

$$\rho(\widehat{z}_1, \widehat{z}_2) \leqslant \sqrt{C_2/(2\alpha)}\rho(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2).$$

Звідси, вибравши $\alpha > 0$ таким, щоб виконувалась нерівність $C_2/(2\alpha) < 1$, отримуємо, що оператор A є стискуючим. Отже, можемо використати теорему Банаха про нерухому точку, [59, теорема 5.7] з якої отримуємо існування єдиної функції $z \in C([0,T]; H)$ такої, що $Az = z$. Твердження 3.7 доведено. ∎

Доведення теореми 3.1. Єдиність розв'язку. Припустимо протилежне. Нехай y_1, y_2 – два різні розв'язки задачі $\mathbf{P}(\Phi, u, f, \gamma)$. Тоді для кожного $i \in \{1,2\}$ існує функція $g_i \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; V')$ така, що для м.в. $t \in S$ маємо, що $g_i(t) \in \partial\Phi\big(y_i(t)\big)$ і

$$y_i'(t) + g_i(t) + u(t)y_i(t) = f(t) \quad \text{в} \quad V'. \tag{3.22}$$

Позначимо $z := y_1 - y_2$. З рівностей (3.22) для м.в. $t \in S$ отримуємо

$$z'(t) + g_1(t) - g_2(t) + u(t)z(t) = 0 \quad \text{в} \quad V'. \tag{3.23}$$

З (3.8) випливає умова

$$e^{-2\gamma t}|z(t)|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \tag{3.24}$$

Домноживши рівність (3.23) для майже всіх $t \in S$ на $z(t)$, отримаємо

$$(z'(t), z(t)) + (g_1(t) - g_2(t), y_1(t) - y_2(t)) + u(t)|z(t)|^2 = 0. \tag{3.25}$$

Згідно з рівністю (3.5), умовою $(\mathcal{A}_4)$ і тим, що $g_i(t) \in \partial\Phi(y_i(t))$ $(i = 1,2)$ для м.в. $t \in S$, отримуємо таку диференціальну нерівність

$$\frac{1}{2}\frac{d|z(t)|^2}{dt} + (K_2 + \widetilde{m})|z(t)|^2 \leqslant 0 \quad \text{для м.в.} \;\; t \in S. \tag{3.26}$$

Виберемо довільні числа $\tau_1, \tau_2 \in S$ $(\tau_1 < \tau_2)$. Помноживши нерівність (3.26) на $e^{-2\gamma t}$, та проінтегрувавши за t від τ_1 до τ_2, отримаємо

$$\frac{1}{2}e^{-2\gamma t}|z(t)|^2\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + (K_2 + \widetilde{m} + \gamma)\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|z(t)|^2\, dt \leqslant 0. \tag{3.27}$$

Оскільки виконується умова (3.9), то з (3.27) отримаємо

$$e^{-2\gamma\tau_2}|z(\tau_2)|^2 \leqslant e^{-2\gamma\tau_1}|z(\tau_1)|^2. \tag{3.28}$$

У (3.28) зафіксуємо τ_2 і перейдемо до границі при $\tau_1 \to -\infty$. Враховуючи умову (3.24), отримуємо рівність $e^{-2\gamma\tau_2}|z(\tau_2)|^2 = 0$. Оскільки $\tau_2 \in S$ є довільно вибраним числом, то маємо $z(t) = 0$ для м.в. $t \in S$, звідки випливає, що $y_1(t) = y_2(t)$ для м.в. $t \in S$. Отримане протиріччя доводить єдиність розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi, u, f, \gamma)$.

Існування розв'язку. Проведемо доведення в три етапи.

Етап 1 (наближення розв'язку). Побудуємо послідовність функцій, які певним чином апроксимують розв'язок задачі $\mathbf{P}(\Phi, u, f, \gamma)$.

Нехай $\widehat{f}_k(t) := f(t)$ для $t \in S_k := [-k, 0]$, де $k \in \mathbb{N}$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розглянемо задачу на знаходження функції $\widehat{y}_k \in H^1(S_k; H) := \big\{z \in L^2(S_k; H) \bigm| z' \in L^2(S_k; H)\big\}$ такої, що для м.в. $t \in S_k$ маємо $\widehat{y}_k(t) \in D(\partial\Phi_H)$ і

$$\widehat{y}_k'(t) + \partial\Phi_H\big(\widehat{y}_k(t)\big) + u(t)\widehat{y}_k(t) \ni \widehat{f}_k(t) \quad \text{в} \;\; H, \tag{3.29a}$$

$$\widehat{y}_k(-k) = 0. \tag{3.29b}$$

Варіаційна нерівність (3.29a) означає, що існує функція $\widehat{g}_k \in L^2(S_k; H)$ така, що для м.в. $t \in S_k$ маємо $\widehat{g}_k(t) \in \partial\Phi_H(\widehat{u}_k(t))$ і

$$\widehat{y}_k'(t) + \widehat{g}_k(t) + u(t)\widehat{y}_k(t) = \widehat{f}_k(t) \quad \text{в} \;\; H. \tag{3.30}$$

Зауважимо, що $D(\partial\Phi_H) \subset \mathrm{dom}(\Phi_H)$ і, крім того, $\widehat{y}_k(t) \in V$ для м.в. $t \in S_k$. З означення субдиференціалу функціоналу і того факту, що $\widehat{g}_k(t) \in \partial\Phi(\widehat{y}_k(t))$ для м.в. $t \in S_k$, маємо

$$\Phi(0) \geq \Phi(\widehat{y}_k(t)) + (\widehat{g}_k(t), 0 - \widehat{y}_k(t)) \quad \text{для м.в.} \quad t \in S_k.$$

Використовуючи це і умову $(\mathcal{A}_3)$, отримуємо

$$(\widehat{g}_k(t), \widehat{y}_k(t)) \geq \Phi(\widehat{y}_k(t)) \geq K_1\|\widehat{y}_k(t)\|^2 \quad \text{для м.в.} \quad t \in S_k. \tag{3.31}$$

Оскільки ліва частина нерівностей з (3.31) належить до $L^1(S_k)$, то $\widehat{y}_k$ належить до $L^2(S_k; V)$.

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ продовжуємо функції $\widehat{f}_k, \widehat{y}_k$ і $\widehat{g}_k$ нулем на весь інтервал S, і позначимо це продовження f_k, y_k і g_k відповідно. З вище сказаного випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція y_k належить до $L^2(S;V)$, її похідна y_k' належить до $L^2(S;H)$ і для м.в. $t \in S$ правильне включення $g_k(t) \in \partial\Phi_H\big(y_k(t)\big)$ і виконується (див. (3.30) рівність

$$y_k'(t) + g_k(t) + u(t)y_k(t) = f_k(t) \quad \text{в} \quad H. \tag{3.32}$$

Для того, щоб показати збіжність послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$ до розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi, u, f, \gamma)$, нам потрібні певні оцінки функцій y_k $(k \in \mathbb{N})$.

Етап 2 (*оцінки апроксимуючих розв'язків*). Домноживши рівність (3.32) на $e^{-2\gamma t}y_k(t)$ (для м.в. $t \in S$) та проінтегрувавши від τ_1 до τ_2 ($\tau_1, \tau_2 \in S$ довільні числа, $\tau_1 < \tau_2$), отримаємо

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(y_k'(t), y_k(t))\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(g_k(t), y_k(t))\,dt +$$
$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}u(t)|y_k(t)|^2\,dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(f_k(t), y_k(t))\,dt.$$

Звідси, беручи до уваги (3.5) і використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + 2\gamma\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt + 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(g_k(t), y_k(t))\,dt + \tag{3.33}$$
$$+ 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}u(t)|y_k(t)|^2\,dt = 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(f_k(t), y_k(t))\,dt.$$

З означення функцій y_k, враховуючи (3.31), отримаємо

$$(g_k(t), y_k(t)) \geq \Phi\big(y_k(t)\big) \geq K_1\|y_k(t)\|^2 \quad \text{для м.в. } t \in S. \tag{3.34}$$

Тепер оцінимо третій доданок лівої частини рівності (3.33). З (3.6) та (3.34) для довільного $\delta \in (0,1)$ отримуємо

$$2\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(g_k(t), y_k(t))\,dt = 2(\delta + (1-\delta))\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(g_k(t), y_k(t))\,dt \geqslant$$
$$\geqslant 2\delta K_2\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt + (1-\delta)K_1\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\|y_k(t)\|^2\,dt +$$
$$+(1-\delta)\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\Phi\big(y_k(t)\big)\,dt. \tag{3.35}$$

Застосувавши нерівність Коші до правої частини рівності (3.33), матимемо:

$$2\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(f_k(t), y_k(t))\,dt \leqslant \varepsilon\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt + \varepsilon^{-1}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \tag{3.36}$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне.

З (3.33), беручи до уваги нерівність (3.35), (3.36) і, використавши позначення $\widetilde{m} := \inf\limits_{t\in S} u(t)$, матимемо

$$e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + [2(\delta K_2 + \widetilde{m} + \gamma) - \varepsilon]\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt +$$
$$+(1-\delta)K_1\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\|y_k(t)\|^2\,dt + (1-\delta)\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\Phi\big(y_k(t)\big)\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^{-1}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \quad \delta\in(0,1),\ \varepsilon>0. \tag{3.37}$$

Оскільки $K_1 > 0$, $K_2 + \widetilde{m} + \gamma > 0$, а $\delta \in (0,1), \varepsilon > 0$ є довільними, то спершу виберемо δ таке, що $\delta K_2 + m + \gamma > 0$, а потім виберемо ε таке, що $2(\delta K_2 + m + \gamma) - \varepsilon > 0$. У результаті отримуємо оцінку

$$e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\|y_k(t)\|^2\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\Phi\big(y_k(t)\big)\,dt \leqslant$$
$$\leqslant C_3\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \tag{3.38}$$

де C_3 – довільна додатна константа, яка залежить тільки від $K_1, K_2, \widetilde{m}$ і γ.

Виберемо $\tau_2 = \tau$, де $\tau \in S$ – довільне, і перейдемо до границі у (3.38) при $\tau_1 \to -\infty$. Врахувавши умову $(\mathcal{F})$ та означення функцій y_k і f_k, матимемо

$$e^{-2\gamma\tau}|y_k(\tau)|^2 + \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}\|y_k(t)\|^2\,dt +$$
$$+\int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}\Phi\big(y_k(t)\big)\,dt \leqslant C_3\int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f(t)|^2\,dt, \quad \tau\in S. \tag{3.39}$$

В силу довільності $\tau \in S$ з нерівності (3.39) випливає, що

$$\text{послідовність } \{e^{-\gamma\cdot}y_k(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty} \text{ є обмеженою в } L^\infty(S;H) \text{ та в } L^2(S;V), \tag{3.40}$$
$$\text{послідовність } \big\{e^{-2\gamma\cdot}\Phi\big(y_k(\cdot)\big)\big\}_{k=1}^{+\infty} \text{ є обмеженою в } L^1(S). \tag{3.41}$$

Тепер знайдемо оцінки функцій $y_k'(t)$ $k\in\mathbb{N}$. Для майже кожного $t \in S$ домножимо рівність (3.32) на $e^{-2\gamma t}y_k'(t)$ та проінтегруємо отриману рівність від τ_1 до τ_2 ($\tau_1, \tau_2 \in S$ – довільні числа такі, що $\tau_1 < \tau_2$). У результаті отримаємо

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(g_k(t), y_k'(t))\,dt =$$
$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(f_k(t), y_k'(t))\,dt - \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}u(t)(y_k(t), y_k'(t))\,dt. \qquad (3.42)$$

З (3.42), використовуючи нерівність Коші – Буняковського і те, що $\sup\limits_{t\in S} u(t) =: \widetilde{M} < \infty$, матимемо

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(g_k(t), y_k'(t))\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{M}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)||y_k'(t)|\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)||y_k'(t)|\,dt. \qquad (3.43)$$

Оскільки $g_k \in L^2(\tau_1, \tau_2; H)$, то з твердження 3.5 випливає, що функція $\Phi_H\big(y_k(\cdot)\big)$ є абсолютно неперервною на $[\tau_1, \tau_2]$ і

$$\frac{d}{dt}\Phi_H\big(y_k(t)\big) = (g_k(t), y_k'(t)) \quad \text{для м.в.} \quad t \in (\tau_1, \tau_2). \qquad (3.44)$$

Використовуючи (3.44), можемо оцінити другий доданок лівої частини рівності (3.43) :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}(g_k(t), y_k'(t))\,dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\frac{d}{dt}\Phi_H\big(y_k(t)\big)\,dt =$$
$$= e^{-2\gamma t}\Phi_H\big(y_k(t)\big)\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + 2\gamma\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\Phi_H\big(y_k(t)\big)\,dt. \qquad (3.45)$$

Застосовуючи нерівність Коші до правої частини нерівності (3.43) і використовуючи оцінку (3.39), матимемо

$$\widetilde{M}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)||y_k'(t)|\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)||y_k'(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{M}^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt + \frac{1}{4}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt +$$
$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt + \frac{1}{4}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{M}^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt + \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt. \qquad (3.46)$$

З (3.43), врахувавши (3.45) і (3.46), отримуємо

$$\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt + e^{-2\gamma t}\Phi_H\big(y_k(t)\big)\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{M}^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|y_k(t)|^2\,dt + 2|\gamma|\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}\Phi_H\big(y_k(t)\big)\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt. \tag{3.47}$$

Враховуючи означення функцій y_k та f_k, умови $(\mathcal{A}_3)$, (3.1) і (3.39), перейдемо до границі при $\tau_1 \to -\infty$ у (3.47). У результаті, взявши $\tau_2 = \tau \in S$, матимемо

$$e^{-2\gamma\tau}\Phi_H\big(y_k(\tau)\big) + \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt \leqslant C_4\int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f_k(t)|^2\,dt, \tag{3.48}$$

де $C_4 > 0$ – стала, яка залежить тільки від K_1, γ, λ та $\widetilde{m}, \widetilde{M}$.

З означення функціоналу Φ_H і функцій f_k, враховуючи умову $(\mathcal{A}_3)$ (нагадаємо, що $y_k(t) \in V$ для м.в. $t \in S$), отримаємо

$$e^{-2\gamma\tau}\|y_k(\tau)\|^2 + \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt \leqslant C_5\int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f(t)|^2\,dt, \tag{3.49}$$

де $C_5 > 0$ – деяка стала, яка залежить лише від K_1, γ, λ і $\widetilde{m}, \widetilde{M}$.

З оцінки (3.49) і означення функцій f_k випливає, що

$$\text{послідовність } \big\{y_k\big\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^\infty_\gamma(S;V), \tag{3.50}$$

$$\text{послідовність } \big\{y_k'\big\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^2_\gamma(S;H). \tag{3.51}$$

З (3.32), на підставі (3.39), (3.49), $(\mathcal{F})$ і означення функцій f_k отримуємо, що

$$\text{послідовність } \{g_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^2_\gamma(S;H). \tag{3.52}$$

Етап 3 (*граничний перехід*). Оскільки простори V і H є гільбертовими і V компактно вкладається в H, то з (3.40), (3.50)–(3.52) і твердження 3.4 випливає, що існують функція $y \in L^\infty_\gamma(S;V) \cap L^2_\gamma(S;V) \cap H^1_\gamma(S;H) \subset C(S;H)$, $g \in L^2_\gamma(S;H)$ і підпослідовність послідовності $\{y_k, g_k\}_{k=1}^{+\infty}$ (за якою залишаємо позначення $\{y_k, g_k\}_{k=1}^{+\infty}$) такі, що

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad *\text{-слабко в } L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;V),\ \text{слабко в } L^2_\gamma(S;V) \ \text{ та слабко в } H^1_\gamma(S;H), \tag{3.53}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{в } C(S;H), \tag{3.54}$$

$$g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{слабко в } L^2_\gamma(S;H). \tag{3.55}$$

Зауважимо, що з (3.53) і (3.55) випливає, що

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y, \quad y_k' \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y', \quad g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S;H). \tag{3.56}$$

Нехай $v \in H, \varphi \in D(-\infty,0)$ – довільні. Для м.в. $t \in S$ домножимо рівність (3.32) на v і $\varphi(t)$ та проінтегруємо по t на S. У результаті отримаємо рівність

$$\int\limits_S (y_k'(t), v\varphi(t))\,dt + \int\limits_S (g_k(t), v\varphi(t))\,dt + \int\limits_S u(t)(y_k(t), v\varphi(t))\,dt =$$
$$= \int\limits_S (f_k(t), v\varphi(t))\,dt, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.57}$$

Перейдемо до границі в (3.57) при $k \to +\infty$, врахувавши (3.56) і збіжність послідовності $\{f_k\}$ до f в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$. Оскільки $v \in H, \varphi \in D(-\infty,0)$ є довільними, то для м.в. $t \in S$ отримуємо рівність

$$y'(t) + g(t) + u(t)y(t) = f(t) \quad \text{в} \quad H.$$

Для завершення доведення теореми залишається тільки показати, що $y(t) \in D(\partial\Phi)$ і $g(t) \in \partial\Phi\big(y(t)\big)$ для м.в. $t \in S$.

Нехай $k \in \mathbb{N}$ – довільне число. Оскільки $g_k(t) \in \partial\Phi_H\big(y_k(t)\big)$ для майже кожного $t \in S \setminus \widetilde{S}_k$, де $\widetilde{S}_k \subset S$ – множина міри нуль, то використовуючи монотонність субдиференціалу $\partial\Phi_H$, отримуємо, що для кожного $t \in S \setminus \widetilde{S}_k$ виконується рівності

$$(g_k(t) - v^*, y_k(t) - v) \geqslant 0 \quad \forall\, [v, v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{3.58}$$

Нехай $\tau \in S$, $h > 0$ – довільні числа. Проінтегруємо нерівність (3.58) по t від $\tau - h$ до τ:

$$\int_{\tau-h}^{\tau} (g_k(t) - v^*, y_k(t) - v)\,dt \geqslant 0 \quad \forall\, [v, v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{3.59}$$

Тепер, враховуючи (3.54) і (3.55), перейдемо до границі (3.59) при $k \to +\infty$. У результаті для довільних $[v, v^*] \in \partial\Phi_H$ отримуємо

$$0 \leqslant \int_{\tau-h}^{\tau} (g_k(\tau) - v^*, y_k(t) - v)\,dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\tau-h}^{\tau} (g(t) - v^*, y(t) - v)\,dt \geq 0. \tag{3.60}$$

З монографії [20, теорема 2, с. 192] і (3.60) випливає, що для кожного $[v,v^*] \in \partial\Phi_H$ існує множина $R_{[v,v_*]} \subset S$ міри нуль така, що для кожного $\tau \in S \setminus R_{[v,v_*]}$ маємо

$$0 \leqslant \lim_{h\to+0} \frac{1}{h}\int_{\tau-h}^{\tau} \big(g(t)-v^*, y(t)-v\big)\,dt = \big(g(\tau)-v^*, y(\tau)-v\big). \tag{3.61}$$

Покажемо, що існує множина міри нуль $R \subset S$ така, що для кожного $\tau \in S \setminus R$ виконується

$$\big(g(\tau)-v^*, y(\tau)-v\big) \geq 0 \quad \forall [v,v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{3.62}$$

Оскільки V та H є сепарабельними просторами, то існує зліченна множина $F \subset \partial\Phi_H$, яка є щільно в $\partial\Phi_H$. Позначимо $R := \bigcup\limits_{[v,v^*]\in F} R_{[v,v_*]}$. Оскільки множина F є зліченною, а зліченне об'єднання множин міри нуль є множиною міри нуль, то R – множина міри нуль. Крім того, для кожного $\tau \in S \setminus R$ нерівність (3.62) виконується для кожного $[v,v^*] \in F$. Нехай $[\widehat{v},\widehat{v}^*]$ – довільний елемент з $\partial\Phi_H$. Тоді із щільності F у $\partial\Phi_H$ випливає маємо існування послідовності $\{[v_l,v_l^*]\}_{l=1}^{\infty}$ такої, що $v_l \to \widehat{v}$ в V, $v_l^* \to \widehat{v}^*$ в H і для кожного $\tau \in S \setminus R$ маємо

$$(g(\tau)-v_l^*, y(\tau)-v_l) \geqslant 0 \quad \forall\, l \in \mathbb{N}. \tag{3.63}$$

Отож, перейшовши до границі в (3.63) при $l \to \infty$, отримаємо $(g(\tau)-\widehat{v}^*, y(\tau)-\widehat{v}) \geqslant 0$. Тому для м.в. $\tau \in S$ виконується нерівність (3.62). З цього, відповідно до максимальної монотонності $\partial\Phi_H$, маємо, що $[y(t),g(t)] \in \partial\Phi_H$ для м.в. $t \in S$.

