МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

імені ІВАНА ФРАНКА

ІЛЬНИЦЬКА Ольга Володимирівна

УДК 517.95

ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2017

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь
Львівського національного університету імені Івана Франка
Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Бокало Микола Михайлович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка, професор кафедри
диференціальних рівнянь.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Дрінь Ярослав Михайлович,
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, завідувач кафедри
математичних проблем управління і кібернетики;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Мединський Ігор Павлович,
Національний університет "Львівська політехніка",
доцент кафедри прикладної математики.

Захист відбудеться _____ вересня 2017 року о _____ на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий: _____ _____ 2017 р.

В.о. вченого секретаря
спеціалізованої вченої ради,
професор С. М. Шахно

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню задач без початкових умов для параболічних рівнянь, різнокомпонентних систем та еволюційних включень зі змінним запізненням.

Задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними із запізненням є надзвичайно плідним полем для досліджень та джерелом для багатьох складних математичних проблем та цікавих застосувань. Популярність такого роду досліджень пов'язана з їх активним використанням при вирішенні задач теплопровідності, фільтрації, дифузії, фізики плазми, реконструкції зображень, розвитку біологічних популяцій, реакції організму людини на вірус імунодефіциту та інших.

Параболічні рівняння з частинними похідними та різнокомпонентні системи рівнянь із запізненням за наявності початкових умов активно досліджувались багатьма математиками, серед яких П. П. Бабак, Я. Й. Бігун, М. М. Бокало, Я. М. Дрінь, В. М. Дмитрів, Л. Э. Эльсгольц, А. Д. Мишкіс, С. Б. Норкін, С. В. Пао (C. V. Pao), А. М. Самойленко, В. Ю. Слюсарчук, І. М. Черевко, І. Д. Чуєшов, Д. Я. Хусаїнов, А. Баткай (A. Bátkai), А. Бельмілоуді (A. Belmiloudi), Ж. Ді Бласіо (G. Di Blasio), Ч. Джінь (Ch. Jin), Дж. Їнь (J. Yin), Р. Лестер (R. Laister), А. Марціняк-Жохра (A. Marciniak-Czochra). Задачі для еволюційних включень (варіаційних нерівностей) із запізненням вивчали Х. Х. Ро (H. H. Rho), Дж. М. Джеонг (J. M. Jeong), І. І. Врабіє (I. I. Vrabie), Р. Н. Ванг (R. N. Wang), К. М. Хіанг (Q. M. Xiang), П. Х. Цу (P. X. Zhu) та інші.

Задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей без запізнення також досить добре вивчені. Вагомий вклад в їх дослідження зробили Т. М. Балабушенко, М. М. Бокало, Л. Ф. Бойко, О. М. Бугрій, Ю. Б. Дмитришин, С. Д. Ейдельман, С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, С. П. Лавренюк, М. Д. Мартиненко, М. І. Матійчук, Є. І. Моісєєв, О. А. Олійник, О. А. Панков, Н. П. Процах, П. Я. Пукач та інші.

Задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь зі сталим запізненням досліджували М. М. Бокало та В. М. Дмитрів.

На даний час достатньо повно досліджені мішані задачі для параболічних рівнянь та систем зі сталим запізненням. У випадку рівнянь у частинних похідних зі змінним запізненням мішані задачі для параболічних рівнянь досліджені лише у роботах І. Д. Чуєшова та О. В. Резуненка, проте у цих роботах запізнення залежить від стану системи. Задачі для еволюційних рівнянь та систем із залежним від часу запізненням раніше не досліджувались. Дисертаційна робота присвячена дослідженню такого роду задач.

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є відшукання умов існування та єдиності класичних та узагальнених розв'язків задач без початкових

умов для параболічних рівнянь, різнокомпонентних систем та еволюційних включень зі змінним запізненням.

Завданнями дисертаційного дослідження є:

– встановити умови існування та єдиності класичних розв'язків мішаних задач та задач без початкових умов для півлінійних параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь зі змінним запізненням;

– відшукати умови існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаних задач та задачі Фур'є для слабко і сильно нелінійних параболічних рівнянь;

– вивчити коректність задач без початкових умов для сильно нелінійних еволюційних субдиференціальних включень.