Оцінка (3.10) розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi,u^*,f,\gamma)$ безпосередньо випливає з (3.39), (3.49), (3.53) і (3.54), і твердження 3.3. З (3.39), (3.54), (3.10), з урахуванням (3.1), отримуємо

$$e^{-2\gamma\tau}|y_k(\tau)|^2 \leqslant C_1 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f(t)|^2\,dt.$$

Звідси на підставі умови $(\mathcal{F})$ маємо виконання умови (3.8). ∎

3.1.3 Формулювання задачі оптимального керування та існування її розв'язку

Нехай U — замкнений лінійний підпростір $L^\infty(S)$, наприклад, $U := L^\infty(S)$ чи $U := \{u \in L^\infty(S) \mid u(t) = 0$ для майже всіх $t \in S \setminus [t^*,0]\}$, де

$t^* < 0$ — довільне фіксоване. Вважаємо U простором керувань, а $U_\partial := \Big\{ u \in U \,\Big|\, m \leqslant u(t) \leqslant M \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S \Big\}$, де $m, M \in \mathbb{R}$ — задані сталі, множиною допустимих керувань.

Вважаємо, що стан досліджуваної еволюційної системи $y(u) = y(\cdot; u)$ для заданого керування $u \in U_\partial$ описує розв'язок задачі $\mathbf{P}(\Phi, u, f, \gamma)$, коли виконується умова

$(\mathcal{P})$ Φ задовольняє умови $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_4)$, $f \in L^2_\gamma(S; H)$ і

$$K_2 + m + \gamma > 0. \tag{3.64}$$

З теореми 3.1 випливає, що існує і єдина функція $y(u) = y(t; u)$, $t \in S$, яка є розв'язком задачі $\mathbf{P}(\Phi, u, f, \gamma)$ і належить простору $L^\infty_\gamma(S; V) \cap L^2_\gamma(S; V) \cap H^1_\gamma(S; H)$.

Нехай $G : C(S; H) \to \mathbb{R}$ — функціонал, що задовольняє умову :

$(\mathcal{G})$ G є напівнеперервним знизу в $C(S; H)$ і, крім того, $\inf\limits_{z \in C(S;H)} G(z) > -\infty$.

Вважаємо, що функція вартості $J : U \to \mathbb{R}$ має вигляд

$$J(u) := G(y(u)) + \mu \|u\|_U, \quad u \in U, \tag{3.65}$$

де $\mu \geqslant 0$ — стала, причому $\mu > 0$, якщо U_∂ — необмежена множина.

Розглядаємо **задачу оптимального керування**: знайти керування $u^* \in U_\partial$ таке, що

$$J(u^*) = \inf_{u \in U_\partial} J(u). \tag{3.66}$$

Коротко називатимемо цю задачу задачею (3.66), а її розв'язки — *оптимальними керуваннями.*

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{P})$ *і* $(\mathcal{G})$. *Тоді множина розв'язків задачі* (3.66) *є непорожньою і* $*$*-слабко замкненою.*

Доведення. Нехай $\{u_k\}$ – мінімізуюча послідовність для функціоналу J в U_∂: $J(u_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \inf\limits_{u \in U_\partial} J(u)$. Враховуючи означення простору U_∂, отримуємо, що

$$\text{послідовність } \{u_k\}_{k=1}^\infty \text{ обмежена в } L^\infty(S). \tag{3.67}$$

Нехай для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $y_k := y(u_k)$ є розв'язком задачі $\mathbf{P}(\Phi, u_k, f, \gamma)$, тобто, функція y_k задовольняє такі варіаційну нерівність і умову на нескінченності:

$$y_k'(t) + \partial\Phi\big(y_k(t)\big) + u_k(t)y_k(t) \ni f(t), \quad t \in S. \tag{3.68}$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-\gamma t}|y_k(t)| = 0. \tag{3.69}$$

Згідно з означенням 3.1 і теоремою 3.1, врахувавши умову $(\mathcal{F})$, для кожного $k \in \mathbb{N}$ матимемо включенню $y_k \in L^\infty_\gamma(S;V) \cap L^2_\gamma(S;V) \cap H^1_\gamma(S;H) \subset C(S;H)$, $y_k(t) \in D(\partial\Phi)$ для м.в. $t \in S$, а також існування функції $g_k \in L^2_\gamma(S;H)$ такої, що для м.в. $t \in S$, значення $g_k(t)$ належить до $\partial\Phi(y_k(t))$ і виконується рівність

$$y_k'(t) + g_k(t) + u_k(t)y_k(t) = f(t) \quad \text{в} \quad H \tag{3.70}$$

та умова (3.69). Крім того, для довільного $k \in \mathbb{N}$ і $\tau \in S$ маємо оцінку

$$e^{-2\gamma\tau}\|y_k(\tau)\|^2 + \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}\|y_k(t)\|^2\,dt +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|y_k'(t)|^2\,dt \leqslant C_1 \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f(t)|^2\,dt, \tag{3.71}$$

де $C_1 > 0$ – стала, яка залежить лише від $K_1, K_2, \gamma, \lambda$ та m, M.

З оцінки (3.71) випливає, що

$$\text{послідовність } \{e^{-\gamma\cdot}y_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty \text{ обмежена в } L^\infty(S;V), \tag{3.72}$$
$$\text{послідовність } \{y_k\}_{k=1}^\infty \text{ обмежена в } L^2_\gamma(S;V), \tag{3.73}$$
$$\text{послідовність } \{y_k'\}_{k=1}^\infty \text{ обмежена в } L^2_\gamma(S;H). \tag{3.74}$$

З (3.70), враховуючи (3.67), (3.73), (3.74) і $(\mathcal{F})$ отримуємо, що

$$\text{послідовність } \{g_k\}_{k=1}^\infty \text{ обмежена в } L^2_\gamma(S;H). \tag{3.75}$$

Оскільки V і H є рефлексивними просторами та V неперервно, щільно і компактно вкладається в H, то з (3.67), (3.72)–(3.75), враховуючи твердження 2.1, випливає, що існують підпослідовність послідовності $\{u_k, y_k, g_k\}_{k=1}^\infty$

(за якою залишимо позначення $\{u_k, y_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$) та функції $u^* \in U_\partial$, $y \in L^\infty_\gamma(S;V) \cap L^2_\gamma(S;V) \cap H^1_\gamma(S;H) \subset C(S;H)$ і $g \in L^2_\gamma(S;H)$ такі, що

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u^* \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(S), \tag{3.76}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad *\text{-слабко в } L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;V) \text{ та слабко в } L^2_\gamma(S;V) \text{ і } H^1_\gamma(S;H), \tag{3.77}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{в} \quad C(S;H), \tag{3.78}$$

$$g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{слабко в} \quad L^2_\gamma(S;H). \tag{3.79}$$

Подібно, як в доведенні теореми 3.1, для м.в. $t \in S$ домножимо рівність (3.70) на v і $\varphi(t)$ та проінтегруємо по S, де $v \in H, \varphi \in D(-\infty,0)$ – довільні. У результаті отримуємо рівність

$$\int\limits_S (y_k'(t), v\varphi(t))\,dt + \int\limits_S (g_k(t), v\varphi(t))\,dt + \int\limits_S u_k(t)(y_k(t), v\varphi(t))\,dt =$$
$$= \int\limits_S (f(t), v\varphi(t))\,dt, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.80}$$

Покажемо, що з (3.76) та (3.78) випливає

$$\int\limits_S u_k(t)(y_k(t), v\varphi(t))\,dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_S u^*(t)(y(t), v\varphi(t))\,dt \quad \forall v \in H,\ \forall \varphi \in D(-\infty,0). \tag{3.81}$$

Справді, нехай $t_1, t_2 \in S$ такі, що $\operatorname{supp}\varphi \subset [t_1,t_2]$. Тоді маємо, що

$$\int\limits_S u_k(t)(y_k(t), v\varphi(t))\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} u_k(t)(y_k(t) - y(t) + y(t), v\varphi(t))\,dt =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} u_k(t)(y(t), v\varphi(t))\,dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} u_k(t)(y_k(t) - y(t), v\varphi(t))\,dt. \tag{3.82}$$

З (3.67), (3.78) та нерівності Коші-Буняковського випливає, що

$$\Big| \int\limits_{t_1}^{t_2} u_k(t)(y_k(t) - y(t), v\varphi(t))\,dt \Big| \le$$
$$\le M\Big(\int\limits_{t_1}^{t_2} |\varphi(t)v|^2\,dt \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{t_1}^{t_2} |y_k(t) - y(t)|^2\,dt \Big)^{1/2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.83}$$

Оскільки $(y(\cdot), v)\varphi(\cdot) \in L^1(S)$, то з (3.76) випливає

$$\int_{t_1}^{t_2} u_k(t)(y(t), v\varphi(t))\, dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t_1}^{t_2} u^*(t)(y(t), v\varphi(t))\, dt. \tag{3.84}$$

З (3.82), враховуючи (3.83) та(3.84), ми отримуємо (3.81).

Перейдемо до границі в (3.80) при $k \to +\infty$, врахувавши (3.77), (3.79) та (3.81). У результаті отримаємо рівність

$$y'(t) + g(t) + u^*(t)y(t) = f(t) \quad \text{в} \quad H \quad \text{для м.в.} \quad t \in S.$$

Подібно, як в доведенні теореми 3.1, ми показуємо, що функції $y(t) \in D(\partial\Phi)$ і $g(t) \in \partial\Phi\big(y(t)\big)$ для м.в. $t \in S$. З (3.1), (3.71) і (3.78) отримуємо, що

$$e^{-2\gamma\tau|y(\tau)|^2} \leqslant C_1\lambda^{-1} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\gamma t}|f(t)|^2\, dt \quad \tau \in S.$$

Звідси випливає виконання умови (3.8). Отже, функція y є розв'язком задачі $\mathbf{P}(\Phi, u^*, f, \gamma)$.

Залишається показати, що u^* є мінімузуючим елементом функціоналу J. Справді, оскільки функціонал G є напівнеперервним знизу в $C(S;H)$, то з (3.78) випливає, що

$$\varliminf_{k\to\infty} G(y_k) \geq G(y). \tag{3.85}$$

Також з (3.76) та твердження 3.3 маємо, що

$$\varliminf_{k\to\infty} \|u_k\|_U \geq \|u^*\|_U. \tag{3.86}$$

З(3.65), (3.85), (3.86) отримуємо $\inf\limits_{u\in U_\partial} J(u) = \lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) \geq \varliminf\limits_{k\to\infty} G(y_k)+$ $\mu \varliminf\limits_{k\to\infty} \|u_k\|_U \geq J(u^*)$, тобто, u^* є розв'язком задачі (3.66).

Покажемо, що множина розв'язків задачі (3.66) є $*$-слабко замкненою. Справді, нехай $\{u_k^*\}$ – послідовність оптимальних керувань така, що $u_k^* \to u^*$ $*$-слабко в $L^\infty(Q)$. Аналогічно, як було зроблено вище можна довести, що $\varliminf\limits_{k\to\infty} J(u_k^*) \geq J(u^*)$. Але $J(u_k^*) = \inf\limits_{u\in U_\partial} J(u)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Отже, u^* є розв'язком задачі (3.66). ∎

3.2 Сильно нелінійні варіаційні нерівності з керуваннями у правих частинах

3.2.1 Основні позначення та допоміжні факти

Нехай V – сепарабельний рефлексивний банахів простір над полем дійсних чисел з нормою $\|\cdot\|$, а H – гільбертів простір над полем дійсних чисел зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $|\cdot|$. Припускаємо, що простір V неперервно, щільно і компактно вкладається в H, тобто, V є підмножиною H, замикання V в H збігається з H, існує стала $\lambda > 0$ така, що

$$\lambda|v|^2 \le \|v\|^2 \quad \forall v \in V, \tag{3.87}$$

та для будь-якої послідовності $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, яка обмежена в V, існує елемент $w \in V$ та підпослідовність $\{w_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ такі, що $w_{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w$ сильно в H.

Нехай V' і H' спряжені, відповідно, до V та H простори і вважатимемо (провівши відповідне ототожнення функціоналів), що простір H' є підпростором простору V'. Ототожнивши (на підставі теореми Ріса) простори H та H', отримаємо неперервні та щільні вкладення

$$V \subset H \subset V'. \tag{3.88}$$

Зауважимо, що в даному випадку $\langle g, v\rangle_V = (g, v)$ для будь-яких $v \in V, g \in H$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ означає дію елемента з V' на елемент з V (канонічний добуток на $V \times V'$). Тому далі вживатимемо позначення $(\cdot,\cdot)$ замість $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$. Також використовуватимемо позначення $\|\cdot\|_*$ для норми в V'. Зауважимо, що

$$\lambda\|h\|_*^2 \le |h|^2 \quad \forall h \in H, \tag{3.89}$$

де λ – стала з нерівності (3.87). Справді, на підставі (3.87) маємо

$$\|h\|_* = \sup_{v\in V, \|v\|=1} |(h, v)| \le \sup_{v\in V, \|v\|=1} |h||v| \le \lambda^{-1/2}|h|.$$

Введемо потрібні нам далі простори функцій і розподілів, визначених на числовому проміжку зі значеннями в банаховому просторі. Нехай $S := (-\infty, 0]$. Під X розумітимемо довільний банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$.

Через $C(S;X)$ позначатимемо простір визначених і неперервних на S зі значеннями в X функцій. Скажемо, що послідовність $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до z в $C(S;X)$, якщо для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ послідовність звужень членів послідовності $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ на відрізок $[t_1, t_2]$ збігається до звуження z на цей відрізок в $C([t_1, t_2]; X)$.

Нехай $q \in [1, \infty]$, q' – спряжене до q, тобто, $1/q + 1/q' = 1$. Під $L^q_{\mathrm{loc}}(S;X)$ розумітимемо лінійний простір визначених і вимірних на S зі значеннями в X функцій таких, що для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ їх звуження на відрізок $[t_1, t_2]$ належать простору $L^q(t_1, t_2; X)$. Скажемо, що послідовність $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ обмежена (відповідно, збігається до z сильно (відповідно, слабко чи $*$-слабко)) в $L^q_{\mathrm{loc}}(S;X)$, якщо для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ послідовність звужень членів послідовності $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ на відрізок $[t_1, t_2]$ обмежена (відповідно, збігається до звуження z на цей відрізок сильно (відповідно, слабко чи $*$-слабко)) в $L^q(t_1, t_2; X)$.

Під $D'(-\infty, 0; V'_w)$ розумітимемо простір визначених на $D(-\infty, 0)$ зі значеннями в V' розподілів, тобто простір лінійних неперервних функціоналів на $D(-\infty, 0)$ зі значеннями в V'_w (тут і далі $D(-\infty, 0)$ – простір нескінченно диференційовних і фінітних на $(-\infty, 0)$ функцій, V'_w – лінійний простір V' з слабкою топологією). Легко переконатися (враховуючи (3.88)), що простори $L^q_{\mathrm{loc}}(S;V)$, $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$, $L^{q'}_{\mathrm{loc}}(S;V')$ можна ототожнити з відповідними підпросторами простору розподілів $D'(-\infty, 0; V'_w)$. Це, зокрема, дозволяє говорити про похідні z' функцій z з $L^q_{\mathrm{loc}}(S;V)$ і $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ в сенсі розподілів $D'(-\infty, 0; V'_w)$ і про належність таких похідних до $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ чи $L^{q'}_{\mathrm{loc}}(S;V')$.

Через $H^1_{\mathrm{loc}}(S;H)$ позначатимемо простір функцій $z \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ таких, що $z' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$. Введемо ще простір

$$W_p(S) := \{z \in L^p_{\mathrm{loc}}(S;V) \,|\, z' \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S;V')\}. \tag{3.90}$$

З відомих результатів (див., наприклад, [15, с. 177-179]) легко випливає, що $W_p(S) \subset C(S;H)$ і для довільної функції $z \in W_p(S)$ функція $t \to |z(t)|^2$ є абсолютно неперервною на будь-якому відрізку променя S та виконується рівність

$$\frac{d}{dt}|z(t)|^2 = 2(z'(t), z(t)) \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S. \tag{3.91}$$

В цій роботі використовуватимемо такі відомі факти.

Твердження 3.8 (нерівність Гельдера [15, ст. 158]). *Нехай* $q \in [1, \infty]$, $1/q + 1/q' = 1$, t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, $(t_1 < t_2)$, X *— банахів простір,* X' *— спряжений до* X, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ *— дія елемента з* X' *на елемент з* X. *Тоді, якщо* $v \in L^q(t_1, t_2; X)$ *і* $w \in L^{q'}(t_1, t_2; X')$, *то* $\langle w(\cdot), v(\cdot) \rangle_X \in L^1\big(t_1, t_2\big)$ *і*

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle w(t), v(t) \rangle_X \, dt \leqslant \|w\|_{L^{q'}(t_1,t_2;X')} \|v\|_{L^q(t_1,t_2;X)}.$$

Твердження 3.9 ([43, лема 1.1]). *Нехай невід'ємна і абсолютно неперервна на кожному відрізку з* S *функція* w *задовольняє диференціальну нерівність*

$$w'(t) + \beta(t)\chi\big(w(t)\big) \leqslant 0 \quad \text{для майже всіх } t \in S,$$

де $\beta \in L^1_{\mathrm{loc}}(S)$, $\beta(t) \geqslant 0$ *для майже всіх* $t \in S$, $\int_S \beta(t)\, dt = +\infty$, $\chi \in C\big([0, +\infty)\big)$, $\chi(0) = 0$, $\chi(s) > 0$ *при* $s > 0$ *і* $\int_1^{+\infty} \frac{ds}{\chi(s)} < +\infty$. *Тоді* $w \equiv 0$ *на* S.

Твердження 3.10 ([20, с. 173,179]). *Нехай* Y *— банахів простір з нормою* $\| \cdot \|_Y$, *а* $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– послідовність елементів простору* Y, *яка слабко або* $*$*-слабко збіжна до* v *в* Y. *Тоді* $\varliminf\limits_{k \to \infty} \|v_k\|_Y \geqslant \|v\|_Y$.

Твердження 3.11. *Якщо послідовність* $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ *є обмеженою у просторі* $L^q_{\mathrm{loc}}(S; V)$, *де* $q > 1$, *а послідовність* $\{z'_m\}$ *є обмеженою у просторі* $L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$, *то існують функція* $z \in L^p_{\mathrm{loc}}(S; V)$, $z' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ *і підпослідовність* $\{z_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ *послідовності* $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ *такі, що* $z_{m_j} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} z$ *в* $C(S; H)$ *і слабко в* $L^q_{\mathrm{loc}}(S; V)$, *а* $z'_{m_j} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} z'$ *слабко в* $L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$.

Доведення. З твердження 2.1 при $r = 2$, $\mathcal{W} = V$, $\mathcal{L} = \mathcal{B} = H$ випливає, що для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ з послідовності звужень членів послідовності $\{z_m\}_{m=1}^{\inf .ty}$ на відрізок $[t_1, t_2]$ можна вибрати підпослідовність, яка збігається в $C([t_1, t_2]; H)$ і слабко в $L^q(t_1, t_2; V)$, а послідовність похідних членів цієї підпослідовності слабко збігається в $L^2(t_1, t_2; H)$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ виберемо підпослідовність $\{z_{m(k,j)}\}_{j=1}^{\infty}$ даної послідовності, яка збігається в $C([-k, 0]; H)$ і слабко в $L^p(-k, 0; V)$ до деякої функції $\widehat{z}_k \in C([-k, 0]; H) \cap L^q(-k, 0; V)$, а послідовність $\{z'_{m(k,j)}\}_{j=1}^{\infty}$ слабко збігається до її похідної $\widehat{z}'_k$ в $L^2(-k, 0; H)$. При цьому виборі стежимо за тим, щоби послідовність $\{z_{m_{k+1,j}}\}_{j=1}^{\infty}$ була підпослідовністю послідовності $\{z_{m_{k,j}}\}_{j=1}^{\infty}$.

Тепер згідно з діагональним процесом вибираємо потрібну нам підпослідовність у вигляді $\{z_{m_{j,j}}\}_{j=1}^{\infty}$, а функцію z визначимо за правилом: для кожного $k \in \mathbb{N}$ приймаємо $z(t) := \widehat{z}_k(t)$ для $t \in (-k, -k+1]$. ∎

3.2.2 Коректність задачі без початкових умов для нелінійних параболічних включень

Нехай $\Phi : V \to (-\infty, +\infty]$ – власний функціонал, тобто, $\mathrm{dom}(\Phi) := \{v \in V : \ \Phi(v) < +\infty\} \neq \emptyset$, який задовольняє такі умови:

$(\mathcal{A}_1)$ $\quad \Phi\big(\alpha v + (1-\alpha)w\big) \leqslant \alpha\Phi(v) + (1-\alpha)\Phi(w) \quad \forall\, v, w \in V,\ \forall\, \alpha \in [0,1],$

тобто, Φ є *опуклим*,

$(\mathcal{A}_2)$ $\quad v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$ в $V \quad \Longrightarrow \quad \varliminf_{k\to\infty} \Phi(v_k) \geq \Phi(v),$

тобто, Φ є *напівнеперервним знизу*.

Нагадаємо, що *субдиференціалом* функціоналу Φ називають відображення $\partial\Phi : V \to 2^{V'}$, визначене за правилом

$$\partial\Phi(v) := \{v^* \in V' \mid \Phi(w) \geqslant \Phi(v) + (v^*, w - v) \quad \forall\, w \in V\}, \quad v \in V,$$

а *областю визначення* субдиференціалу $\partial\Phi$ – множину $D(\partial\Phi) := \{v \in V \,|\, \partial\Phi(v) \neq \varnothing\}$. Ми ототожнюватимемо субдиференціал $\partial\Phi$ з його графіком, вважаючи, що $[v, v^*] \in \partial\Phi$ тоді і лише тоді, коли $v^* \in \partial\Phi(v)$, тобто, $\partial\Phi = \{[v, v^*] \mid v \in D(\partial\Phi),\ v^* \in \partial\Phi(v))\}$. Р. Рокафеллар [94, теорема A] довів, що субдиференціал $\partial\Phi$ є *максимальним монотонним оператором*, тобто,

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant 0 \quad \forall\, [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi$$

і для будь-якого елемента $[v_1, v_1^*] \in V \times V'$ правильна імплікація

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant 0 \quad \forall\, [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi \quad \Longrightarrow \quad [v_1, v_1^*] \in \partial\Phi.$$

Додатково припустимо, що виконуються ще такі умови:

$(\mathcal{A}_3)$ існують сталі $p > 2$, $K_1 > 0$ такі, що

$$\Phi(v) \geqslant K_1\|v\|^p \quad \forall\, v \in \mathrm{dom}(\Phi);$$

крім того, $\Phi(0) = 0$;

$(\mathcal{A}_4)$ існують сталі $q \in (2, p]$, $K_2 > 0$ такі, що

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant K_2 |v_1 - v_2|^q \quad \forall\, [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi.$$

Розглянемо еволюційну варіаційну нерівність

$$y'(t) + \partial\Phi\big(y(t)\big) \ni f(t), \quad t \in S, \tag{3.92}$$

де $f : S \to V'$ – задана функція.

Означення 3.2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$ *і* $f \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S; V')$. *Функцію* y *називатимемо* розв'язком *варіаційної нерівності* (3.92), *якщо вона задовольняє такі умови:*

1) $y \in W_{p,loc}(S; V)$*;*

2) $y(t) \in D(\partial\Phi)$ *для майже всіх* $t \in S$*;*

3) існує функція $g \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S; V')$ *така, що для майже всіх* $t \in S$ *маємо* $g(t) \in \partial\Phi\big(y(t)\big)$ *і*

$$y'(t) + g(t) = f(t) \quad \text{в } V'.$$

Задачу на знаходження розв'язку варіаційної нерівності (3.92) при заданих Φ і f називатимемо задачею без початкових умов для еволюційної варіаційної нерівності (3.92) або, коротко, задачею $\mathbf{P}(\Phi, f)$, а функцію y – її розв'язком.

Зауваження. Задачу $\mathbf{P}(\Phi, f)$ можна замінити на таку. Нехай K – опукла і замкнена множина в V, $A : V \to V'$ – монотонний, обмежений і семінеперервний оператор такий, що $(A(v), v) \geq \widetilde{K}_1 \|v\|^p \quad \forall v \in V$, де $\widetilde{K}_1 = \mathrm{const} > 0$. Задача полягає у знаходженні функції $y \in W_{p,\mathrm{loc}}(S; V)$ такої, що для майже всіх $t \in S$ маємо $y(t) \in K$ і

$$(y'(t) + A(y(t)), v - y(t)) \geq (f(t), v - y(t)) \quad \forall\, v \in K.$$

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_4)$ *і* $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$. *Тоді задача* $\boldsymbol{P}(\Phi, f)$ *має єдиний розв'язок і він належить простору* $L^\infty_{\mathrm{loc}}(S; V) \cap$

$H^1_{\mathrm{loc}}(S;H)$ *та задовольняє оцінки:*

$$\max_{t\in[t_1,t_2]}|y(t)|^2+\int_{t_1}^{t_2}\|y(t)\|^p\,dt\leqslant C_1\,\delta^{-\frac{2}{p-2}}+C_2\int_{t_1-\delta}^{t_2}|f(t)|^{p'}\,dt, \tag{3.93}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[t_1,t_2]}\|y(t))\|^p+\int_{t_1}^{t_2}|y'(t)|^2\,dt\leqslant C_3\,\delta^{-\frac{p}{p-2}}+2\int_{t_1-\delta}^{t_2}|f(t)|^2\,dt+ \tag{3.94}$$

$$+\,C_4\,\delta^{-1}\int_{t_1-2\delta}^{t_1}|f(t)|^{p'}\,dt\quad\forall t_1,t_2\in S\ (t_1<t_2),\ \forall\delta>0,$$

де $C_i\,(i=\overline{1,4})$ *— додатні сталі, що залежать лише від* K_1*,* p *і* λ*.*

Доведення. Єдиність розв'язку. Припустимо, що задача $\mathbf{P}(\Phi,f)$ має більше одного розв'язку і нехай y_1, y_2 – два (різні) розв'язки задачі $\mathbf{P}(\Phi,f)$. Тоді для кожного $i\in\{1,2\}$ існують функції $g_i\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S;V')$ такі, що для майже всіх $t\in S$ маємо $g_i(t)\in\partial\Phi\big(y_i(t)\big)$ і

$$y_i'(t)+g_i(t)=f(t)\quad\text{в } V',\ i=1,2. \tag{3.95}$$

Покладемо $z:=y_1-y_2$. З рівностей (3.95) для майже всіх $t\in S$ отримаємо

$$z'(t)+g_1(t)-g_2(t)=0\quad\text{в } V'. \tag{3.96}$$

Помноживши рівність (3.96) для майже кожного $t\in S$ скалярно на $z(t)$, дістанемо

$$(z'(t),z(t))+(g_1(t)-g_2(t),y_1(t)-y_2(t))=0. \tag{3.97}$$

На підставі рівності (3.91), умови $(\mathcal{A}_4)$ та того, що $g_i(t)\in\partial\Phi(y_i(t))$ $(i=1,2)$ для майже всіх $t\in S$, отримаємо таку диференціальну нерівність

$$\frac{1}{2}\frac{d|z(t)|^2}{dt}+K_2\big(|z(t)|^2\big)^{q/2}\leqslant 0\quad\text{для майже всіх }\ t\in S. \tag{3.98}$$

З (3.98), врахувавши, що $q/2>1$, та використавши твердження 3.9, отримаємо рівність $z\equiv 0$ на S, тобто, $y_1=y_2$ майже всюди на S. Отримане протиріччя завершує доведення єдиності розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi,f)$.

Існування розв'язку. Доведення існування розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi,f)$ проведемо у три кроки.

Крок 1 (*апроксимація розв'язку*). Спочатку визначимо функціонал $\Phi_H:H\to\mathbb{R}_\infty$ за правилом: $\Phi_H(v):=\Phi(v)$, якщо $v\in V$, і $\Phi_H(v):=+\infty$

в іншому випадку. Відзначимо, що з умов $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, леми IV.5.2 та твердження IV.5.2 монографії [96] випливає, що Φ_H є власним, опуклим і напівнеперервним знизу функціоналом на просторі H, $\mathrm{dom}(\Phi_H) = \mathrm{dom}(\Phi) \subset V$ і $\partial\Phi_H = \partial\Phi \cap (V \times H)$, де $\partial\Phi_H : H \to 2^H$ – субдиференціал функціонала Φ_H. Крім того, з умови $(\mathcal{A}_3)$ випливає, що $0 \in \partial\Phi_H(0)$.

Тепер побудуємо послідовність функцій, що в певному сенсі апроксимують розв'язок задачі $\mathbf{P}(\Phi, f)$.

Нехай $\widehat{f}_k(t) := f(t)$ для $t \in S_k := [-k, 0]$, де $k \in \mathbb{N}$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розглянемо задачу знаходження функції $\widehat{y}_k \in H^1(S_k; H)$ такої, що для майже всіх $t \in S_k$ маємо $\widehat{y}_k(t) \in D(\partial\Phi_H)$ та

$$\widehat{y}_k'(t) + \partial\Phi_H\big(\widehat{y}_k(t)\big) \ni \widehat{f}_k(t) \quad \text{в} \ \ H, \tag{3.99a}$$

$$\widehat{y}_k(-k) = 0. \tag{3.99b}$$

Варіаційна нерівність (3.99a) означає, що існує функція $\widehat{g}_k \in L^2(S_k; H)$ така, що для майже всіх $t \in S_k$ маємо $\widehat{g}_k(t) \in \partial\Phi_H(\widehat{u}_k(t))$ і

$$\widehat{y}_k'(t) + \widehat{g}_k(t) = \widehat{f}_k(t) \quad \text{в} \ \ H. \tag{3.100}$$

Далі використаємо таке твердження.

Твердження 3.12 ([60, твердження 3.12], [96, твердження IV.5.2])**.** *Нехай $T > 0$, $\widetilde{f} \in L^2(0, T; H)$ і $z_0 \in \mathrm{dom}(\Phi)$. Тоді існує єдина функція $z \in H^1(0, T; H)$ така, що $z(0) = z_0$ і для майже всіх $t \in (0, T)$ правильними є включення $z(t) \in D(\partial\Phi)$ та*

$$z'(t) + \partial\Phi\big(z(t)\big) \ni \widetilde{f}(t) \quad \textit{в} \ \ H.$$

З твердження 3.12 випливає існування єдиного розв'язку задачі (3.99). Відзначимо, що $D(\partial\Phi_H) \subset \mathrm{dom}(\Phi_H)$, а тому $\widehat{y}_k(t) \in V$ для майже всіх $t \in S_k$. Згідно з означенням субдиференціалу функціоналу і того, що $\widehat{g}_k(t) \in \partial\Phi(\widehat{y}(t))$ для майже всіх $t \in S_k$, маємо

$$\Phi(0) \geq \Phi(\widehat{y}_k(t)) + (\widehat{g}_k(t), 0 - \widehat{y}_k(t)) \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S_k.$$

Звідси та з умов $(\mathcal{A}_3)$ маємо

$$(\widehat{g}_k(t), \widehat{y}_k(t)) \geq \Phi(\widehat{y}_k(t)) \geq K_1 \|\widehat{y}_k(t)\|^p \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S_k. \tag{3.101}$$

Оскільки ліва частина цієї низки нерівностей належить до $L^1(S_k)$, то $\widehat{y_k}$ належить до $L^p(S_k;V)$.

Продовжимо для кожного $k\in\mathbb{N}$ функції $\widehat{f_k}, \widehat{y_k}$ і $\widehat{g_k}$ на весь проміжок S, поклавши їх рівними 0 на $(-\infty,-k]$, і позначимо ці продовження, відповідно, через f_k, y_k та g_k. Зі сказаного вище випливає, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція y_k належить до $L^p(S;V)$, її похідна y_k' належить до $L^2(S;H)$ і для майже всіх $t\in S$ правильними є включення $g_k(t)\in\partial\Phi_H\big(y_k(t)\big)$ і рівність (див. (3.100))

$$y_k' + g_k(t) = f_k(t) \quad \text{в} \quad H. \tag{3.102}$$

Для того, щоб показати збіжність послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$ до розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi;f)$ нам будуть потрібні деякі оцінки функцій y_k, $k\in\mathbb{N}$.

Крок 2 (*оцінки апроксимуючих розв'язків*).

Нехай $\theta_1\in C^1(\mathbb{R})$ така, що $\theta_1(t)=0$ при $t\in(-\infty,-1]$, $\theta_1(t)=e^{\frac{t^2}{t^2-1}}$ при $t\in(-1,0)$, $\theta_1(t)=1$ при $t\in[0,+\infty)$. Очевидно, що $\theta_1'(t)\ge 0$ для будь-якого $t\in\mathbb{R}$ і

$$\sup_{t\in(-1,0)}\frac{\theta_1'(t)}{\theta_1^{\nu}(t)} = C_5(\nu) < \infty \tag{3.103}$$

для кожного $0<\nu<1$, де $C_5(\nu)>0$ — стала, що залежить лише від ν.

Нехай t_1, $t_2\in S$ ($t_1<t_2$), $\delta>0$ — довільні фіксовані числа. Покладемо

$$\theta(t) := \theta_1((t-t_1)/\delta) \quad \forall t\in S.$$

Нехай $k\in\mathbb{N}$ — яке-небудь число. Очевидно, що $\theta y_k\in L^2(S;H)$. Домножимо (3.102) скалярно на θy_k та проінтегруємо за t від $t_1-\delta$ до $\tau\in[t_1,t_2]$. У результаті отримаємо

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau}\theta(t)(y_k'(t),y_k(t))\,dt + \int_{t_1-\delta}^{\tau}\theta(t)(g_k(t),y_k(t))\,dt =$$
$$= \int_{t_1-\delta}^{\tau}\theta(t)(f_k(t),y_k(t))\,dt.$$

Звідси, використавши рівність (3.91), матимемо

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau}\theta(t)\frac{d}{dt}|y_k(t)|^2\,dt + 2\int_{t_1-\delta}^{\tau}\theta(t)(g_k(t),y_k(t))\,dt =$$
$$= 2\int_{t_1-\delta}^{\tau}\theta(t)(f_k(t),y_k(t))\,dt. \tag{3.104}$$

Інтегруючи частинами перший доданок лівої частини рівності (3.104), дістанемо

$$|y_k(\tau)|^2 + 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(g_k(t), y_k(t))\,dt =$$
$$= \int_{t_1-\delta}^{t_1} \theta'(t)|y_k(t)|^2\,dt + 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(f_k(t), y_k(t))\,dt. \tag{3.105}$$

Враховуючи означення y_k та (3.101), отримаємо, що

$$(g_k(t), y_k(t)) \geq \Phi\big(y_k(t)\big) \geq K_1\|y_k(t)\|^p \quad \text{для майже всіх } t \in S. \tag{3.106}$$

Використовуючи (3.106), оцінимо другий доданок лівої частини (3.105) у такий спосіб:

$$2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(g_k(t), y_k(t))\,dt \geqslant 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\Phi\big(y_k(t)\big)\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\Big(\Phi\big(y_k(t)\big) + K_1\|y_k(t)\|^p\Big)\,dt. \tag{3.107}$$

Оцінимо тепер перший доданок правої частини рівності (3.105), використовуючи (3.87), (3.103) та нерівність Юнга:

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t)|y_k(t)|^2\,dt \leqslant \lambda^{-1}\int_{t_1-\delta}^{t_1} \theta'(t)\|y_k(t)\|^2\,dt =$$
$$= \lambda^{-1}\int_{t_1-\delta}^{t_1} \frac{\theta'(t)}{\theta^{2/p}(t)}\theta^{2/p}(t)\|y_k(t)\|^2\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\int_{t_1-\delta}^{t_1} \theta(t)\|y_k(t)\|^p\,dt + C_6\varepsilon^{-\frac{2}{p-2}}\int_{t_1-\delta}^{t_1} \big(\theta'(t)\theta^{-2/p}(t)\big)^{\frac{p}{p-2}}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\int_{t_1-\delta}^{t_1} \theta(t)\|y_k(t)\|^p\,dt + C_7\,(\delta\varepsilon)^{-\frac{2}{p-2}}, \tag{3.108}$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число, λ — стала з нерівності (3.87), а C_6 і C_7 — додатні сталі, що залежать лише від λ і p.

Тепер оцінимо другий доданок правої сторони рівності (3.105), застосовуючи нерівність Юнга та нерівність (3.89). У результаті отримаємо

$$2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(f_k(t), y_k(t))\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \eta\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\|y_k(t)\|^p\,dt + C_8\eta^{\frac{1}{1-p}}\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)|f_k(t)|^{p'}\,dt, \tag{3.109}$$

де $C_8 > 0$ — стала, що залежить тільки від p і λ.

З (3.105), використовуючи (3.107) – (3.109) при $\varepsilon = \eta = K_1/4$, отримаємо

$$|y_k(\tau)|^2 + \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\Big(\Phi\big(y_k(t)\big) + \|y_k(t)\|^p\Big)\,dt \leqslant$$
$$\leqslant C_9\delta^{-\frac{2}{p-2}} + C_{10}\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)|f_k(t)|^{p'}\,dt,$$

де C_9 та C_{10} — деякі додатні сталі, що залежать лише від K_1, p і λ.