Об'єктом дослідження є задачі без початкових умов для параболічних рівнянь, різнокомпонентних систем та еволюційних включень зі змінним запізненням.

Предметом досліджень є умови існування та єдиності розв'язків задач без початкових умов для півлінійних, слабко і сильно нелінійних параболічних рівнянь, різнокомпонентних систем рівнянь та нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей (субдиференціальних включень) зі змінним запізненням.

Методи досліджень. У роботі використовуються методи та ідеї теорії рівнянь з частинними похідними і функціонального аналізу, зокрема, методи послідовних наближень, монотонності і Гальоркіна, принцип стискуючих відображень та інші.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі вперше:

- знайдено умови існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних класичних розв'язків мішаної задачі і крайових задач без початкових умов для півлінійних параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем з локальним змінним запізненням;

- доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків мішаних задач та задачі Фур'є для слабко та сильно нелінійних параболічних рівнянь з нелокальним змінним запізненням;

- встановлено умови існування та єдиності розв'язків задачі без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей (субдиференціальних включень) з нелокальним змінним запізненням.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення і можуть бути використані для розвитку теорії рівнянь з частинними похідними із запізненням та застосовані при дослідженні задач теплопровідності, дифузії, фільтрації, фізики плазми, реконструкції

зображень, розвитку біологічних популяцій, реакції організму людини на вірус імунодифіциту, тощо.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації отримані автором самостійно. У працях, написаних у співавторстві з науковим керівником, М. М. Бокалу належать постановка задач, вибір методів досліджень та аналіз одержаних результатів.

Апробація результатів роботи. Результати досліджень доповідались та обговорювались на Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: член-кор. НАН України, проф. Пташник Б. Й., проф. Іванчов М. І., проф. Каленюк П. І.), а також на конференціях: International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (Львів, 2012); International Conference of Young Mathematicians (Київ, 2015); International V. Skorobohatko mathematical conference (Дрогобич, 2015); Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 2016); Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2016" (Львів, 2016); International Conference on Differential Equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Львів, 2016); International Scientific Conference "Differential-Functional Equations and their Application" dedicated to the 80th anniversary of Professor V. I. Fodchuk (Чернівці, 2016); 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky (Київ, 2016).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 6-ти наукових працях у фахових періодичних виданнях з переліку, затвердженого МОН України, з яких 4 – в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз, та додатково висвітлено в 8-ми тезах наукових математичних конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури, і додатку. Список літератури налічує 105 найменувань і викладений на 10 сторінках. Загальний обсяг роботи – 185 с.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У роботі всюди: n – довільне фіксоване натуральне число; $\mathbb{R}^n$ – лінійний простір впорядкованих наборів $x = (x_1, ..., x_n)$ дійсних чисел з нормою $|x| := (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$; Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$; $\partial\Omega$ – межа Ω, яку вважаємо кусково-гладкою поверхнею, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_0 – замикання відкритої множини $\partial\Omega$ (зокрема, або $\Gamma_0 = \emptyset$ або $\Gamma_0 = \partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$; $T > 0$ – довільне фіксоване число; $S := (-\infty, 0]$.

У **вступі** обґрунтовуємо актуальність теми, формулюємо мету і завдання дослідження, наукову новизну, даємо інформацію про апробацію одержаних

результатів та їхнє практичне і теоретичне значення.

У **розділі 1** наводимо огляд праць, які стосуються тематики дисертації.

У **розділі 2** досліджуємо питання існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних класичних розв'язків задач для параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем із локальним змінним запізненням.

У **підрозділі 2.1** вивчаємо мішану задачу для півлінійних параболічних рівнянь з локальним змінним запізненням.

Нехай $Q := \Omega \times (0,T]$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0,T]$; $\tau \in C([0,T])$ – задана невід'ємна функція; E_0 – множина, складена з чисел $t-\tau(t)$ таких, що $t-\tau(t) \le 0$ і $t \in [0,T]$, і також числа 0.