Звідси, в силу довільності $\tau \in [t_1, t_2]$ і означення θ, отримаємо

$$\max_{t\in[t_1,t_2]} |y_k(t)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} \|y_k(t)\|^p\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \Phi\big(y_k(t)\big)\,dt \leqslant$$
$$\leqslant 2\,C_9\delta^{-\frac{2}{p-2}} + 2\,C_{10}\int_{t_1-\delta}^{t_2} |f_k(t)|^{p'}\,dt. \tag{3.110}$$

З (3.110) та означення функції f_k, в силу довільності t_1, $t_2 \in S$ та $\delta > 0$, випливає, що

$$\text{послідовність } \{y_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^\infty_{\rm loc}(S;H) \text{ і в } L^p_{\rm loc}(S;V), \tag{3.111}$$
$$\text{послідовність } \big\{\Phi\big(y_k(\cdot)\big)\big\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^1_{\rm loc}(S). \tag{3.112}$$

Тепер знайдемо оцінки функцій y_k', $k \in \mathbb{N}$. Нехай t_1, t_2 і δ — довільні дійсні числа такі, що t_1, $t_2 \in S$, $t_1 < t_2$, і $\delta > 0$, θ – така ж функція, як вище. Домножимо (3.102) скалярно на функцію $\theta y_k' \in L^2_{\rm loc}(S;H)$ та проінтегруємо отриману рівність за t від $t_1 - \delta$ до $\tau \in [t_1, t_2]$:

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)|y_k'(t)|^2\,dt + \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(g_k(t), y_k'(t))\,dt = \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(f_k(t), y_k'(t))\,dt. \tag{3.113}$$

Використаємо таке твердження

Твердження 3.13 ([96, лема IV.4.3]). *Нехай $z \in H^1(a,b;H)$, $(-\infty < a < b < +\infty)$, і існує функція $g \in L^2(a,b;H)$ така, що $g(t) \in \partial\Phi\big(z(t)\big)$ для майже всіх $t \in (a,b)$. Тоді функція $\Phi\big(z(\cdot)\big)$ — абсолютно неперервна на відрізку $[a,b]$ і для будь-якої функції $h : [a,b] \to H$ такої, що $h(t) \in \partial\Phi\big(z(t)\big)$, виконується рівність*

$$\frac{d}{dt}\Phi\big(z(t)\big) = (h(t), z'(t)) \quad \text{для майже всіх } t \in (a,b).$$

Врахувавши, що $g_k \in L^2(t_1-\delta,t_2;H)$, з рівності (3.113) і твердження 3.13 випливає, що функція $\Phi_H\big(y_k(\cdot)\big)$ є абсолютно неперервною на $[t_1-\delta,t_2]$ і

$$\frac{d}{dt}\Phi_H\big(y_k(t)\big) = (g_k(t), y_k'(t)) \quad \text{для майже всіх } t\in(t_1-\delta,t_2). \tag{3.114}$$

Використовуючи (3.114), можемо оцінити другий доданок лівої частини рівності (3.113):

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau}\theta(t)(g_k(t),y_k'(t))\,dt = \int_{t_1-\delta}^{\tau}\theta(t)\frac{d}{dt}\Phi_H\big(y_k(t)\big)\,dt =$$
$$= \Phi_H\big(y_k(\tau)\big) - \int_{t_1-\delta}^{\tau}\theta'(t)\Phi_H\big(y_k(t)\big)\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \Phi_H\big(y_k(\tau)\big) - \max_{t\in[t_1-\delta,t_1]}\theta'(t)\int_{t_1-\delta}^{t_1}\Phi_H\big(y_k(t)\big)\,dt. \tag{3.115}$$

Тепер, використовуючи нерівність Коші, оцінимо праву частину рівності (3.113):

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau}\theta(t)(f_k(t),y_k'(t))\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{t_1-\delta}^{\tau}\theta(t)|f_k(t)|^2\,dt + \frac{1}{2}\int_{t_1-\delta}^{\tau}\theta(t)|y_k'(t)|^2\,dt. \tag{3.116}$$

З (3.113), врахувавши (3.115), (3.116) і те, що

$$\max_{t\in[t_1-\delta,t_1]}\theta'(t) \le C_{12}/\delta, \quad \text{де} \quad C_{12} := \max_{s\in[-1,0]}\theta_1'(s),$$

матимемо оцінку

$$\int_{t_1}^{\tau}|y_k'(t)|^2\,dt + \Phi_H\big(y_k(\tau)\big) \leqslant \int_{t_1-\delta}^{\tau}|f_k(t)|^2\,dt + 2C_{12}\delta^{-1}\int_{t_1-\delta}^{t_1}\Phi_H\big(y_k(t)\big)\,dt.$$

Звідси, врахувавши довільність $\tau\in[t_1,t_2]$, означення функціоналу Φ_H і умову $(\mathcal{A}_3)$ (нагадаємо, що $y_k(t)\in V$ для майже всіх $t\in S$) маємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[t_1,t_2]}||y_k(t)||^p + \int_{t_1}^{t_2}|y_k'(t)|^2\,dt \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_{t_1-\delta}^{t_2}|f_k(t)|^2\,dt + 4C_{12}\delta^{-1}\int_{t_1-\delta}^{t_1}\Phi\big(y_k(t)\big)\,dt. \tag{3.117}$$

З (3.117), врахувавши (3.110), отримаємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[t_1,t_2]}\|y_k(t))\|^p + \int_{t_1}^{t_2}|y_k'(t)|^2\,dt \leqslant C_3\,\delta^{-\frac{p}{p-2}} + 2\int_{t_1-\delta}^{t_2}|f_k(t)|^2\,dt +$$

$$+C_4\,\delta^{-1}\int\limits_{t_1-2\delta}^{t_1}|f_k(t)|^{p'}\,dt. \tag{3.118}$$

З оцінки (3.118) та означення f_k, в силу довільності чисел t_1, $t_2\in S$ та $\delta>0$, випливає, що

$$\text{послідовність } \{y_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;V), \tag{3.119}$$

$$\text{послідовність } \{y'_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^2_{\mathrm{loc}}(S;H). \tag{3.120}$$

З (3.102), (3.120) та означення функції f_k отримуємо, що

$$\text{послідовність } \{g_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^2_{\mathrm{loc}}(S;H). \tag{3.121}$$

Крок 3 (*граничний перехід*). Оскільки V — рефлексивний банахів простір, а H — гільбертів простір, причому V вкладено в H компактно, то з (3.111), (3.119)–(3.121) і твердження 3.11 випливає, що існують функції $y\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;V)\cap H^1_{\mathrm{loc}}(S;H)\in C(S;H)$, $g\in L^2(S;H)$ та підпослідовність підпослідовності $\{y_k,g_k\}_{k=1}^{+\infty}$ (за якою ми збережемо позначення $\{y_k,g_k\}_{k=1}^{+\infty}$) такі, що

$$y_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}y \quad \ast\text{-слабко в } L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;V),\ \text{слабко в } L^p_{\mathrm{loc}}(S;V)\ \text{ і слабко в } H^1_{\mathrm{loc}}(S;H), \tag{3.122}$$

$$y_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}y \quad \text{в } C(S;H), \tag{3.123}$$

$$g_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}g \quad \text{слабко в } L^2_{\mathrm{loc}}(S;H). \tag{3.124}$$

Нехай $v\in H,\varphi\in D(-\infty,0)$ – довільні. Для майже всіх $t\in S$ помножимо рівність (3.102) на v, а потім отриману рівність помножимо на φ і проінтегруємо за t по S. У результаті отримаємо рівність

$$\int\limits_S (y'_k(t),v)\varphi(t)\,dt+\int\limits_S (g_k(t),v)\varphi(t)\,dt=\int\limits_S (f_k(t),v)\varphi(t)\,dt,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{3.125}$$

Перейдемо в (3.125) до границі при $k\to\infty$, врахувавши при цьому (3.122), (3.124) і збіжність послідовності $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ до f в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$. У результаті, врахувавши, що $v\in H,\varphi\in D(-\infty,0)$ – довільні, отримаємо для майже всіх $t\in S$ рівність

$$y'(t)+g(t)=f(t)\quad \text{в } H.$$

Для завершення доведення теореми залишилося показати, що $y(t) \in D(\partial\Phi)$ і $g(t) \in \partial\Phi\big(y(t)\big)$ для майже всіх $t \in S$.

Нехай $k \in \mathbb{N}$ – яке-небудь число. Оскільки $g_k(t) \in \partial\Phi_H\big(y_k(t)\big)$ для кожного $t \in S \setminus \tilde{S}_k$, де $\tilde{S}_k \subset S$ – множина нульової міри, то з монотонності субдиференціалу $\partial\Phi_H$ випливає, що для всіх $t \in S \setminus \tilde{S}_k$ виконується нерівність

$$(g_k(t) - v^*, y_k(t) - v) \geqslant 0 \quad \forall\, [v, v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{3.126}$$

Нехай $\tau \in S$, $h > 0$ — довільні числа. Проінтегруємо (3.126) за t від $\tau - h$ до τ:

$$\int_{\tau-h}^{\tau} (g_k(t) - v^*, y_k(t) - v)\, dt \geqslant 0 \quad \forall\, [v, v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{3.127}$$

Перейдемо тепер в (3.127) до границі при $k \to \infty$, використовуючи при цьому (3.123) і (3.124). У результаті отримаємо

$$0 \leq \int_{\tau-h}^{\tau} (g_k(\tau) - v^*, y_k(t) - v)\, dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\tau-h}^{\tau} (g(t) - v^*, y(t) - v)\, dt \geq 0\ \forall [v, v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{3.128}$$

З монографії [20, теорема 2, с. 192] і (3.128) випливає, що для кожного $[v, v^*] \in \partial\Phi_H$ існує множина $R_{[v,v_*]} \subset S$ нульової міри така, що для всіх $\tau \in S \setminus R_{[v,v_*]}$ маємо

$$0 \leq \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} \int_{\tau-h}^{\tau} \big(g(t) - v^*, y(t) - v\big)\, dt = \big(g(\tau) - v^*, y(\tau) - v\big) \geq 0. \tag{3.129}$$

Покажемо, що існує множина нульової міри $R \subset S$ така, що для будь-якого $\tau \in S \setminus R$ нерівність (3.129) виконується для всіх $[v, v^*] \in \partial\Phi_H$. Оскільки V та V' – сепарабельні простори, то існує зліченна множина $F \subset \partial\Phi_H$, яка є щільною в $\partial\Phi_H$. Позначимо $R := \bigcup\limits_{[v,v^*]\in F} R_{[v,v_*]}$. Оскільки множина F зліченна, а зліченне об'єднання множин міри нуль є множиною міри нуль, то R має нульову міру. Отож, для будь-якого $\tau \in S \setminus R$ нерівність (3.129) виконується для всіх $[v, v^*] \in F$. Нехай $[v, v^*]$ – довільний елемент з $\partial\Phi_H$. Тоді зі щільності F у $\partial\Phi_H$ маємо існування послідовності $\{[v_l, v_l^*]\}_{l=1}^{\infty}$ такої, що $v_l \to v$ у V, $v_l^* \to v^*$ у V' та для будь-якого $\tau \in S \setminus R$ виконується

$$(g(\tau) - v_l^*, y(\tau) - v_l) \geqslant 0 \quad \forall l \in \mathbb{N}. \tag{3.130}$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $l \to \infty$, отримаємо (3.129) для кожного $t \in S \setminus R$, що треба було показати. Отож, для майже всіх $t \in S$

маємо

$$(g(t) - v^*, y(t) - v) \geqslant 0 \quad \forall\, [v, v^*] \in \partial\Phi_H.$$

Звідси, в силу максимальної монотонності $\partial\Phi_H$, випливає, що $[y(t), g(t)] \in \partial\Phi_H$ для майже всіх $t \in S$.

Оцінки (3.93), (3.94) розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi; f)$ безпосередньо випливають з оцінок (3.110) і (3.118), збіжностей (3.122) і (3.123) та твердження 3.10. ∎

3.2.3 Формулювання задачі оптимального керування та існування її розв'язку

Нехай H_* – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{H_*}$ та нормою $\|\cdot\|_{H_*} := \sqrt{(\cdot,\cdot)_{H_*}}$. Розглядаємо простір $U := \big\{u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H_*) \mid \int\limits_S \omega(t)\|u(t)\|^2_{H_*}\,dt < \infty\big\}$, де функція ω з простору $C(S)$ така, що $\omega(t) > 0 \ \forall t \in S$. Він є гільбертовим із скалярним добутком $(u_1, u_2)_U := := \int\limits_S \omega(t)(u_1(t), u_2(t))_{H_*}\,dt,\ u_1, u_2 \in U,$ тоді $\|u\|_U := \Big(\int\limits_S \omega(t)\|u(t)\|^2_{H_*}\,dt\Big)^{1/2}$, $u \in U$. Вважаємо, що U є простором керувань. Нехай U_∂ – опукла та замкнена підмножина в U – множина допустимих керувань.

Припустимо, що

$(\mathcal{C})$ $\ C \in \mathcal{L}\Big(H_*; H\Big)$;

$(\mathcal{F})$ $\ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$.

Зауважимо, що оператор C (див. умову $(\mathcal{C})$) можна трактувати як оператор $C : L^2_{\mathrm{loc}}(S; H_*) \to L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$, визначивши його за правилом: для будь-якого елемента $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H_*)$ під Cu розуміємо елемент з $L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ такий, що $(Cu)(t) = Cu(t)$ для майже кожного $t \in S$. Так введений оператор є лінійним та неперервним. Справді, лінійність цього оператора є очевидною, а з умови $(\mathcal{C})$ випливає, що для кожного $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H_*)$ та майже всіх $t \in S$ маємо нерівність

$$|Cu(t)|^2 \leq \|C\|^2_{\mathcal{L}(H_*,H)}\|u(t)\|^2_{H_*}.$$

Проінтегрувавши цю нерівність від t_1 до t_2, де $t_1, t_2 \in S$ – довільні, отримаємо нерівність

$$\int_{t_1}^{t_2} |Cu(t)|^2\,dt \leq \|C\|^2_{\mathcal{L}(H_*,H)} \int_{t_1}^{t_2} \|u(t)\|^2_{H_*}\,dt,$$

звідки випливає неперервність оператора C.

Стан керованої еволюційної системи $y(u) = y(\cdot; u)$ для заданого керування $u \in U_\partial$ описуємо розв'язком задачі $\mathbf{P}(\Phi, f{+}Cu)$, тобто, задачі без початкових умов для еволюційної варіаційної нерівності

$$y'(t) + \partial\Phi\big(y(t)\big) \ni f(t) + Cu(t), \quad t \in S. \tag{3.131}$$

На підставі теореми 3.3 маємо і тільки одну функцію $y(u)$, яка є розв'язком задачі $\mathbf{P}(\Phi, f + Cu)$.

Нехай $G : C(S; H) \to \mathbb{R}$ – функціонал, який задовольняє умову:

$(\mathcal{G})$ G є напівнеперервним знизу в $C(S; H)$ і, крім того, $\inf\limits_{z \in C(S;H)} G(z) > -\infty$.

Функцію вартості $J : U \to \mathbb{R}$ візьмемо у вигляді

$$J(u) := G(y(u)) + \mu \|u\|_U^2, \quad u \in U_\partial, \tag{3.132}$$

де $\mu > 0$ – стала, причому $\mu > 0$, якщо U_∂ – необмежена.

Задача оптимального керування, яку ми розглядаємо, полягає у відшукання таких елементів $u^* \in U_\partial$, що

$$J(u^*) = \inf_{u \in U_\partial} J(u). \tag{3.133}$$

Цю задачу коротко називатимемо задачею (3.133), а її розв'язки — *оптимальними керуваннями.*

Теорема 3.4. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_4)$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{F})$ *та* $(\mathcal{G})$. *Тоді множина розв'язків задачі* (3.133) *є непорожньою і слабко замкненою* (*в* U).

Доведення. Нехай $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ – мінімізуюча послідовність елементів з U_∂, тобто,
$J(u_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} J_* := \inf\limits_{u \in U_\partial} J(u) > -\infty$. Звідси випливає, що послідовність $\big\{J(u_k)\big\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою, а це означає, беручи до уваги (3.132), що послідовність $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою в просторі U, тобто,

$$\|u_k\|_U \le C_{13} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{3.134}$$

де стала $C_{13} > 0$ не залежить від k.

Оскільки $C \in \mathcal{L}(H_*; H)$, то послідовність $\{Cu_k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою в просторі $L^2_{\text{loc}}(S; H)$. Справді, враховуючи (3.134), для довільних $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ маємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} |Cu_k(t)|^2 \, dt \leq \|C\|_{\mathcal{L}(H_*;H)} \int\limits_{t_1}^{t_2} \|u_k\|_{H_*} dt \leq$$

$$\leq \|C\|_{\mathcal{L}(H_*;H)} \sup_{t \in [t_1,t_2]} (1/\omega(t)) \int_S \omega(t) \|u_k(t)\|^2 dt \leq C_{14} \|u_k\|_U \leq C_{15}, \qquad (3.135)$$

де C_{14}, C_{15} – додатні сталі, що не залежать від k.

Нехай для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $y_k := y(u_k)$ є розв'язком задачі $\mathbf{P}(\Phi; f + Cu_k)$, тобто, правильна така варіаційна нерівність

$$y_k'(t) + \partial\Phi\big(y_k(t)\big) \ni f(t) + Cu_k(t), \quad t \in S. \qquad (3.136)$$

Згідно з означенням 3.2 та теоремою 3.3, враховуючи умови $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{F})$, для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо, що $y_k \in L^{\infty}_{\text{loc}}(S; V) \cap H^1_{\text{loc}}(S; H)$, $y_k(t) \in D(\partial\Phi)$ для майже всіх $t \in S$, а також існує функція $g_k \in L^{p'}_{\text{loc}}(S; H)$ така, що для майже всіх $t \in S$ маємо $g_k(t) \in \partial\Phi(y_k(t))$ і

$$y_k'(t) + g_k(t) = f(t) + Cu_k(t) \quad \text{в} \quad H. \qquad (3.137)$$

Крім того, для довільних $t_1, t_2 \in S \, (t_1 < t_2)$ (при $\delta = 1$) правильні оцінки

$$\max_{t \in [t_1,t_2]} |y_k(t)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} \|y_k(t)\|^p \, dt \leqslant C_1 + C_2 \int_{t_1-1}^{t_2} \big(|f(t)| + |Cu_k(t)|\big)^{p'} dt, \qquad (3.138)$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in [t_1,t_2]} \|y_k(t))\|^p + \int_{t_1}^{t_2} |y_k'(t)|^2 \, dt \leqslant C_3 + 2 \int_{t_1-1}^{t_2} \big(|f(t)| + |Cu_k(t)|\big)^2 dt +$$

$$+ C_4 \int_{t_1-2}^{t_1} \big(|f(t)| + |Cu_k(t)|\big)^{p'} dt \qquad \forall t_1, t_2 \in S \ (t_1 < t_2), \qquad (3.139)$$

де C_i $(i = \overline{1,4})$ — додатні сталі, що залежать лише від K_1, p і λ.

З оцінок (3.135), (3.138) і (3.139) отримуємо, що

$$\text{послідовність } \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ обмежена в } L^{\infty}(S; V), \qquad (3.140)$$

$$\text{послідовність } \{y_k'\}_{k=1}^{\infty} \text{ обмежена в } L^2_{\text{loc}}(S; H). \qquad (3.141)$$

З (3.137), враховуючи (3.135), (3.141) і $(\mathcal{F})$, маємо, що

$$\text{послідовність } \{g_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ обмежена в } L^2_{\mathrm{loc}}(S;H). \tag{3.142}$$

Оскільки V і H є рефлексивними просторами, то з (3.134), (3.140), (3.141), (3.142), враховуючи твердження 2.1, отримуємо існування підпослідовності послідовності $\{u_k, y_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$ (за цією підпослідовністю залишаємо позначення $\{u_k, y_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$) і функцій $u^* \in U_\partial$, $y \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;V) \cap H^1_{\mathrm{loc}}(S;H) \subset C(S;H)$ та $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ таких, що

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u^* \quad \text{слабко в} \quad U, \tag{3.143}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad *\text{-слабко в} \ \ L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;V), \quad \text{слабко в} \ \ H^1_{\mathrm{loc}}(S;H), \tag{3.144}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{в} \quad C(S;H), \tag{3.145}$$

$$g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S;H). \tag{3.146}$$

Перейдемо в (3.137) до границі при $k \to \infty$, врахувавши при цьому (3.143) – (3.146), аналогічно, як ми це робили у випадку рівності (3.102). У результаті для майже всіх $t \in S$ отримаємо рівність

$$y'(t) + g(t) = f(t) + Cu^*(t) \quad \text{в } H.$$

Аналогічно як при доведенні теореми 3.3 показуємо, що $y(t) \in D(\partial\Phi)$ і $g(t) \in \partial\Phi\big(y(t)\big)$ для майже всіх $t \in S$. Отож, функція y є розв'язком задачі $\mathbf{P}(\Phi; f + Cu^*)$.

Залишилось показати, що u^* є мінімізуючим елементом функціоналу J. Справді, оскільки функціонал G є напівнеперервним знизу в $C(S;H)$, то з (3.145) випливає, що

$$\varliminf_{k\to\infty} G(y_k) \geq G(y). \tag{3.147}$$

Також з (3.144) і твердження 3.10 маємо

$$\varliminf_{k\to\infty} \|u_k\|_U \geq \|u^*\|_U. \tag{3.148}$$

З (3.132), (3.147), (3.148) випливає $J_* = \lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) \geq \varliminf\limits_{k\to\infty} G(y_k) + \mu \varliminf\limits_{k\to\infty} \|u_k\|_U \geq J(u^*)$. Отже, ми показали, що u^* є розв'язком задачі (3.133), тобто, є оптимальним керуванням.

Покажемо, що множина оптимальних керувань задачі (3.133) є слабко замкненою. Справді, нехай $\{u_k^*\}$ – послідовність розв'язків задачі (3.133) така, що $u_k^* \to u^*$ слабко в $L^\infty(Q)$. Аналогічно, як було зроблено, вище показуємо, що $\varliminf\limits_{k\to\infty} J(u_k^*) \geq J(u^*)$. Але $J(u_k^*) = \inf\limits_{u\in U_\partial} J(u)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Отже, u^* є розв'язком задачі (3.133). ∎

Висновки до розділу 3

У розділі 3 встановлено достатні умови існування розв'язків задач оптимального керування системами, стани яких описуються слабко та сильно нелінійними варіаційними нерівностями без початкових умов. Розглянуті випадки, коли керування є як у правих частинах так і у коефіцієнтах варіаційних нерівностей.

Розділ 4

Оптимальне керування в задачах без початкових умов для еволюційних рівнянь із сильним виродженням в початковий момент часу

У цьому розділі розглядаємо задачі оптимального керування еволюційними системами, стан яких визначається розв'язками еволюційних рівнянь, які задані на скінченому часовому проміжку і вироджуються в початковий момент. Такого типу рівняння розглядалися в багатьох роботах (див., наприклад, [16, 49, 73]).

Основні результати розділу опубліковано в працях [9, 10, 33].