Розглядаємо *задачу*: знайти функцію $u \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])\big) \cap C^{2,1}(Q)$ таку, що

$$u_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t) u_{x_k x_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t) u_{x_k}(x,t) +$$

$$+a_0(x,t)u(x,t) - g(x,t,u(x,t),u(x,t-\tau(t))) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,t) = h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{2}$$

$$u(x,t) = u_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0. \tag{3}$$

Припускаємо, що

$(\mathcal{A}_1)$ a_{kl}, a_k, $a_0 \in C(Q)$, $a_{kl} = a_{lk}$ $(k,l = \overline{1,n})$, причому $\inf\limits_{(x,t)\in Q} a_0(x,t) > 0$,

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)\xi_k\xi_l \ge \mu \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \ \ \forall (x,t) \in Q, \ \forall \xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{R}, \text{ де } \mu \ge 0;$$

$(\mathcal{A}_2)$ $g(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in \Omega \times (0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, – неперервна за усіма змінними і неперервно диференційовна за змінними ξ та η функція, причому існують функції g_1, g_2 такі, що

$$0 \le g_\xi(x,t,\xi,\eta) \le g_1(x,t), \quad 0 \le g_\eta(x,t,\xi,\eta) \le g_2(x,t), \ \ (x,t) \in Q, \ (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\inf_{(x,t)\in Q} (a_0(x,t) - g_1(x,t)) =: a_0^- > 0, \qquad \sup_{(x,t)\in Q} g_2(x,t) =: g_2^+ < \infty;$$

крім того, $g(x,t,0,0) = 0$, $(x,t) \in Q$;

$(\mathcal{A}_3)$ $f \in C(Q)$, $h \in C(\overline{\Sigma})$, $u_0 \in C(\overline{\Omega} \times E_0)$, причому функція f є обмеженою та виконується умова $h(x,0) = u_0(x,0)$ $\forall x \in \partial\Omega$.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$ *і* $a_0^- - g_2^+ > 0$. *Припустимо, що* u_1, u_2 *– розв'язки задач, що відрізняються від задачі* (1)–(3) *тільки тим, що замість* f, h, u_0 *стоять* $f_1, h_1, u_{0,1}$ *та* $f_2, h_2, u_{0,2}$ *відповідно, з такими*

ж властивостями, які вказані для f, h, u_0 *в умові* $(\mathcal{A}_3)$ *відповідно. Тоді для всіх* $(x,t) \in Q$ *виконуються нерівності*

$$\min\Big\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+}\inf_{(y,s)\in Q}\big(f_1(y,s)-f_2(y,s)\big),\ \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}\big(h_1(y,s)-h_2(y,s)\big),$$

$$\min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0}\big(u_{0,1}(y,s)-u_{0,2}(y,s)\big),0\Big\}\le$$

$$\le u_1(x,t)-u_2(x,t)\le$$

$$\le\max\Big\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+}\sup_{(y,s)\in Q}\big(f_1(y,s)-f_2(y,s)\big),$$

$$\max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}\big(h_1(y,s)-h_2(y,s)\big),\ \max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0}\big(u_{0,1}(y,s)-u_{0,2}(y,s)\big),0\Big\}. \qquad (4)$$

З цієї теореми легко випливає єдиність розв'язку задачі (1)–(3), його неперервна залежність від вихідних даних, а також оцінка, отримана з (4) при $u_1 = u,\ u_2 = 0,\ f_1 = f,\ f_2 = 0,\ h_1 = h,\ h_2 = 0,\ u_{0,1} = u_0,\ u_{0,2} = 0$.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$, $a_0^- - g_2^+ > 0$ *та для деякого* $\alpha \in (0,1]$ *маємо*

$(\mathcal{B}_1)$ $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$,

$(\mathcal{B}_2)$ $a_{kl},\ a_k,\ a_0 \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$ $(k,l=\overline{1,n})$, $g \in C^{\alpha,\alpha/2,1,1}(\overline{\Omega}\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $f \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$, $u_0 \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}\times E_0)$, $h \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Sigma})$.

Крім того, припустимо, що

$(\mathcal{B}_3)$ $\partial a_{kl}/\partial x_s \in C(Q)$ $(k,l,s=\overline{1,n})$,

$(\mathcal{B}_4)$ τ *задовольняє умову Ліпшіца,* $\mu > 0$.

Тоді існує (єдиний) розв'язок задачі (1)–(3) *і він належить простору* $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$.

У **підрозділі 2.2** досліджуємо мішану задачу для різнокомпонентних систем рівнянь зі змінним локальним запізненням. Під різнокомпонентною системою рівнянь розуміємо систему, що складається з рівнянь різних типів, а саме, рівнянь параболічного типу і звичайних диференціальних рівнянь.

Нехай M, L – натуральні числа; $Q := \Omega\times(0,T]$, $\Sigma := \partial\Omega\times(0,T]$.

Розглядаємо різнокомпонентну систему

$$u_{i,t}(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x,t)u_{i,x_kx_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t)u_{i,x_k}(x,t) + a_i(x,t)u_i(x,t) -$$

$$-g_i\big(x,t,w(x,t),w_\tau(x,t)\big) = f_i(x,t), \quad (x,t)\in Q, \quad i=1,...,M, \qquad (5)$$

$$v_{j,t}(x,t)+b_j(x,t)v_j(x,t)-g_{M+j}\big(x,t,w(x,t),w_\tau(x,t)\big)=$$
$$=f_{M+j}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{Q},\quad j=1,...,L, \tag{6}$$

де $w=(u_1,\dots,u_M;v_1,\dots,v_L)$, $w_\tau(x,t)=(u_{1,\tau_1},\dots,u_{M,\tau_M};v_{1,\tau_{M+1}},\dots,v_{L,\tau_{M+L}}):=$ $\big(u_1(x,t-\tau_1(t)),\dots,u_M(x,t-\tau_M(t));v_1(x,t-\tau_{M+1}(t)),\dots,v_L(x,t-\tau_{M+L}(t))\big)$, а $\tau_1,\dots,\tau_{M+L}$ – неперервні невід'ємні функції на $[0,T]$.

Для кожного $s\in\{1,\dots,M+L\}$ під $E_{s,0}$ розуміємо множину, складену з чисел $t-\tau_s(t)$ таких, що $t-\tau_s(t)\le 0$ при $t\in[0,T]$, та числа 0.

Позначаємо через W множину вектор-функцій $w=(u_1,\dots,u_M;v_1,\dots,v_L)$ таких, що $u_i\in C\big(\overline{\Omega}\times(E_{i,0}\cup(0,T])\big)\cap C^{2,1}(Q)$ $(i=1,...,M)$, $v_j\in C\big(\overline{\Omega}\times(E_{M+j,0}\cup(0,T])\big)\cap C^{0,1}(\overline{Q})$ $(j=1,...,L)$.

Розглядаємо *задачу*: знайти вектор-функцію $w\in W$, яка задовольняє систему (5)-(6), крайові умови

$$u_i(x,t)=h_i(x,t),\quad (x,t)\in\Sigma,\quad i=1,...,M, \tag{7}$$

та початкові умови

$$w_s(x,t)=w_{s,0}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Omega}\times E_{s,0},\quad s=1,\dots,M+L. \tag{8}$$

Прикладом системи, розглянутої у цьому підрозділі, є така

$$u_t(x,t)-\Delta u(x,t)+a(x,t)u(x,t)-$$
$$-g_1\big(x,t,u(x,t),v(x,t),u(x,t-\tau_1(t)),v(x,t-\tau_2(t))\big)=f_1(x,t),\quad (x,t)\in Q,$$
$$v_t(x,t)+b(x,t)v(x,t)-$$
$$-g_2\big(x,t,u(x,t),v(x,t),u(x,t-\tau_1(t)),v(x,t-\tau_2(t))\big)=f_2(x,t),\quad (x,t)\in\overline{Q},$$

де τ_1,τ_2 – неперервні невід'ємні функції на $[0,T]$.