4.1 Абстрактні еволюційні рівняння

4.1.1 Основні позначення та допоміжні факти

Спочатку дамо означення потрібних нам далі просторів функцій і розподілів. Нехай X — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і нормою $\|\cdot\|_X$, $T>0$ — довільне задане число, $I:=(0,T]$ — числовий проміжок. Під $L^2_{\rm loc}(I;X)$ розумітимемо лінійний простір визначених на I зі значеннями в X функцій, які є вимірними і для будь-якого відрізку $[a,b]\subset I$ їх звуження на цей відрізок належать простору $L^2(a,b;X)$. Під $D'(0,T;X)$ розумітимемо простір визначених на $D(0,T)$ зі значеннями в X розподілів, тобто простір лінійних функціоналів на $D(0,T)$ зі значеннями в X ($D(0,T)$ — простір нескінченно диференційовних і фінітних на $(0,T)$ функцій). Легко переконатися, використовуючи інтеграл Бохнера, що простір $L^2_{\rm loc}(I;X)$ можна ототожнити з підпростором простору розподілів $D'(0,T;X)$. Це, зокрема, дозволяє говорити про похідні функцій з $L^2_{\mathrm{loc}}(I;X)$ в сенсі розподілів $D'(0,T;X)$ і належність таких похідних до $L^2_{\mathrm{loc}}(I;X)$.

Через $\mathcal{L}(F;G)$, де F і G — гільбертові простори, позначимо банахів простір лінійних обмежених операторів, що переводять F в G. Під $\mathcal{L}(F)$ розумітимемо $\mathcal{L}(F;F)$.

Нехай V і H — гільбертові простори над полем дійсних чисел з, відповідно, скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_V$ і $(\cdot,\cdot)$ та нормами $\|\cdot\|$ і $|\cdot|$. Припустимо, що простір V вкладається в H щільно і неперервно, тобто V є підмножиною H, замикання V за нормою H збігається з H та існує стала $\lambda > 0$ така, що

$$\lambda|v|^2 \le \|v\|^2 \quad \forall v \in V. \tag{4.1}$$

Нехай V' і H' – спряжені, відповідно, до V та H простори. Вважатимемо (провівши відповідне ототожнення функціоналів), що простір H' є підпростором простору V'. Ототожнивши (на підставі теореми Рісса) простори H та H', отримаємо неперервні та щільні вкладення

$$V \subset H \subset V'. \tag{4.2}$$

Зауважимо, що в цьому випадку $\langle g, v\rangle_V = (g, v)$ для будь-яких $v \in V, g \in H \subset V'$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ — означає дію елемента з простору V' на елемент простору V (канонічний добуток на $V'\times V$). Тому далі вживатимемо позначення $(\cdot,\cdot)$ і замість $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$. Також використовуватимемо позначення $(\cdot,\cdot)_{V'}, \|\cdot\|_*$ для, відповідно, скалярного добутку і норми в V'.

Через φ позначимо функцію з простору $C([0,T])$, яка задовольняє умови:

1) $\varphi(0) = 0$; 2) $\varphi(t) > 0$ при $t \in (0,T]$; 3) $\int_0^T [\varphi(s)]^{-1} ds = +\infty$.

Введемо ще деякі функційні простори. Якщо X — гільбертів простір, $\omega \in \mathbb{R}$, а $\alpha \in C(I),\ \alpha(t) > 0\ \forall t \in I,$ то позначимо

$$L^2_{\varphi,\omega,\gamma}(I;X) := \Big\{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(I;X) \mid \int_I \gamma(t) e^{2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} [\varphi(t)]^{-1} \|f(t)\|^2_X \, dt < \infty \Big\},$$

де $\gamma = \alpha,\ \gamma = 1/\alpha$ або $\gamma = \varphi^2/\alpha$.

Лінійний простір $L^2_{\varphi,\omega,\gamma}(I;X)$ є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L^2_{\varphi,\omega,\gamma}(I;X)} = \int_I \gamma(t) e^{2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} [\varphi(t)]^{-1} (f(t), g(t))_X \, dt.$$

На підставі (4.2) легко переконатися, що простори $L^2_{\mathrm{loc}}(I;V)$, $L^2_{\mathrm{loc}}(I;V')$, $L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V), L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V')$ можна ототожнити з підпросторами простору розподілів $D'(0,T;V')$.

З відомих результатів (див., наприклад, [15, с.177–179]) легко випливає такий факт: якщо функція y з $L^2_{\mathrm{loc}}(I;V)$ має похідну y' з $L^2_{\mathrm{loc}}(I;V')$, то y належить (можливо, після зміни її значень на множині міри нуль) простору $C(I;H)$ і функція $t \to |y(t)|^2$ є абсолютно неперервною на будь-якому відрізку з I, причому виконується рівність

$$\frac{d}{dt}|y(t)|^2 = 2(y'(t), y(t)) \quad \text{для майже всіх} \quad t \in I. \tag{4.3}$$

Введемо простір

$$W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V) := \{y \in L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V) \mid y' \in L^2_{\varphi,\omega,\varphi^2/\alpha}(I;V')\},$$

який є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(y,z)_{W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)} := (y,z)_{L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)} + (y',z')_{L^2_{\varphi,\omega,\varphi^2/\alpha}(I;V')},$$

де y', z' є похідними функцій, відповідно, y, z в сенсі розподілів $D'(0,T;V')$.

Зі сказанного вище випливає, що

$$W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V) \subset C(I;H). \tag{4.4}$$

Крім того, елементи простору $W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$ володіють властивостями, що описані в такому твердженні.

Лема 4.1. *Нехай $y \in W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$, де $\omega \in \mathbb{R}$ — довільне число. Тоді існує $y_0 \geq 0$ таке, що*

$$\lim_{t\to 0} e^{\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds}|y(t)| = y_0,$$

причому, коли

$$\inf_{t\in I} \alpha(t) > 0, \tag{4.5}$$

то $y_0 = 0$.

Крім того, правильною є така оцінка

$$\begin{aligned} e^{2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds}|y(t)|^2 \leq (y_0)^2 + (2\omega\lambda^{-1} + 1)\times \\ \times\Big[\int_0^t \alpha(\tau) e^{2\omega \int_T^\tau \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds}[\varphi(\tau)]^{-1}\|y(\tau)\|^2\,d\tau + \\ + \int_0^t [\alpha(\tau)]^{-1} e^{2\omega \int_T^\tau \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds}\varphi(\tau)\|y'(\tau)\|_*^{\,2}\,d\tau\Big], \quad t \in I, \end{aligned} \tag{4.6}$$

де $\lambda > 0$ *— стала з (4.1).*

Це твердження доведемо пізніше.

4.1.2 Коректність задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь, які сильно вироджуються в початковий момент часу

Нехай $A(t) : V \to V',\ t \in I,$ – сім'я операторів така, що

$(\mathcal{A}_1)$ функція $t \to (A(t)w, \widehat{w})$ вимірна на I для будь-яких $w, \widehat{w} \in V$;

$(\mathcal{A}_2)$ для будь-яких $w \in V$ і $t \in I$ виконуються нерівності

$$(A(t)w, \widehat{w}) \geq \alpha(t)\|w\|^2, \tag{4.7}$$

$$\|A(t)w\|_* \leq \beta(t)\|w\|, \tag{4.8}$$

де $\alpha, \beta \in C(I),\ 0 < \alpha(t) \leq \beta(t)\ \ \forall t \in I.$

Розглянемо рівняння

$$\varphi(t)y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in I, \tag{4.9}$$

де $f \in L^2_{\rm loc}(I; V')$ — задана функція.

Під *розв'язком рівняння* (4.9) розумітимемо функцію $y \in L^2_{\rm loc}(I; V)$, яка має похідну в сенсі розподілів $D'(0, T; V')$ з простору $L^2_{\rm loc}(I; V')$ та задовольняє рівняння (4.9) в просторі $L^2_{\rm loc}(I; V')$.

Для рівняння (4.9) розглянемо *задачу без початкових умов*: знайти його розв'язок, який задовольняє умову

$$e^{\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds}|y(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0+, \tag{4.10}$$

де $\omega \in \mathbb{R}$ — задане число.

Ми далі цю задачу коротко називатимемо задачею (4.9), (4.10).

Теорема 4.1. *Правильні такі два твердження:*

(i) Задача (4.9), (4.10) має не більше одного розв'язку, якщо $\omega \leq \lambda$, *де* $\lambda > 0$ *— стала з нерівності (4.1).*

(ii) *Нехай $\omega < \lambda$ — яке-небудь число, $f \in L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V')$. Крім того, припустимо, що існує стала $M \geq 1$ така, що*

$$\beta(t) \leq M\alpha(t), \quad t \in I. \tag{4.11}$$

Тоді існує (єдиний) розв'язок задачі (4.9), (4.10), він належить простору $W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$ і задовольняє оцінки

$$e^{2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}|y(t)|^2 \leq$$

$$\leq C_1\int_0^t [\alpha(\tau)]^{-1}e^{2\omega \int_T^\tau \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}[\varphi(\tau)]^{-1}\|f(\tau)\|_*^2 d\tau,\ t \in I, \tag{4.12}$$

$$\|y\|_{W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)} \leq C_2\|f\|_{L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V')}, \tag{4.13}$$

де C_1, C_2 — додатні сталі, які залежать тільки від ω, λ і M.

Доведення. Нехай $S := (-\infty, 0]$. Покладемо

$$\theta(t) := \int_T^t \frac{ds}{\varphi(s)},\ t \in I, \tag{4.14}$$

і позначимо через θ^{-1} функцію, яка є оберненою до функції θ.

Введемо лінійний оператор Z, який взаємно однозначно переводить лінійний простір функцій $F := \{h\colon I \to V'\}$ на лінійний простір функцій $\widetilde{F} := \{\widetilde{h}\colon S \to V'\}$ за правилом $Zh = \widetilde{h}$, де $\widetilde{h}(\tau) := h(t)|_{t=\theta^{-1}(\tau)}$, $\tau \in S$, $t \in I$, тобто оператор Z функції з простору F ставить у відповідність функцію з $\widetilde{F}$, отриману з даної в результаті заміни змінних

$$\tau = \theta(t), \quad t \in I, \quad \tau \in S. \tag{4.15}$$

Нехай $\widetilde{\alpha} = Z\alpha$, $\widetilde{\beta} = Z\beta$. Очевидно, що

$$\widetilde{\alpha}(\tau) \leq \widetilde{\beta}(\tau) \quad \forall\, \tau \in S.$$

Для довільних гільбертового простору X зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і нормою $\|\cdot\|_X$, дійсного числа ω та функції $\widetilde{\alpha} \in C(S)$, $\widetilde{\alpha}(\tau) > 0$ при $\tau \in S$, визначимо простір

$$L^2_{\omega,\widetilde{\gamma}}(S;X) := \Big\{\widetilde{f} \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;X) \ \Big| \ \int_S \widetilde{\gamma}(\tau) e^{2\omega \int_0^\tau \widetilde{\alpha}(s)ds} \|\widetilde{f}(\tau)\|_X^2 d\tau < \infty\Big\},$$

де $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\alpha}$ або $\widetilde{\gamma} = 1/\widetilde{\alpha}$.

Цей простір є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(\widetilde{f}, \widetilde{g})_{L^2_{\omega,\widetilde{\gamma}}(S;X)} = \int_S \widetilde{\gamma}(\tau) e^{2\omega \int_0^\tau \widetilde{\alpha}(s)ds} (\widetilde{f}(\tau), \widetilde{g}(\tau))_X d\tau$$

та відповідною йому нормою, яку позначимо через $\|\cdot\|_{L^2_{\omega,\widetilde{\gamma}}(S;X)}$.

Введемо ще простір

$$W_{\omega,\widetilde{\alpha}}(S;V) := \{\widetilde{y} \in L^2_{\omega,\widetilde{\alpha}}(S;V) \mid \widetilde{y}\,' \in L^2_{\omega,1/\widetilde{\alpha}}(S;V')\},$$

який є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(y,z)_{W_{\omega,\widetilde{\alpha}}(S;V)} := (y,z)_{L^2_{\omega,\widetilde{\alpha}}(S;V)} + (y',z')_{L^2_{\omega,1/\widetilde{\alpha}}(S;V')},$$

де y' і z' є похідними функцій, відповідно, y та z в сенсі розподілів $D'(-\infty,0;V')$.

Зауважимо, що звуження оператора Z на підпростори $L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$, $L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V')$, $W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$ простору F є ізометрією на підпростори, відповідно, $L^2_{\omega,\widetilde{\alpha}}(S;V), L^2_{\omega,1/\widetilde{\alpha}}(S;V')$, $W_{\omega,\widetilde{\alpha}}(S;V)$ простору $\widetilde{F}$. Покажемо це на прикладі просторів $L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$ і $L^2_{\omega,\widetilde{\alpha}}(S;V)$. Нехай $y \in L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$ і $\widetilde{y} := Zy$. Враховуючи (4.15), зокрема, співвідношення $dt = \varphi(t)d\tau$, маємо

$$\|y\|^2_{L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)} \equiv \int_I \alpha(t) e^{2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds} [\varphi(t)]^{-1} \|y(t)\|^2\, dt =$$
$$= \int_S \widetilde{\alpha}(\tau) e^{2\omega \int_T^{\theta^{-1}(\tau)} \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds} \|\widetilde{y}(\tau)\|^2\, d\tau =$$
$$= \int_S \widetilde{\alpha}(\tau) e^{2\omega \int_0^\tau \widetilde{\alpha}(s)ds} \|\widetilde{y}(\tau)\|^2\, d\tau \equiv \|\widetilde{y}\|^2_{L^2_{\omega,\widetilde{\alpha}}(S;V)}.$$

Звідси легко випливає те, що потрібно. Аналогічно перевіряємо правильність нашого твердження стосовно інших пар просторів.

Зробимо в задачі (4.9), (4.10) заміну змінних (4.15). У результаті отримаємо задачу

$$y'(\widetilde{y}) + \widetilde{A}(\tau)\widetilde{y}(\tau) = \widetilde{f}(\tau), \quad \tau \in S, \tag{4.16}$$
$$e^{\omega \int_0^\tau \widetilde{\alpha}(s)ds} |\widetilde{y}(\tau)| \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to -\infty, \tag{4.17}$$

де $\widetilde{f} = Zf$, $\widetilde{y} = Zy$, $\widetilde{A}(\tau) = A(t)|_{t=\theta^{-1}(\tau)}, \tau \in S$.

Легко переконатися, що сім'я операторів $\widetilde{A}(\tau)\colon V \to V', \tau \in S$, задовольняє умови:

($\mathcal{A}_1'$) функція $\tau \to (\widetilde{A}(\tau)w, \widehat{w})$ вимірна на S для будь-яких $w, \widehat{w} \in V$;

($\mathcal{A}_2'$) для будь-яких $w \in V$ і $\tau \in S$ виконуються нерівності

$$(\widetilde{A}(\tau)w, w) \geq \widetilde{\alpha}(\tau)\|w\|^2, \qquad \|\widetilde{A}(\tau)w\|_* \leq \widetilde{\beta}(\tau)\|w\|.$$

Відмітимо, що задача (4.16), (4.17) досліджена в роботі [7] і там доведено, що

(i) задача (4.16), (4.17) має не більше одного розв'язку при виконанні умови $\omega \leq \lambda$, де λ — стала з умови (4.1);

(ii) коли $\omega < \lambda$ та існує стала $M \geq 1$ така, що

$$\widetilde{\beta}(t) \leq M\widetilde{\alpha}(t), \quad t \in I,$$

то існує (єдиний) розв'язок задачі (4.16), (4.17), він належить $W_{\omega,\widetilde{\alpha}}(S;V)$ та задовольняє оцінки

$$e^{2\omega\int_0^\tau \widetilde{\alpha}(s)ds}|\widetilde{y}(\tau)|^2 \leq C_1 \int_{-\infty}^{\tau} [\widetilde{\alpha}(\xi)]^{-1} e^{2\omega\int_0^\xi \widetilde{\alpha}(s)ds}\|\widetilde{f}(\xi)\|_*^2 d\xi, \quad \tau \in I, \quad (4.18)$$

$$\|\widetilde{y}\|_{W_{\omega,\widetilde{\alpha}}(S;V)} \leq C_2\|\widetilde{f}\|_{L^2_{\omega,1/\widetilde{\alpha}}(S;V')}, \quad (4.19)$$

де C_1, C_2 — додатні сталі, які залежать тільки від ω, λ і M.

На підставі цих результатів і сказанного вище можна зробити висновок про те, що для завершення доведення нашої теореми нам достатньо перевірити, що з оцінок (4.18) і (4.19) випливають оцінки, відповідно, (4.12) і (4.13). Зауважимо, що оцінка (4.13) безпосередньо випливає з оцінки (4.19) та властивостей оператора Z. Переконаємося в правильності оцінки (4.12). Для цього спочатку в лівій частині оцінки (4.18) зробимо заміну змінної (4.15). Тоді отримаємо

$$e^{2\omega\int_0^\tau \widetilde{\alpha}(s)ds}|\widetilde{y}(\tau)|^2 = e^{2\omega\int_0^{\theta(t)} \widetilde{\alpha}(s)ds}|y(t)|^2 = e^{2\omega\int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}|y(t)|^2. \quad (4.20)$$

Тепер проведемо заміну змінних $\xi = \theta(\eta), \eta \in I, \xi \in S$, в інтегралі правої частини оцінки (4.18):

$$\int_{-\infty}^{\tau}[\widetilde{\alpha}(\xi)]^{-1}e^{2\omega\int_0^{\xi}\widetilde{\alpha}(s)ds}\|\widetilde{f}(\xi)\|_*^2 d\xi =$$

$$= \int_0^{\theta^{-1}(\tau)}[\alpha(\eta)]^{-1}e^{2\omega\int_0^{\theta(\eta)}\widetilde{\alpha}(s)ds}[\varphi(\eta)]^{-1}\|f(\eta)\|_*^2\, d\eta =$$

$$= \int_0^{t}[\alpha(\eta)]^{-1}e^{2\omega\int_T^{\eta}\alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}[\varphi(\eta)]^{-1}\|f(\eta)\|_*^2\, d\xi. \tag{4.21}$$

На підставі рівностей (4.20) і (4.21) та оцінки (4.18) маємо оцінку (4.12). ∎

Доведення леми 4.1. Правильність цього твердження безпосередньо випливає з леми 1 праці [7]. Справді, нехай $y \in W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$, а $\widetilde{y}{:=}Zy$. Як було сказано вище, $\widetilde{y}$ належить простору $W_{\omega,\widetilde{\alpha}}(S;V)$. Тоді з леми 1 праці [7] випливає існування $y_0 \geq 0$ такого, що

$$\lim_{\tau\to-\infty} e^{\omega\int_0^{\tau}\widetilde{\alpha}(s)ds}|\widetilde{y}(\tau)| = y_0, \tag{4.22}$$

причому, коли $\inf_{t\in S}\widetilde{\alpha}(t) > 0$, то $y_0 = 0$. Там же показано, що правильною є оцінка

$$e^{2\omega\int_0^{\tau}\widetilde{\alpha}(s)ds}|\widetilde{y}(\tau)|^2 \leq (y_0)^2 + (2\omega\lambda^{-1}+1)\Big[\int_{-\infty}^{\tau}\widetilde{\alpha}(\eta)e^{2\omega\int_0^{\eta}\widetilde{\alpha}(s)ds}|\widetilde{y}(\eta)|^2\, d\eta +$$

$$+\int_{-\infty}^{\tau}[\widetilde{\alpha}(\eta)]^{-1}e^{2\omega\int_0^{\eta}\widetilde{\alpha}(s)ds}|\widetilde{y}'(\eta)|^2\, d\eta\Big], \quad \tau \in S. \tag{4.23}$$

Для завершення доведення нашого твердження достатньо в (4.22) та (4.23) провести заміну змінних (4.15). ∎

4.1.3 Однозначна розв'язність задачі оптимального керування

Нехай U — гільбертів простір керувань; U_∂ — опукла замкнена множина в U; ω — деяке число; $A(t)\colon V \to V', t \in I,$ — сім'я операторів, яка описана в попередньому пункті; B — лінійний неперервний оператор, який переводить U в $L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V')$, тобто є елементом простору $\mathcal{L}(U;L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V'))$; g — елемент простору $L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V')$.