При умовах подібних до умов підрозділу 2.1 тут отримуємо результати подібні до результатів підрозділу 2.1.

У **підрозділі 2.3** досліджуємо крайову задачу без початкових умов для параболічних рівнянь із сильним виродженням у початковий момент часу.

Нехай $Q:=\Omega\times(0,T]$, $\widetilde{Q}:=\overline{\Omega}\times(0,T]$, $\Sigma:=\partial\Omega\times(0,T]$ і $\tau\in C((0,T])$, $0\le\tau(t)<t$ для всіх $t\in(0,T]$.

Розглядаємо *задачу*: знайти функцію $u\in C(\widetilde{Q})\cap C^{2,1}(Q)$ таку, що

$$p(x,t)u_t(x,t)-\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}(x,t)u_{x_kx_l}(x,t)+\sum_{k=1}^{n}a_k(x,t)u_{x_k}(x,t)+$$
$$+a_0(x,t)u(x,t)-g\big(x,t,u(x,t),u(x,t-\tau(t))\big)=f(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{9}$$
$$u(x,t)=h(x,t),\quad (x,t)\in\Sigma, \tag{10}$$
$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\,||u(\cdot,t)||_{C(\overline{\Omega})}<\infty. \tag{11}$$

Припускаємо, що

$(\mathcal{A})$ $a_{kl},\, a_k,\, a_0 \in C(Q)\,,\ a_{kl} = a_{lk}\ (k,l=\overline{1,n}),\ \inf\limits_{(x,t)\in Q} a_0(x,t) > 0$ і

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)\xi_k\xi_l \geq \mu(t)\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2 \quad \forall (x,t)\in Q,\ \forall \xi_1,...,\xi_n \in \mathbb{R},$$

де $\mu \in C((0,T])\,,\ \mu(t) > 0$ для кожного $t \in (0,T]$;

$(\mathcal{P})$ $p \in C(Q)\,,\ p(x,t) > 0 \quad \forall (x,t) \in Q\,,\ \lim\limits_{t\to 0+} p(x,t) = 0 \ \ \forall x \in \Omega$ та існує $\varphi \in C((0,T])$ така, що $\varphi(t) > 0\ \forall t \in (0,T], \int_0^T \varphi(s)ds = +\infty$, $\sup_{t\in(0,T]} \int_{t-\tau(t)}^{t} \varphi(s)ds < \infty,\quad \sup\limits_{(x,t)\in Q} p(x,t)\varphi(x) < \infty$;

$(\mathcal{G})$ $g(x,t,\xi,\eta),\ (x,t,\xi,\eta) \in \Omega\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, – неперервна за усіма змінними і неперервно диференційовна за змінними ξ та η функція, причому існують визначені на Q невід'ємні функції g_1, g_2 такі, що

$$0 \leq g_\xi(x,t,\xi,\eta) \leq g_1(x,t), \quad 0 \leq g_\eta(x,t,\xi,\eta) \leq g_2(x,t),\ \ (x,t)\in Q,\ (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2,$$

$$\inf_{(x,t)\in Q}(a_0(x,t) - g_1(x,t)) =: a_0^- > 0, \quad \sup_{(x,t)\in Q} g_2(x,t) =: g_2^+ < \infty;$$

крім того, $g(x,t,0,0) = 0$ для будь-яких $(x,t) \in Q$;

$(\mathcal{F})$ $f \in C(Q),\ h \in C(\Sigma)$ – обмежені функції.