Стан досліджуваної еволюційної системи $y(v) = y(\cdot;v)$ при заданому керуванні $v \in U$ визначаємо функцією з простору $W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$, що є розв'язком рівняння

$$\varphi(t)y'(t) + A(t)y(t) = g(t) + (Bv)(t), \quad t \in I, \tag{4.24}$$

і задовольняє умову

$$e^{\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} |y(t)| \to 0 \text{ при } t \to 0. \tag{4.25}$$

Нехай $\mathcal{H}$ — гільбертів простір спостережень; $C \in \mathcal{L}(W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V);\mathcal{H})$ — заданий оператор, який визначає спостереження $z(v){:=}Cy(v)$ при керуванні $v \in U$.

Позначимо через N симетричний оператор з простору $\mathcal{L}(U)$, який задовольняє умову:

$$(Nv, v)_U \geq \nu \|v\|_U^2, \quad v \in U, \tag{4.26}$$

де $\nu = \text{const} > 0$.

Прийнявши $\Phi(z,v){:=}\|z - z_0\|_{\mathcal{H}}^2 + (Nv,v)_U$, $(z,v) \in \mathcal{H} \times U$, введемо в розгляд функцію вартості $J(v){:=}\Phi(z(v),v)$, $v \in U$, тобто,

$$J(v) = \|Cy(v) - z_0\|_{\mathcal{H}}^2 + (Nv,v)_U, \quad v \in U, \tag{4.27}$$

де $z_0 \in \mathcal{H}$ — заданий елемент.

Задача оптимального керування, яку ми розглядаємо, полягає у знаходженні елементів $u \in U_\partial$ таких, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{4.28}$$

Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (4.28) і нас цікавитиме питання існування та єдиності розв'язку задачі (4.28).

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, (4.11) *і* $\omega < \lambda$, *де* λ *— стала з нерівності (4.1). Тоді задача (4.28) має єдиний розв'язок і він характеризується варіаційною нерівністю*

$$\Big(Cy(u) - z_0, C\big(y(v) - y(u)\big)\Big)_{\mathcal{H}} + (Nu, v-u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{4.29}$$

При доведенні цієї теореми суттєво будемо опиратися на таке твердження, правильність якого безпосередньо випливає з теореми 1.3 (див. [26, с.18]).

Твердження 4.14. *Нехай* $v \mapsto J(v)\colon U \to \mathbb{R}$ *— строго опуклий і диференційовний функціонал, який у випадку, коли* U_∂ *— необмежена множина, задовольняє умову*

$$J(v) \to +\infty \text{ при } \|v\|_U \to +\infty, \quad v \in U_\partial. \tag{4.30}$$

Тоді існує единий розв'язок задачі (4.28) і він характеризується варіаційною нерівністю

$$J'(u) \cdot (v - u) \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{4.31}$$

Доведення теореми 4.2. Нам достатньо показати, що в нашому випадку виконуються всі умови твердження 4.14.

Нехай $W^*_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$ — лінійний підпростір простору $W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$, який складається функцій, які задовольняють умову (4.10). Легко переконатися, використовуючи лему 4.1 (див. (4.1)), що $W^*_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$ з нормою простору $W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$ є банаховим простором.

Зауважимо, що відображення $y(\cdot) \mapsto A(\cdot)y(\cdot)$ переводить простір $L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$ в простір $L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V')$. Справді, для довільного $y \in L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$ на підставі (4.8) і (4.11) маємо

$$\begin{aligned}
&[\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} [\varphi(t)]^{-1} \|A(t)y(t)\|_*^2 \leq \\
&\leq [\alpha(t)]^{-1} \beta^2(t) e^{2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} [\varphi(t)]^{-1} \|y(t)\|^2 \leq \\
&\leq M^2 \alpha(t) e^{2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} [\varphi(t)]^{-1} \|y(t)\|^2, \quad t \in I.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Оскільки права частина нерівності (4.32) інтегровна по I, то з цієї нерівності випливає, що функція $t \mapsto A(t)y(t)$ належить простору $L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V')$. Оскільки $y' \in L^2_{\varphi,\omega,\varphi^2/\alpha}(I;V')$, то $\varphi y' \in L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V')$. Отож, на підставі сказаного є коректно визначеним оператор $L\colon W^*_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V) \to L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V')$ за правилом

$$(Ly)(t) := \varphi(t)y'(t) + A(t)y(t), \quad t \in I, \quad y \in W^*_{\varphi,\omega}(I).$$

Оскільки ми припустили, що $\omega < \lambda$, то з теореми 4.1 випливає бієктивність оператора L, причому оператор L і обернений до нього $L^{-1}\colon L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V') \to W^*_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$ є неперервними. Справді, для L це легко перевіряється з використанням нерівності (4.32), а для L^{-1} випливає з оцінки (4.13), якщо покласти $y := L^{-1}f$. Отже, оператор L здійснює ізоморфізм між просторами $W^*_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$ і $L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V')$.

З (4.24), (4.25) випливає, що для кожного $v \in U$ стан $y(v)$ системи визначається за правилом

$$y(v) = L^{-1}(g + Bv). \tag{4.33}$$

Звідси, зокрема, випливає, що відображення $v \mapsto y(v) \colon U \to W^*_{\varphi,\omega}(I)$ є афінним і неперервним. В силу цього і наших припущень отримаємо, що функціонал J є строго опуклим і неперервним. Те, що він є і диференційовним, доводиться цілком аналогічно, як це зроблено при доведенні теореми 2 роботи [7]. Диференціал функціоналу J має вигляд

$$J'(v) \cdot h = 2(Cy(v) - z_0, CL^{-1}Bh)_{\mathcal{H}} + 2(Nv, h)_U, \quad v \in U, h \in U. \tag{4.34}$$

Умова (4.30) виконується, оскільки на підставі (4.26) маємо

$$J(v) = \|Cy(v) - z_0\|_H^2 + (Nv, v)_U \geq \nu \|v\|^2, \quad v \in U. \tag{4.35}$$

Зі сказаного і твердження 4.14 випливає, що задача (4.28) має єдиний розв'язок і він характеризується варіаційною нерівністю (4.31). Нерівність (4.31) в нашому випадку, враховуючи (4.34) і те, що $L^{-1}B(v-u) = y(v)-y(u)$ (див. (4.33)), можна записати у вигляді (4.29). ∎

4.1.4 Сукупність співвідношень, які характеризують оптимальне керування у випадку фінального спостереження

Для дальшої конкретизації співвідношень, що характеризують оптимальне керування. Ми розглянемо випадок *фінального спостереження*, тобто виконання умови

$(\mathcal{F})$ $\mathcal{H} = H$, $C = DP$, де $Pz = z(T)$ $\forall z \in W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$, $D \in \mathcal{L}(H)$

(легко переконатися, що $P \in \mathcal{L}(W_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V);H)$).

В цьому випадку нерівність (4.29) матиме вигляд

$$\Big(Dy(T;u) - z_0, D\big(y(T;v) - y(T;u)\big)\Big)_H + (Nu, v-u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{4.36}$$

Оскільки $H = H'$, то з (4.36) маємо

$$(D^*(Dy(T;u) - z_0), y(T;v) - y(T;u))_H + (Nu, v-u)_U \geq 0 \;\; \forall v \in U_\partial, \tag{4.37}$$

де D^* — спряжений до D оператор, тобто D^* — оператор з $\mathcal{L}(H)$ такий, що

$$(Dw, \widehat{w}) = (w, D^*\widehat{w}) \;\; \forall w, \widehat{w} \in H.$$

Для кожного $t \in I$ через $A^*(t)\colon V \to V'$ позначимо спряжений до $A(t)$ оператор, тобто $A^*(t) \in \mathcal{L}(V;V')$ такий, що

$$(A^*(t)w, \widehat{w}) = (A(t)\widehat{w}, w) \quad \forall w, \widehat{w} \in V. \tag{4.38}$$

Введемо в розгляд спряжений стан $t \mapsto p(t;u) \in L^2_{\mathrm{loc}}(I;V) \cap C(I;H)$, як розв'язок задачі Коші

$$-\varphi(t)p'(t) + A^*(t)p(t) = 0 \quad \text{в} \quad D'(I;V'), \tag{4.39}$$

$$p(T) = D^*(Dy(T;u) - z_0). \tag{4.40}$$

Існування та єдиність розв'язку цієї задачі виплиає з відомих результатів, якщо в ній зробити заміну t на $-t$ (див., наприклад, [96, твердження 2.3, с.112]).

Аналогічно, як при доведенні теореми 3 роботи [7], отримуємо такі оцінки розв'язку задачі (4.39), (4.40):

$$|p(t)| \le |p(T)| e^{\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds}, \quad t \in I, \tag{4.41}$$

$$\int_I \alpha(t) e^{-2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} [\varphi(t)]^{-1} \|p(t)\|^2 \, dt \le \big(2\min\{1; 1-\lambda^{-1}\omega\}\big)^{-1} |p(T)|^2, \tag{4.42}$$

$$\int_I [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds} \varphi(t) \|p'(t)\|_*^2 \, dt \le K^2 \big(2\min\{1; 1-\lambda^{-1}\omega\}\big)^{-1} |p(T)|^2. \tag{4.43}$$

Тепер для майже кожного $t \in I$ скалярно домножимо (4.39) на $[\varphi(t)]^{-1}(y(t;v) - y(t;u)), v \in U_\partial,$ і проінтегруємо отриману рівність за t від $\tau \in (0,T)$ до $T:$

$$-\int_\tau^T \Big(\frac{d}{dt} p(t;u),\ y(t;v) - y(t;u)\Big) dt +$$

$$+ \int_\tau^T \big(A^*(t)p(t;u),\ (y(t;v) - y(t;u)\big)[\varphi(t)]^{-1} dt = 0. \tag{4.44}$$

Звідси після відповідних перетворень отримаємо

$$(p(T;u), y(T;v) - y(T;u)) = (p(\tau;u), y(\tau;v) - y(\tau;u)) +$$

$$+ \int_\tau^T \Big(p(t;u), \frac{d}{dt}(y(t;v) - y(t;u)) + [\varphi(t)]^{-1} A(t)(y(t;v) - y(t;u))\Big) dt. \tag{4.45}$$

З рівностей

$$\varphi(t)y'(t;v) + A(t)y(t;v) = g(t) + (Bv)(t), \quad t \in I,$$
$$\varphi(t)y'(t;u) + A(t)y(t;u) = g(t) + (Bu)(t), \quad t \in I$$

випливає рівність

$$\big(y(t;v) - y(t;u)\big)' + [\varphi(t)]^{-1}A(t)(y(t;v) - y(t,u)) =$$
$$= [\varphi(t)]^{-1}(B(v-u))(t), \quad t \in I. \tag{4.46}$$

З (4.45), (4.46) легко здобудемо

$$(p(T;u), y(T;v) - y(T;u)) = (p(\tau;u), y(\tau;v) - y(\tau;u)) +$$
$$+ \int_\tau^T \big(p(t;u), (B(v-u))(t)\big)[\varphi(t)]^{-1}dt. \tag{4.47}$$

Покажемо, що в (4.47) можна перейти до границі при $\tau \to 0$. На підставі (4.25) і (4.41):

$$|(p(\tau;u), y(\tau;v) - y(\tau;u))| \le |p(\tau;u)| \cdot |y(\tau;v) - y(\tau;u)| \le$$
$$\le |p(T;u)| e^{\omega \int_T^\tau \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}(|y(\tau;v)| + |y(\tau;u)|) = |p(T;u)|\gamma(\tau), \tag{4.48}$$

де $\gamma(t), t \in I,$ — функція така, що $\gamma(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Легко бачити, що

$$\int_\tau^T \Big|\big(p(t;u), (B(v-u))(t)\big)\Big|[\varphi(t)]^{-1}dt \le$$
$$\le \int_\tau^T \|p(t;u)\| \|(B(v-u))(t)\|_*[\varphi(t)]^{-1}dt =$$
$$= \int_\tau^T [\alpha(t)]^{1/2} e^{-\omega \int_T^\tau \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds} \|p(t;u)\| [\varphi(t)]^{-1/2} \times \tag{4.49}$$
$$\times [\alpha(t)]^{-1/2} e^{\omega \int_T^\tau \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds} \|(B(v-u))(t)\|_* [\varphi(t)]^{-1/2}\, dt.$$

На підставі (4.42) і того, що $B(v-u) \in L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V')$, можна зробити висновок про інтегровність на I підінтегральної функції в інтегралі правої частини нерівності (4.49). Врахувавши це, а також (4.48), перейдемо в (4.47) до границі при $\tau \to 0$:

$$(p(T;u), y(T;v) - y(T;u)) = \int_I (p(t;u), (B(v-u))(t))[\varphi(t)]^{-1}dt. \tag{4.50}$$

Покладемо $\widehat{p}(t;u){:=}p(t;u)e^{-2\omega\int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}$, $\quad t \in I$. На підставі (4.42) можемо зробити висновок, що $\widehat{p}(u) \in L_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V)$ і правильною є рівність

$$\int_I (p(t;u),(B(v-u))(t))[\varphi(t)]^{-1}dt =$$

$$= \int_I e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds}((B(v-u))(t),\widehat{p}(t;u))[\varphi(t)]^{-1}dt. \tag{4.51}$$

Нехай виконується умова (4.5). Покладемо

$$\mathbb{V}_{\varphi,\omega}{:=}L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V), \quad \mathbb{H}_{\varphi,\omega}{:=}L^2_{\varphi,\omega,1}(I;H), \quad \mathbb{V}'_{\varphi,\omega}{:=}L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;V').$$

Як було сказано раніше, простори $\mathbb{V}_{\varphi,\omega}, \mathbb{H}_{\varphi,\omega}, \mathbb{V}'_{\varphi,\omega}$ є гільбертовими. Зауважимо, що в припущенні (4.5) правильним є ланцюжок неперервних і щільних включень

$$\mathbb{V}_{\varphi,\omega} \subset \mathbb{H}_{\varphi,\omega} \subset \mathbb{V}'_{\varphi,\omega}. \tag{4.52}$$

Ототожнимо спряжений до $\mathbb{H}_{\varphi,\omega}$ простір з ним самим. Тоді спряжений до $\mathbb{V}_{\varphi,\omega}$ простір ототожнюється з $\mathbb{V}'_{\varphi,\omega}$ і дія елемента $f \in \mathbb{V}'_{\varphi,\omega}$ на елемент $v \in \mathbb{V}_{\varphi,\omega}$ визначається так

$$((f,v)) = \int_I e^{2\omega\int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}(f(t),v(t))[\varphi(t)]^{-1}dt. \tag{4.53}$$

На підставі (4.53) бачимо, що (4.51) можна записати у вигляді

$$\int_I (p(t;u),(B(v-u))(t))[\varphi(t)]^{-1}dt = ((\widehat{p}(u),B(v-u))) = \langle B^*\widehat{p}(u), v-u\rangle_U. \tag{4.54}$$

Отже, на підставі (4.40),(4.50),(4.54) співвідношення (4.37) рівносильне нерівності

$$(\Lambda_U^{-1}B^*\widehat{p}(u)+Nu, v-u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial, \tag{4.55}$$

де $\Lambda_U\colon U \to U'$ канонічний ізоморфізм Ріса.

Отже, ми довели таке твердження.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються припущення теореми 4.2 і умови* $(\mathcal{F})$

та (4.5). Тоді розв'язок задачі (4.28) характеризується співвідношеннями

$$\varphi(t)\frac{dy(t;u)}{dt} + A(t)y(t;u) = g(t) + (Bu)(t), \quad t \in I,$$
$$t \mapsto y(t;u) \in L^2_{\varphi,\omega,\alpha}(I;V),$$
$$-\varphi(t)\frac{dp(t;u)}{dt} + A^*(t)p(t;u) = 0, \quad t \in I,$$
$$p(T;u) = D^*(Dy(T;u) - z_0),$$
$$(\Lambda_U^{-1}B^*\widehat{p}(u) + Nu, v-u)_U \ge 0 \quad \forall v \in U_\partial,$$
$$\text{де} \quad \widehat{p}(t){:=}p(t)e^{-2\omega\int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}, \quad t \in I.$$

4.2 Рівняння, операторами головних частин яких є генератори аналітичних півгруп операторів в гільбертових просторах

4.2.1 Вихідні положення

Введемо деякі потрібні нам далі позначення. Нехай P – який-небудь проміжок дійсної осі, а X – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і нормою $\|\cdot\|_X$. Під $C(P;X)$ розумітимемо лінійний простір, складений з функцій, які визначені на P, приймають значення в X та є неперервними. Через $L_2(P;X)$ позначатимемо гільбертів простір вимірних (класів) функцій $f : P \to X$, для яких $\|f(\cdot)\|_X \in L_2(P)$, зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L_2(P;X)} := \int_P (f(t), g(t))_X \, dt.$$

Під $L_{2,\mathrm{loc}}(P;X)$ розумітимемо лінійний простір вимірних (класів) функцій, які визначені на P, приймають значення в X і їх звуження на довільний відрізок $[t_1,t_2] \subset P$ належать простору $L_2(t_1,t_2;X)$. Через $W_2^1(P;X)$ позначатимемо гільбертів простір функцій $f \in L_2(P;X)$, які мають узагальнені похідні f' в сенсі $D'(\mathrm{int}P\,;X)$ ($\mathrm{int}P$ – внутрішність проміжку P) з простору $L_2(P;X)$, зі скалярним добутком

$$(f,g)_{W_2^1(P;X)} := \int_P \{(f(t),g(t))_X +$$
$$+ (f'(t), g'(t))_X\} \, dt.$$

Під $W^1_{2,\mathrm{loc}}(P;X)$ розумітимемо лінійний простір вимірних (класів) функцій, які визначені на P, приймають значення в X і їх звуження на довільний відрізок $[t_1,t_2]\subset P$ належать простору $W^1_2([t_1,t_2];X)$. Відомо [15], що $W^1_{2,\mathrm{loc}}(P;X)\subset C(P;X)$.

Далі через $\mathcal{L}(X,Y)$, де X,Y – банахові простори, позначаємо банахів простір лінійних неперервних операторів, які діють на X і приймають значення в Y, з операторною нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Під $\mathcal{L}(X)$ розуміємо простір $\mathcal{L}(X,X)$.

Введемо позначення і припущення, які будемо використовувати у формулюванні задачі та основних результатів роботи. Нехай V і H – гільбертові простори над полем дійсних чисел з, відповідно, скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_V$ і $(\cdot,\cdot)$ та нормами $\|\cdot\|$ і $|\cdot|$. Припустимо, що простір V вкладається в H неперервно, щільно і компактно, тобто, V є підмножиною H, замикання V за нормою H збігається з H, з будь-якої послідовності елементів з V, обмеженої за нормою простору V, можна виділити підпослідовність, яка збігається за нормою простору H, а також існує стала $\lambda_*>0$ така, що

$$|v|\le\lambda_*\|v\|_V\quad\forall\, v\in V.$$

Нехай $a(\cdot,\cdot):V\times V\to\mathbb{R}$ – білінійна форма, яка володіє властивостями симетричності:

$$a(v,w)=a(w,v),\quad v,w\in V,$$

$V-$коерцитивності:

$$a(v,v)\ge\alpha\|v\|^2,\quad v\in V,$$

і неперервності:

$$|a(v,w)|\le\beta\|v\|\|w\|,\ v,w\in V,$$

де α і β – деякі додатні сталі (очевидно, що $\alpha\le\beta$).

Визначимо оператор $A:\mathcal{D}(A)\to H$ за таким правилом. Нехай $\mathcal{D}(A):=\{v\in V\big|\,|a(v,w)|\le c_v|w|,\,w\in V\ (c_v\ge 0$ – стала, яка залежить від $v)\}$. Отож, якщо $v\in\mathcal{D}(A)$, то відображення $V\ni w\mapsto a(v,w)\in\mathbb{R}$ однозначно продовжується до лінійного неперервного функціоналу на H. Звідси за теоремою Ріса отримуємо існування для кожного $v\in\mathcal{D}(A)$ єдиного елемента

$Av \in H$ такого, що

$$(Av, w) = a(v, w), \quad w \in V. \tag{4.56}$$

Очевидно, що оператор A є лінійним, симетричним:

$$(Av, w) = (v, Aw), \quad v, w \in \mathcal{D}(A), \tag{4.57}$$

і $V-$коерцитивним:

$$(Av, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad v \in \mathcal{D}(A). \tag{4.58}$$

Зі сказанного випливає (див., наприклад, [98, розділ IV]), що A – замкнений оператор в H (тобто володіє властивістю: якщо $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ – послідовність елементів з $\mathcal{D}(A)$ і елементи $v, w \in H$ такі, що $v_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v$ і $Av_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} w$ в H, то $v \in \mathcal{D}(A)$ і $Av = w$) та вкладення $\mathcal{D}(A) \subset H$ є щільним.

Введемо на $\mathcal{D}(A)$ скалярний добуток

$$(v, w)_{\mathcal{D}(A)} = (v, w) + (Av, Aw), \quad v, w \in \mathcal{D}(A),$$

який породжує норму графіка

$$\|v\|^2 := |v|^2 + |Av|^2, \quad v \in \mathcal{D}(A).$$

Оскільки оператор A є замкненим, то простір $\mathcal{D}(A)$ з введеним скалярним добутком є гільбертовим. Також зі сказанного випливає, що $\mathcal{D}(A)$ щільно і компактно вкладається в H.

Як доведено, наприклад, в [98, розділ IV], оператор $-A : \mathcal{D}(A) \to H$ є генератором аналітичної півгрупи $\{T(\tau) \equiv e^{-\tau A} \,\big|\, \tau \geq 0\}$ лінійних обмежених операторів на H і

$$e^{-\tau A} v = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m \tau} (v, v_m)\, v_m, \quad v \in H, \ \tau \geq 0, \tag{4.59}$$

де $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ – послідовності, відповідно, дійсних чисел та елементів з $\mathcal{D}(A)$ такі, що

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_m \leq ...,$$

$$Av_m = \lambda_m v_m \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

$$\{v_m\}_{m=1}^{\infty} \quad \text{– ортонормована база в} \quad H.$$

Очевидно, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ число λ_m – власне значення (взяте стільки разів, яка його кратність), а v_m – власний елемент, відповідний λ_m, оператора A.

На підставі рівності Парсеваля з (4.59) отримаємо

$$|e^{-\tau A}v|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\lambda_m \tau}|(v, v_m)|^2 \le e^{-2\lambda_1 \tau} \sum_{m=1}^{\infty} |(v, v_m)|^2 = e^{-2\lambda_1 \tau}|v|^2,$$
$$v \in H,\ \tau \ge 0,$$

звідки маємо оцінку

$$\|e^{-\tau A}\|_{\mathcal{L}(H)} \le e^{\omega_0 \tau}, \quad \tau \ge 0, \quad \text{де} \quad \omega_0 := -\lambda_1 < 0. \tag{4.60}$$

Нехай $I := (0, T]$, а φ – функція, яка задовольняє умови:
$\varphi \in C([0, T])$, $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$, $\varphi(0) = 0$ і $\int_0^T [\varphi(t)]^{-1} dt = +\infty$.

Покладемо

$$\theta(t) := \int_T^t [\varphi(s)]^{-1} ds,\ t \in I. \tag{4.61}$$

і позначимо через θ^{-1} функцію, яка є оберненою до функції θ.

Введемо ще позначення. Під $L_{2,\varphi}(I; X)$, де X – гільбертів простір, будемо розуміти гільбертів простір, складений з функцій $w \in L^2(I; X)$ таких, що $\int_I [\varphi(t)]^{-1} \|w(t)\|_X^2 \, dt < \infty$, зі скалярним добутком $(w, \widehat{w})_{L_{2,\varphi}(I;X)} = \int_I [\varphi(t)]^{-1} (w(t), \widehat{w}(t))_X \, dt$. Нехай $W^1_{2,\varphi}(I; X)$ – гільбертів простір функцій $w \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(I; X)$ таких, що $\int_I \left\{[\varphi(t)]^{-1}\|w(t)\|_X^2 + \varphi(t)\|w'(t)\|_X^2\right\} dt < \infty$, зі скалярним добутком $(w, \widehat{w})_{W^1_{2,\varphi}(I;X)} = \int_I \left\{[\varphi(t)]^{-1}(w(t), \widehat{w}(t))_X + \varphi(t)(w'(t), \widehat{w}'(t))_X\right\} dt$. Тут і далі $[\varphi(t)]^{-1} := 1/\varphi(t),\ t \in I$.

Розглянемо задачу без початкових умов для еволюційного рівняння: для заданої функції $f \in L_{2,\varphi}(I; H)$ знайти функцію $y : I \to H$ таку, що

$$\varphi(t) y'(t) + A y(t) = f(t), \quad t \in I, \tag{4.62}$$

$$y \in L_{2,\varphi}(I; H). \tag{4.63}$$

Означення 4.1 (див. [49]). *Слабким розв'язком задачі (4.62), (4.63) називають функцію $y \in C(I; H) \cap L_{2,\varphi}(I; H)$, яка задана формулою*

$$y(t) = Lf(t) := \int_0^t [\varphi(s)]^{-1} e^{-(\theta(t) - \theta(s))A} f(s)\, ds, \quad t \in I. \tag{4.64}$$

Зауважимо, що задача (4.62), (4.63) є задачею $\mathbf{Q_2}$ з роботи [49] при $\mu = 0$, $q = 2$, та $-A$ замість A. Там доведено її коректність.

4.2.2 Однозначна розв'язність задачі оптимального керування

Нехай U – гільбертів простір керувань зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_U$ і нормою $|\cdot|_U$; $B \in \mathcal{L}(U; L_{2,\varphi}(I;H))$ – деякий оператор. Через $B^* : L_{2,\varphi}(I;H) \to U$ позначимо оператор, спряжений до оператора B, тобто $(B^*f, v)_U = (f, Bv)_{L_{2,\varphi}(I;H)}$ для будь-яких $f \in L_{2,\varphi}(I;H)$, $v \in U$.

Припускаємо, що для керування $v \in U$ стан системи визначений слабким розв'язком $y = y(v)$ задачі без початкових умов

$$\varphi(t)y'(t) + Ay(t) = g(t) + Bv(t), \quad t \in I, \tag{4.65}$$

$$y \in L_{2,\varphi}(I;H), \tag{4.66}$$

де $g \in L_{2,\varphi}(I;H)$ – задана функція, $Bv(t) := (Bv)(t)$, $t \in I$.

Нехай $N \in \mathcal{L}(U)$ – симетричний і коерцитивний оператор, тобто $(Nv, w)_U = (v, Nw)_U$ і $(Nv, v)_U \geq \nu\|v\|_U^2$ для будь-яких $v, w \in U$, де $\nu = \mathrm{const} > 0$.

Введемо функціонал

$$J(v) = |y(T;v) - z_*|^2 + (Nv, v)_U, \quad v \in U,$$

де $y(\cdot;v)$ – розв'язок задачі (4.65),(4.66), z_* – заданий елемент з H.

Нехай U_∂ – опукла замкнена множина простору U.

Розглянемо *задачу оптимального керування*: знайти керування $u \in U_\partial$ таке, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{4.67}$$

Будь-яке таке значення u називається *оптимальним керуванням.*

Далі цю задачу коротко називатимемо *задачею* (4.67).

Метою підрозділу 4.2 є вирішення таких проблем: (i) отримання умов існування глобального мінімуму функціоналу J; (ii) вивчення структури і властивостей рівнянь, які виражають ці умови.

Сформулюємо основні результати підрозділу 4.2.

Теорема 4.4. *Задача (4.67) має єдиний розв'язок (оптимальне керування) і він характеризується нерівністю*

$$\big(y(T;u)-z_*,y(T;v)-y(T;u)\big)+$$
$$+\big(Nu,v-u\big)_U\geq 0\quad \forall v\in U_\partial. \tag{4.68}$$

Теорема 4.5. *Нехай* $z_*\in\mathcal{D}(A)$, $g\in L_{2,\varphi}(I;\mathcal{D}(A))$, $B(U_\partial)\subset L_{2,\varphi}(I;\mathcal{D}(A))$. *Тоді оптимальне керування в задачі (4.67) характеризується співвідношеннями*

$$\begin{gathered}
\varphi(t)y'(t)+Ay(t)=g(t)+Bu(t),\quad t\in I,\\
-\varphi(t)\frac{dp(t)}{dt}+Ap(t)=0,\quad t\in I,\\
p(T)=y(T)-z_*,\\
\big(B^*p+Nu,v-u\big)_U\geq 0\quad \forall v\in U_\partial,\\
y\in W^1_{2,\varphi}(I;H)\cap L_{2,\varphi}(I;\mathcal{D}(A)),\\
p\in C^1(I;H)\cap C(I;\mathcal{D}(A))\cap L_{2,\varphi}(I;H),\quad u\in U_\partial.
\end{gathered} \tag{4.69}$$

Наслідок 4.1. *Нехай виконуються умови теореми 4.5 і, крім того,* $U=L_{2,\varphi}(I;\mathcal{D}(A))$, $B=\mathbb{I}$ *($\mathbb{I}$ – тотожній оператор),* $Nv=\nu v$, $v\in U(\nu=const>0)$, $U_\partial=U$. *Тоді розв'язок задачі оптимального керування еволюційною системою без початкових умов (4.67) є розв'язком інтегрального рівняння*

$$\nu u(t)+\int_I[\varphi(s)]^{-1}e^{(\theta(t)+\theta(s))A}u(s)\,ds=$$
$$=e^{\theta(t)A}z_*-\int_I[\varphi(s)]^{-1}e^{(\theta(t)+\theta(s))A}g(s)\,ds,\quad t\in I, \tag{4.70}$$

($e^{\theta(t)A}:=e^{-|\theta(t)|A}$, $t\in I$, а θ визначено в (4.61)) та навпаки, причому для $\nu>(2\lambda_1)^{-1}$ *рівняння (4.70) можна розв'язати методом послідовних наближень.*

Перейдемо до обґрунтування цих тверджень. Нехай $S:=(-\infty,0]$. Введемо лінійний оператор Z, який взаємно однозначно переводить лінійний простір функцій $F := \{h : I \to H\}$ на лінійний простір функцій $\widetilde{F} := \{\widetilde{h} : S \to H\}$ за правилом

$$Zh = \widetilde{h}, \quad \text{де} \quad \widetilde{h}(\tau) := h(\theta^{-1}(\tau)), \;\; \tau \in S,$$

тобто оператор Z функції з простору F ставить у відповідність функцію з $\widetilde{F}$, отриману з даної в результаті заміни змінної

$$\tau = \theta(t), \quad t \in I, \quad \tau \in S. \tag{4.71}$$

Зауважимо, що звуження оператора Z на підпростори $L_{2,\varphi}(I;H)$ і $W^1_{2,\varphi}(I;H)$ простору F є ізометрією на, відповідно, підпростори $L_2(S;H)$ та $W^1_2(S;H)$ простору $\widetilde{F}$. Покажемо це на прикладі пари просторів $L_{2,\varphi}(I;H)$ і $L_2(S;H)$. Нехай $y \in L_{2,\varphi}(I;H)$ і $\widetilde{y} = Zy$. Враховуючи (4.71) і, зокрема, співвідношення $dt = \varphi(t)d\tau$, маємо

$$\|y\|^2_{L_{2,\varphi}(I;H)} \equiv \int_I [\varphi(t)]^{-1}\|y(t)\|^2 dt = \int_S \|\widetilde{y}(\tau)\|^2 d\tau \equiv \|\widetilde{y}\|^2_{L_2(S;V)}.$$

Звідси легко випливає те, що потрібно. Аналогічно перевіряємо правильність нашого твердження стосовно іншої пари просторів.

Позначимо $\widetilde{B} := Z|_{L_{2,\varphi}(I;H)} \circ B$, де $Z|_{L_{2,\varphi}(I;H)}$ – звуження оператора Z на простір $L_{2,\varphi}(I;H)$. Очевидно, що $\widetilde{B} \in \mathcal{L}(U; L_2(S;H))$.

Розглянемо задачу на знаходження оптимального керування системою, стан якої для кожного керування $v \in U$ визначається як слабкий розв'язок задачі $\widetilde{y} = \widetilde{y}(v)$ без початкових умов

$$\widetilde{y}'(\tau) + A\widetilde{y}(\tau) = \widetilde{g}(\tau) + \widetilde{B}v(\tau), \;\; \tau \in S, \tag{4.72}$$

$$\widetilde{y} \in L_2(S;H), \tag{4.73}$$

де $\widetilde{g} := Zg \in L_2(S;H)$, $\widetilde{B}v(\tau) := (Z|_{L_{2,\varphi}(I;H)}\, Bv)(\tau)$, $\tau \in I$.

Під слабким розв'язком цієї задачі розуміємо функцію $\widetilde{y}(v) \in C(S;H) \cap L_2(S;H)$, яка задана формулою

$$\widetilde{y}(\tau, v) = \widetilde{L}\big(\widetilde{g} + \widetilde{B}v\big)(\tau) := \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\tau-\gamma)A}\big\{\widetilde{g}(\gamma) + \widetilde{B}v(\gamma)\big\}\, d\gamma, \;\; \tau \in S.$$

З теореми 2.9 роботи [49] випливає, що задача (4.72),(4.73) має слабкий розв'язок. Легко переконатися, використовуючи заміну змінних (4.71), що для будь-якого елемента v простору U і слабкого розв'язку y задачі (4.65),(4.66) функція $\widetilde{y} := Z\widetilde{y}$ є слабким розв'язком задачі (4.72),(4.73) і навпаки.

Введемо функціонал

$$\widetilde{J}(v) = |\widetilde{y}(0;v) - z_*|^2 + (Nv, v)_U, \quad v \in U,$$

де $\widetilde{y}(\cdot;v)$ – розв'язок задачі (4.72),(4.73), і розглянемо таку задачу оптимального керування: знайти $\widetilde{u} \in U_\partial$ таке, що

$$\widetilde{J}(\widetilde{u}) = \inf_{v \in U_\partial} \widetilde{J}(v). \tag{4.74}$$

Цю задачу називатимемо *задачею* (4.74).

Легко бачити, що $\widetilde{J}(v) = J(v)$ для всіх $v \in U$, а отже, з існування єдиного розв'язку задачі (4.74) безпосередньо випливає існування єдиного розв'язку задачі (4.67). Існування ж єдиного розв'язку задачі (4.74) гарантується теоремою 1 роботи [8]. Це означає, що розв'язок задачі (4.67) існує та єдиний. Нерівність (4.68) безпосередньо випливає з нерівності в теоремі 1 роботи [8] і зв'язку між розв'язками задач (4.65),(4.66) та (4.72),(4.73). Отож, теорема 4.4 є правильною. Аналогічно доводиться правильність теореми 4.5 і наслідку 4.1, опираючись на теорему 2 і наслідок 1 роботи [8] та те, що $\widetilde{y} = Zy$, $\widetilde{p} = Zp$.

4.3 Лінійні параболічні рівняння

4.3.1 Основні позначення

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ з кусково-гладкою межею Γ, а ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Припускаємо, що $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_0 — замикання відкритої множини на поверхні Γ, $\Gamma_1 := \Gamma \setminus \Gamma_0$, $\Gamma_1 \neq \emptyset$. Нехай $T > 0$ — задане число, $I := (0, T]$, $G := \Omega \times I$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times I$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times I$.

Під $H^1(\Omega)$ розуміємо гільбертів простір вимірних функцій $w : \Omega \to \mathbb{R}$, які разом з узагальненими похідними першого порядку належать до $L^2(\Omega)$, зі скалярним добутком $(w, \widehat{w})_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \big\{ \sum\limits_{i=1}^n w_{x_i}\widehat{w}_{x_i} + w\widehat{w} \big\}\, dx$ та нормою $\|w\| := \Big(\int\limits_\Omega \big\{ \sum\limits_{i=1}^n |w_{x_i}|^2 + |w|^2 \big\}\, dx \Big)^{1/2}$. Нехай $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ – оператор сліду, $\widetilde{H}^1(\Omega) := \{ w \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0 w|_{\Gamma_0} = 0 \}$ – підпростір простору $H^1(\Omega)$.

Зауважимо, що з властивостей оператора сліду випливає існування сталої $\widetilde{K} > 0$ такої, що

$$\|\gamma_0 w\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \widetilde{K}\|w\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, w \in \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{4.75}$$

4.3.2 Формулювання задачі оптимального керування та її однозначна розв'язність

Сформулюємо задачу оптимального керування при цьому під φ і α розумітимемо функції, які розглядаються в підрозділі 4.1, і використовуватимемо простори $L^2_{\varphi,\omega,\gamma}(I;X)$ введені там.

Нехай $U := L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;L^2(\Gamma_1))$ – простір керувань, U_∂ – опукла замкнена підмножина простору U (множина допустимих керувань).

Стан досліджуваної еволюційної системи $y = y(v) = y(x,t;v)$, $(x,t) \in G$, для заданого керування $v \in U$ визначатимемо як слабкий розв'язок задачі

$$\varphi(t)y_t - \sum_{i,j=1}^{n} \big(a_{ij}(x,t)y_{x_j}\big)_{x_i} + a_0(x,t)y = f(x,t), \quad (x,t) \in G, \tag{4.76}$$

$$y\big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial \nu_A}\Big|_{\Sigma_1} = h + v, \tag{4.77}$$

$$\lim_{t\to 0} e^{\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}ds}\|y(\cdot,t)\| = 0, \tag{4.78}$$

де $\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\Big|_{\Sigma_1} := \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_{x_j}\cos(\nu,x_i)\Big|_{\Sigma_1}$.

Припустимо, що вихідні дані задовольняють умови:

$(\mathcal{A}_1)$ $a_0, a_{ij} = a_{ji}\,(i,j=\overline{1,n}) \in L^\infty(G)$, $a_0(x,t) \geq \alpha(t)$,
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha(t)\|\xi\|^2$ для м.в. $(x,t) \in G$ і всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$;

$(\mathcal{A}_2)$ $f \in L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;L^2(\Omega))$, $\quad h \in L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I;L^2(\Gamma_1))$.

Означення 4.2. *Слабким розв'язком задачі* (4.76) – (4.78) *називаємо функцію* $y \in L^2_{\mathrm{loc}}(I;\widetilde{H}^1(\Omega)) \cap C(I;L^2(\Omega))$, *якщо вона задовольняє умову* (4.78) *та інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_Q \Big\{ -(\varphi\eta)_t y\psi + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_{x_j}\psi_{x_i}\eta + a_0 y\psi\eta\Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q} f\psi\eta\,dxdt + \iint\limits_{\Sigma_1} (h+v)\psi\eta\,d\Gamma dt, \quad \psi \in H_0^1(\Omega),\ \eta \in C_c^1(0,T). \tag{4.79}$$

Функцію вартості беремо у вигляді

$$J(v) = \|y(\cdot,T;v) - z_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|v\|^2_U, \quad v \in U_\partial, \tag{4.80}$$

де $z_0 \in L^2(\Omega)$, $\mu \geq 0$ – задані, причому $\mu > 0$, якщо U_∂ – необмежена.

Розглядаємо **задачу**: знайти керування $u \in U_\partial$ таке, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{4.81}$$

Теорема 4.6 (існування оптимального керування)**.** *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $\omega < 1$ *та*

$$\inf_{t \in I} \alpha(t) > 0. \tag{4.82}$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (4.81) і він характеризується системою співвідношень:

$$\varphi y_t - \sum_{i,j=1}^{n} \big(a_{ij} y_{x_j}\big)_{x_i} + a_0 y = f, \quad (x,t) \in G,$$

$$y\big|_{\Sigma_0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu_A}\Big|_{\Sigma_1} = h + u, \qquad \lim_{t\to 0} e^{\omega \int_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1} ds}\|y(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0;$$

$$-\varphi p_t - \sum_{i,j=1}^{n} \big(a_{ij} p_{x_j}\big)_{x_i} + a_0 p = 0, \quad (x,t) \in G,$$

$$p\big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial \nu_A}\Big|_{\Sigma_1} = 0, \qquad p(\cdot,T) = y(\cdot,T) - z_0(\cdot);$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int\limits_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}\,ds} [\varphi(t)]^{-1}\big(\widehat{p} + \mu u\big)\big(v - u\big)\,d\Gamma dt \geq 0 \quad \forall\, v \in U_\partial,$$

де $\widehat{p} = \alpha(t) e^{-2\omega \int\limits_T^t \alpha(s)[\varphi(s)]^{-1}\,ds} p(x,t)$, $(x,t) \in G$.

Доведення. Зауважимо, що задача оптимального керування (4.81) є конкретизацією задачі (4.28) з підрозділу 4.1 при відповідних вихідних даних.

Нехай $V := \widetilde{H}^1(\Omega)$, $H := L^2(\Omega)$, $V' := \big(\widetilde{H}^1(\Omega)\big)'$. Тоді в нерівності (4.1) $\lambda = 1$.