Теорема 2.5. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{G})$ *і* $a_0^- - g_2^+ > 0$. *Припустимо, що* u_1, u_2 *– розв'язки задач, які відрізняються від задачі* (9)–(11) *лише тим, що замість* f, h *стоять* f_1, h_1 *та* f_2, h_2 *відповідно, з такими ж властивостями, які вказані для* f, h *в умові* $(\mathcal{F})$ *відповідно. Тоді для всіх* $(x,t) \in Q$ *виконуються нерівності*

$$\min\left\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+}\inf_{(y,s)\in Q}(f_1(y,s) - f_2(y,s)), \inf_{(y,s)\in\Sigma}(h_1(y,s) - h_2(y,s)), 0\right\} \leq$$
$$\leq u_1(x,t) - u_2(x,t) \leq$$
$$\leq \max\left\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+}\sup_{(y,s)\in Q}(f_1(y,s) - f_2(y,s)), \sup_{(y,s)\in\Sigma}(h_1(y,s) - h_2(y,s)), 0\right\}. \tag{12}$$

Зауважимо, що з цієї теореми випливає єдиність розв'язку задачі (9)–(11), його неперервна залежність від вихідних даних, а також оцінка , отримана з (12) при $u_1 = u,\ u_2 = 0\,,\ f_1 = f,\ f_2 = 0\,,\ h_1 = h,\ h_2 = 0\,.$

Теорема 2.6. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{G})$, $(\mathcal{F})$, $a_0^- - g_2^+ > 0$ *та для деякого* $\alpha \in (0,1]$ *маємо*

$(\mathcal{B}_1)$ $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$,

$(\mathcal{B}_2)$ $p, a_{kl},\ a_k,\ a_0 \in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\widetilde{Q})$ $(k,l=\overline{1,n})$, $g \in C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{loc}(\overline{\Omega}\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $f \in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\widetilde{Q})$, $h \in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\Sigma)$.

Крім того, припустимо, що

$(\mathcal{B}_3)$ $\partial a_{kl}/\partial x_s \in C(\widetilde{Q})$ $(k,l,s=\overline{1,n})$,

$(\mathcal{B}_4)$ τ *задовольняє умову Ліпшіца на* $(0,T]$ *локально.*

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (9)–(11) *і він належить простору* $C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\widetilde{Q})\cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$.

У **підрозділі 2.4** розглядаємо крайову задачу без початкових умов для різнокомпонентних систем рівнянь із сильним виродженням у початковий момент часу і при обмеженнях подібних до умов, вказаних у підрозділі 2.3, отримуємо результати, які подібні до результатів підрозділу 2.3.

У **підрозділі 2.5** досліджуємо задачу Фур'є для півлінійних параболічних рівнянь з локальним змінним запізненням.

Нехай $Q := \Omega\times S$, $\overline{Q} := \overline{\Omega}\times S$, $\Sigma := \partial\,\Omega\times S$.

Розглядаємо *задачу*: знайти функцію $u \in C\big(\overline{Q}\big)\cap C^{2,1}(Q)$ таку, що

$$u_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)u_{x_kx_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)u_{x_k}(x,t) +$$

$$+a_0(x,t)u(x,t) - g\big(x,t,u(x,t),u(x,t-\tau(t))\big) = f(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{13}$$

$$u(x,t) = h(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma, \tag{14}$$

$$\overline{\lim_{t\to-\infty}}\,||u(\cdot,t)||_{C(\overline{\Omega})} < \infty, \tag{15}$$

де $\tau \in C(S)$, $\tau(t)\geq 0$ $\forall t\in S$, $\sup\limits_{t\in S}\tau(t) < \infty$.

При обмеженнях, подібних до вказаних у підрозділі 2.1, отримуємо результати, які подібні до результатів підрозділу 2.1.

У **розділі 3** вивчаємо питання існування та єдиності узагальнених розв'язків задач для слабко нелінійних параболічних рівнянь з нелокальним змінним запізненням.