Сім'ю операторів $A(t) : V \to V'$, $t \in I$, визначимо тотожністю

$$(A(t)w, \widehat{w}) = \int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i} \widehat{w}_{x_j} + a_0 w \widehat{w}\, dx \Big], \qquad w, \widehat{w} \in V, \quad t \in I.$$

Враховуючи умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$ цього підрозділу, легко переконатися, що так введена сім'я операторів задовольняє умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$ підрозділу 4.1.

Введемо оператор $\widetilde{B} : L^2(\Gamma_1) \to (\widetilde{H}^1(\Omega))'$, що діє за правилом

$$\langle \widetilde{B} w, \widehat{w} \rangle = \int\limits_{\Gamma_1} w \widehat{w}\, d\Gamma \quad \forall w \in L^2(\Gamma_1),\ \widehat{w} \in \widetilde{H}^1(\Omega).$$

Очевидно, що так введений оператор $\widetilde{B}$ є лінійним та обмеженим. Тоді оператор B, що діє з простору U в простір $L^2_{\omega,\varphi,1/\alpha}(I; V')$, визначимо за правилом $\big(Bv\big)(t) = \widetilde{B}\big(u(t)\big)$ для м.в. $t \in S$. Легко переконатися, що $B \in \mathcal{L}\big(U; L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(I; V')\big)$ (тобто, задовольняє ті ж умови, що і оператор B підрозділу 4.1).

Функцію $g \in L^2_{\varphi,\omega,1/\alpha}(S; V')$ в даному випадку задаємо так:

$$(g(t), w) = \int\limits_{\Omega} f(x,t) w(x)\, dx + \int\limits_{\Gamma_1} h(x,t) w(x)\, d\Gamma, \quad w \in V,$$

де функції f та h, відповідно, з (4.76) та (4.77).

Тут ми маємо випадок фінального спостереження. Очевидно, що при наших припущеннях виконуються умови $(\mathcal{F})$ підрозділу 4.1, причому D – одиничний оператор. Визначимо $N := \mu \mathbb{I}$, де $\mathbb{I}$ – одиничний оператор. Очевидно, що $N \in \mathcal{L}(U)$ та виконується умова (4.26). Виконання умови (4.11) забезпечує умова $(\mathcal{A}_1)$, а точніше, обмеженість коефіцієнтів a_0 та $a_{i,j}$. Отже, виконуються всі умови теореми 4.3, з якої легко випливає твердження нашої теореми. ∎

Висновки до розділу 4

У розділі 4 одержано необхідні та достатні умови розв'язності задач оптимального керування системами, стани яких описуються еволюційними рівняннями, які сильно вироджуються в початковий момент часу, а керування є у правих частинах рівнянь.

Висновки

Дисертаційна робота присвячена вивченню задач оптимального керування системами, що описуються еволюційними рівняннями та варіаційними нерівностями без початкових умов. Такі задачі виникають при дослідженні різних процесів в природі та економіці.

Практично у всіх відомих нам наукових працях, де розглядаються задачі оптимального керування для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей, часовий проміжок обмежений знизу і задаються стандартні початкові умови. Ми знаємо тільки дві роботи, де досліджено задачі оптимального керування для лінійних еволюційних рівнянь, заданих на необмеженому знизу часовому проміжку, з обмеженнями на поведінку розв'язку при прямуванні часової змінної до $-\infty$ та керуваннями в правих частинах. Також, наскільки нам відомо, не розглядалося оптимальне керування системами, які описуються параболічними варіаційними нерівностями, заданими на необмеженому знизу часовому проміжку, а також еволюційними рівняннями із сильним виродженням в початковий момент.

В даній дисертаційній роботі проведено дослідження у випадках, коли рівняння стану є нелінійними параболічними рівняннями та варіаційними нерівностями, заданими на необмеженому знизу часовому проміжку, з керуваннями у коефіцієнтах, а також еволюційними рівняннями, заданими на скінченному часовому проміжку, із сильним виродженням в початковий момент часу та керуваннями у правих частинах.

Вивчено задачі оптимального керування (з різними типами спостережень) для нелінійних параболічних рівнянь без початкових умов з керуваннями у коефіцієнтах і отримано умови існування розв'язків таких задач, коли рівняннями стану є слабко нелінійні рівняння з обмеженнями на поведінку розв'язку на нескінченності, сильно нелінійні рівняння з монотонними просторовими частинами без обмежень на зростання вихідних даних і розв'язків при прямуванні часової змінної до $-\infty$, сильно нелінійні рівняння з немонотонними просторовими частинами при наявності умов на поведінку розв'язків на нескінченності.

Досліджено задачі оптимального керування (з різними типами спостережень) для еволюційних варіаційних нерівностей без початкових умов і отримано умови існування оптимальних керувань у випадку, коли рівняннями стану є слабко нелінійні варіаційні нерівності з керуваннями у коефіцієнтах при умові на поведінку розв'язку, сильно нелінійні варіаційні нерівності з керуваннями у правих частинах без обмежень на поведінку розв'язку.

Вивчено задачі оптимального керування для еволюційних рівнянь із сильним виродженням в початковий момент часу та керуваннями у правих частинах і отримано необхідні та достатні умови існування і єдиності розв'язків таких задач, оптимальності керування у випадку фінального спостереження.

Ці результати мають теоретичний характер і їх можна використати в теорії задач оптимального керування та задач без початкових умов, а також при оптимізації процесів, які моделюються задачами без початкових умов для еволюційних рівнянь чи варіаційних нерівностей.

Список використаних джерел

[1] *Бокало Н.М.* О единственности решения задачи Фурье для квазилинейных уравнений типа нестационарной фильтрации. Успехи мат. наук. 1984; 39 (2): 139-140.

[2] *Бокало Н.М.* О единственности решения задачи без начальных условий для нелинейных параболических уравнений. Успехи мат. наук. 1986; 41 (5): 163-164.

[3] *Бокало Н.М.* Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности. Сиб. мат. журн. 1993; 34 (4): 33-40.

[4] *Бокало Н.М.* Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений. Дифф. уравнения. 1994; 30 (8): 1326-1334.

[5] *Бокало М.М.* Про коректність задачі Фур'є для системи рівнянь типу нестаціонарної фільтрації без умов на нескінченості. Математичні студії. 1996; 6: 85-98.

[6] *Бокало М.М., Дмитрів В.М.* Задача Фур'є для різнокомпонентної системи рівнянь дифузії з функціоналами. Укр. мат. журн. 2001; 53 (11): 1468-1481.

[7] *Бокало М.М.* Оптимальне керування еволюційними системами без початкових умов. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2010; 73: 85-113.

[8] *Бокало М.М.* Задача оптимального керування еволюційними системами без початкових умов. Нелінійні граничні задачі. 2010; 20: 14-27.

[9] *Бокало М.М., Цебенко А.М.* Задача оптимального керування еволюційними системами із сильним виродженням в початковий момент часу. Наук. вісник Чернівецького національного ун-ту ім. Ю. Федьковича. Серія: Математика. 2012; 32 (2-3): 24-29.

[10] *Бокало М.М., Цебенко А.М.* Оптимальне керування системами, які описуються еволюційними рівняннями з виродженням в початковий момент часу. Мат. студ. 2012; 38 (2): 177-187.

[11] *Бокало М.М., Цебенко А.М.* Оптимальне керування в задачах без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей. Мат. студ. 2016; 46 (1): 51-66.

[12] *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука; 1969.

[13] *Бугрій О.М.* Деякі параболічні варіаційні нерівності без початкових умов. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998; 49: 113-121.

[14] *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука; 1975.

[15] *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир; 1978.

[16] *Горбачук М.Л., Пивторак Н.И.* О решениях эволюционных уравнений параболического типа с вырождением. Дифференциальные уравнения. 1985; 21 (8): 1317-1323.

[17] *Доманська Г.П., Колінько М.О., Лавренюк С.П.* Задача без початкових умов для псевдопараболічного рівняння в узагальнених просторах Лебега. Мат. студ. 2006; 25 (1): 73-86.

[18] *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. К.: Наукова думка; 2004.

[19] *Ивасишен С.Д.* О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий. Дифф. уравнения. 1978; 14 (2): 361-363.

[20] *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир; 1967.

[21] *Лавренюк С.П., Пташник М.Б.* Задача без начальных условий для нелинейной псевдопараболической системы. Дифф. уравнения. 2000; 36 (5): 667-673.

[22] *Лавренюк С.П., Процах Н.П.* Задача Фур'є для ультрапараболічного рівняння. Нелинейные граничные задачи. 2002; 12: 128-139.

[23] *Лавренюк С.П., Процах Н.П.* Варіаційні ультрапараболічні нерівності без початкових умов. Мат. Студ. 2005; 23 (1): 57-67.

[24] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука; 1967.

[25] *Левитан Б.М., Жиков В.В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та.; 1978.

[26] *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир; 1972.

[27] *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир; 1972.

[28] *Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.Ф.* Линейные дифференциальные игры. ДАН СССР. 1967; 174: 27-29.

[29] *Панков А.А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциальных операторных уравнений. Киев: Наукова думка; 1985.

[30] *Пукальский И.Д.* Задачи Дирихле и Неймана для одного класса вырождающихся параболических уравнений. Мат. методы и физ.-мех. поля. 1978; (8): 18-32.

[31] *Тихонов А.Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. Мат. сб. 1935; 2: 199-216.

[32] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука; 1972.

[33] *Цебенко А.М.* Оптимальне межове керування системами, стан яких визначається задачею без початкових умов для параболічних рівнянь. Мат. студ. 2015; 44 (1): 89-103.

[34] *Adams D.R., Lenhart S.* Optimal control of the obstacle for a parabolic variational inequality. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2002; 268: 602-614.

[35] *Akimenko V.V., Nakonechnyi A.G., Trofimchuk O.Yu.* An optimal control model for a system of degenerate parabolic integro-differential equations. Cybernetics and Systems Analysis. 2007; 43 (6): 838-847.

[36] *Aubin J.-P.* Un theoreme de compacite. Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences. 1967; 256 (24): 5042-5044.

[37] *Balakrishnan V.* Semigroup theory and control theory. Washington; 1965.

[38] *Barbu V.* Optimal Control of Variational Inequalities. London: Pitman; 1983.

[39] *Faker Ben Belgacem, Christine Bernardi, Henda El Fekih, Hajer Metoui.* On the Dirichlet boundary control of the heat equation with a final observation. Part I: A space-time mixed formulation and penalization. hal.archives-ouvertes.fr/hal-00400226/document.

[40] *Bermudez A.* Some applications of optimal control theory of distributed systems. Control, optimazation and calculus of variations. 2002; 8: 195-218.

[41] *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains. Math. Ann. 1988; 279: 373-394.

[42] *Bintz J., Finotti H., Lenhart S.* Optimal control of resource coefficient in a parabolic population model, edited by R. Mondaini. BIOMAT 2013 International Symposium on Mathematical and Computational Biology, World Scientific Press, Singapore. 2013; 121-135.

[43] *Bokalo M.M.* Problem without initial conditions for classes of nonlinear parabolic equations. J. Sov. Math. 1990; 51 (3): 2291-2322.

[44] *Bokalo N.M.* The Fourier problem with nonlocal boundary conditions for a class of nonlinear parabolic equations. J. Math. Sci. 1997; 85 (6): 2260-2266.

[45] *Bokalo M.M., Sikorsky V.M.* The well-posedness of a Fourier problem for quasilinear parabolic equations of arbitrary order in unisotropic spaces. Мат. Студ. 1997; 8 (1): 53-70.

[46] *Bokalo M.* Well-posedness of problems without initial conditions for nonlinear parabolic variational inequalities. Nonlinear boundary problem. 1998; 8: 58-63.

[47] *Bokalo M.M., Dmytryshyn Y.B.* Problems without initial conditions for degenerate implicit evolution equations. Electronic Journal of Differential Equations. 2008; 2008 (4): 1-16.

[48] *Bokalo M.M., Pauchok I.B.* On the well-posedness of the Fourier problem for higher-order nonlinear parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. Mat. Stud. 2006; 26 (1): 25-48.

[49] *Bokalo M., Lorenzi A.* Linear evolution first-order problems without initial conditions. Milan Journal of Mathematics. 2009; 77: 437-494.

[50] *Bokalo M.M.* Dynamical problems without initial conditions for elliptic-parabolic equations in spatial unbounded domains. Electron. J. Differential Equations. 2010; 2010 (178): 1-24.

[51] *Bokalo M.M., Buhrii O.M., Mashiyev R.A.* Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. Journal of nonlinear evolution equations and applications. 2014; 2013 (6): 67-87.

[52] *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Existence of optimal control in the coefficients for problem without initial condition for strongly nonlinear parabolic equations. Мат. Студ. 2016; 45 (1): 40-56.

[53] *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control problem for systems governed by nonlinear parabolic equations without initial conditions. Carpathian Math.Publ. 2016; 8 (1): 21-37.

[54] *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal resource coefficient control in a dynamic population model without initial conditions. Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. 2016; (81): 39-57.

[55] *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control in problems without initial conditions for weakly nonlinear evolution variational inequalities. Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. 2016; 82: 76-94.

[56] *Bokalo M.M., Tsebenko A.M.* Optimal control for systems governed by parabolic equations without initial conditions with controls in the coefficients. Electron. J. Differential Equations. 2017; 2017 (71): 1-24.

[57] *Boukrouche M., Tarzia D.A.* Existence, uniqueness, and convergence of optimal control problems associated with parabolic variational inequalities of the second kind. arXiv:1309.4869v1 [math.AP] 19 Sep 2013.

[58] *Bradley M.E., Lenhart S.* Bilinear Optimal Control of a Kirchhoff Plate, Systems & Control Letters. 1994; 22: 27-38.

[59] *Brezis H.* Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer New York Dordrecht Heidelberg London; 2011.

[60] *Brezis H.* Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Amsterdam, London: North-Holland Publishing Comp.; 1973.

[61] *Buhrii O.M.* Parabolic variational inequalities with degeneration. Мат. Студ. 1999; 11 (2) Вип. 49: 189-198.

[62] *Buhrii O.M.* Some parabolic variational inequalities without initial conditions. Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. 1998; 49: 113-121.

[63] *Bushuev I.V.* On a class of optimal control problems for parabolic equations. Siberean Mathematical Journal. 1994; 35 (5): 887-892.

[64] *Casas E., Vexler B., Zuazua E.* Sparse initial data identification for parabolic PDE and its finite element approximations. Mathematical Control and Related Fields. 2015; 5 (3): 377-399.

[65] *Coddington E.A., Levinson N.* Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill book company. New York, Toronto, London; 1955.

[66] *Durante T., Mel'nyk T.A.* Asymptotic analysis of an optimal control problem involving a thick two-level junction with alternate type of controls. J Optim Theory Appl. 2010; 144 (2): 205-225.

[67] *Durante T., Mel'nyk T.A.* Homogenization of quasilinear optimal control problems involving a thick multilevel junction of type 3 : 2 : 1. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2012; 18 (2): 583-610.

[68] *Evans L.C.*; *Partial differential equations*, American Mathematical Society; 1998.

[69] *Evans L.C. Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics. 2nd ed. Vol. 19.* Providence (RI): Amer. Math. Soc.; 2010.

[70] *Farag M.H., Farag S.H.* On an optimal control problem for a quasilinear parabolic equation. Applicationes mathematicae. 2000; 27 (2): 239-250.

[71] *Fattorini H.O.* Optimal control problems for distributed parameter systems governed by semilinear parabolic equations in L^1 and L^∞ spaces. Optimal Control of Partial Differential Equations. Lecture Notes in Control and Information Sciences. 1991; 149: 68-80.

[72] *Fister K.R.* Optimal Control of Harvesting in a Predator-Prey Parabolic System. Houston Journal of Mathematics. 1997; 23 (2): 341-355.

[73] *Freedman A., Schuss Z.* Degenerate evolution equations in Hilbert space. Trans. Amer. Math. Soc. 1971; 161: 401-427.

[74] *Gamkrelidze R.V.* On some extremal problems in the theory of differential equations with applications to the theory of optimal control. SIAM J. Control. 1965; 3: 106-128.

[75] *Gong Wei, Hinze Michael, Zhou Zhaojie.* A finite element method for Dirichlet boundary control problems governed by parabolic PDEs. Hamburger Beitrage zur Angewandten Mathematik. 2014; 2014 (21): 1-21.

[76] *Gorbonos S.O., Kogut P.I.* On pathological solutions to an optimal boundary control problem for linear parabolic equation. Кибернетика и вычисл. техника. 2014; 176: 5-18.

[77] *Hashimov S.A., Tagiyev R.K.* On optimal control of the coefficients of a parabolic equation involing phase constraints. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2013; 38: 131-146.

[78] *Hestenes M.R.* Calculus of variations and optimal control theory. Wiley; 1966.

[79] *Homberg D., Krumbiegel K., Rehberg J.* Optimal Control of a Parabolic Equation with Dynamic Boundary Condition. Applied Mathematics & Optimization. 2013; 67 (1): 3-31.

[80] *Ivasishen S.D.* Parabolic boundary problems without initial conditions. Ukr. Mat. Zh. 1982; 34 (5): 547-552.

[81] *Kapustyan V.O., Kapustyan O.A., Mazur O.K.* Distributive optimal control in one non-selft-adjoint boundary value problem. Continuous and distributed systems. Springer. 2014; 211: 303 - 312.

[82] *Kazufumi I., Kunisch K.* Optimal control of parabolic variational inequalities. J. Math. Pures Appl. 2010; 93: 329-360.

[83] *Kogut O.* On Optimal Control Problem in Coefficients for Nonlinear Elliptic Variational Inequalities. Visnik Dnipropetrovskogo Universitetu. Seria Modeluvanna. 2011; 19 (8): 86-98, DOI 10.15421/141107.

[84] *Khater A.H., Shamardanb A.B., Farag M.H., Abel-Hamida A.H.* Analytical and numerical solutions of a quasilinear parabolic optimal control problem. Journal of Computational and Applied Mathematics. 1998; 95 (1-2): 29-43.

[85] *Lavrenyuk S., Protsakh N.* Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain. Tatra Mt. Math. Pull. 2007; 38: 131-146.

[86] *Lou Hongwei.* Optimality conditions for semilinear parabolic equations with controls in leading term. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2011; 17 (4): 975-994.

[87] *Lenhart S.M., Yong J.* Optimal Control for Degenerate Parabolic Equations with Logistic Growth. Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications. 1995; 25 (1995): 681-698.

[88] *Lions J.-L.* Operational differential equations and boundary value problems, 2 ed. Berlin-Heidelberg-New York; 1970.

[89] *Oleinik O., Iosifjan G.* Analog of Saint-Venant's principle and uniqueness of solutions of the boundary problems in unbounded domain for parabolic equations. Usp. Mat. Nauk. 1976; 31 (6): 142-166.

[90] *Pankov A.* Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations. Kluwer, Dordrecht; 1990.

[91] *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag, New York; 1983.

[92] *Pukach P.Ya.* On problem without initial conditions for some nonlinear degenarated parabolic system. Ukrainian Math. J. 1994; 46 (4): 484–487.

[93] *Pukalskyi I.D.* Nonlocal boundary-value problem with degeneration and optimal control problem for linear parabolic equations. Journal of Mathematical Sciences. 2012; 184 (1): 19-35.

[94] *Rockafellar R.* On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. Pacific J. Math. Vol. 1970; 33 (1): 209-216.

[95] *Samoilenko A.M., Vlasenko L.A.* Optimal control with impulsive component for systems described by implicit parabolic operator differential equations. Ukrainian Mathematical Journal. 2009; 61 (8): 1250-1263.

[96] *Showalter R.E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. Amer. Math. Soc. Vol. 49. Providence; 1997.

[97] *Showalter R.E.* Singular nonlinear evolution equations. Rocky Mountain J. Math. 1980; 10 (3): 499-507.

[98] *Showalter R.E.* Hilbert space methods for partial differential equations. Monographs and studies in mathematics (Monographs in differential equations), Volume 1. Pitman: London; 1977.

[99] *Tagiev R.K.* Existence and uniquiness of second order parabolic bilinear optimal control problems. Differential Equations. 2013; 49 (3): 369-381.

[100] *Zuliang Lu.* Optimal control problem for a quasilinear parabolic equation with controls in the coefficients and with state constraints. Lobachevskii Journal of mathematics. 2011; 32 (4): 320-327.