У **підрозділі 3.1** досліджуємо умови існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаної задачі для слабко нелінійних параболічних рівнянь з інтегральним запізненням:

знайти функцію $u : \overline{\Omega} \times [-\tau_0, T] \to \mathbb{R}$, що задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,u,\nabla u) + a_0(x,t,u,\nabla u) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x,t,s,u(x,s))ds =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} (f_i(x,t))_{x_i} + f_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{16}$$

крайові умови

$$u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i\Big|_{\Sigma_1} = 0 \tag{17}$$

та початкову умову

$$u(x,t) = u_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0], \tag{18}$$

де $\tau : [0,T] \to \mathbb{R}$ – неперервна функція така, що $\tau(t) \geq 0$ для всіх $t \in [0,T]$, $\tau_0 := -\min\limits_{t\in[0,T]}(t - \tau(t))$, $\tau^+ := \max\limits_{t\in[0,T]} \tau(t)$, а $a_i : \Omega \times (0,T] \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $c : \Omega \times (0,T) \times (-\tau_0, T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i : \Omega \times (0,T] \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,n})$, $u_0 : \overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0] \to \mathbb{R}$ – задані дійснозначні функції з відповідних класів вихідних даних.

Прикладом рівнянь, які розглядаємо в цьому підрозділі, є таке

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \left(\widehat{a}_{ij}(x,t)u_{x_j}\right)_{x_i} + \widehat{a}_0(x,t)u + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \widehat{c}(x,t,s)u(x,s)ds = f(x,t), \tag{19}$$

де $\widehat{a}_{ij}, \widehat{a}_0 \in L_\infty(\Omega\times(0,T))$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j = \overline{1,n})$, причому $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{(x,t)\in\Omega\times(0,T)} \widehat{a}_0(x,t) > 0$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \mu \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ і всіх $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{R}$, де $\mu = \text{const} > 0$; $\widehat{c} : \Omega \times (0,T) \times (-\tau_0, T) \to \mathbb{R}$ – вимірна обмежена функція; $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$.

У **підрозділі 3.2** вивчено задачу Фур'є для слабко нелінійних параболічних рівнянь з нелокальним змінним запізненням.

Нехай $Q := \Omega \times S$, $\overline{Q} := \overline{\Omega} \times S$, $\Sigma := \partial\Omega \times S$.

Через $C_c^\infty(\Omega)$ позначаємо простір нескінченно диференційовних на Ω функцій з компактним носієм. Нехай $H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \mid v_{x_i} \in L^2(\Omega)\ (i = \overline{1,n})\}$ – простір Соболєва, який є гільбертовим зі скалярним добутком $(v,w)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \left\{\nabla v \nabla w + vw\right\} dx$, де $\nabla v := (v_{x_1}, \ldots, v_{x_n})$, $\nabla w := (w_{x_1}, \ldots, w_{x_n})$,

і відповідною нормою $\|v\|_{H^1(\Omega)} := \big(\int\limits_{\Omega} \{|\nabla v|^2 + |v|^2\}\, dx\big)^{1/2}$. Під $H_0^1(\Omega)$ розуміємо замикання простору $C_c^\infty(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$.

Для довільного банахового простору X через $L^2(a,b;X)$, де $-\infty \le a < b \le +\infty$, позначаємо простір (класів) вимірних функцій $w : [a,b] \to X$ таких, що $||w(\cdot)||_X \in L^2(a,b)$. Під $L^2_{\mathrm{loc}}(S;X)$ розуміємо лінійний простір (класів) визначених і вимірних на S функцій зі значеннями в X таких, що їхнє звуження на будь-який відрізок $[a,b] \subset S$ належить до $L^2(a,b;X)$. Позначаємо через $L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(1 \le p \le \infty)$ лінійний простір (класів) визначених і вимірних на Q функцій таких, що їхнє звуження на будь-яку обмежену вимірну множину $Q' \subset Q$ належить до $L^p(Q')$.

Під $C_c^1(I)$, де I – числовий інтервал, розуміємо лінійний простір визначених на I неперервно диференційовних функцій з компактними носіями.

Позначаємо через $F_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ простір вектор-функцій $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ таких, що $f_i \in L^2_{\mathrm{loc}}(Q)$ для кожного $i \in \{0, 1, ..., n\}$.

Для довільних $\omega \in \mathbb{R}$ і гільбертового простору X зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і відповідною нормою $\|\cdot\|_X$ позначаємо

$$L^2_\omega(S;X) := \Big\{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;X) \;\Big|\; \int_S e^{2\omega t} \|f(t)\|_X^2\, dt < \infty \Big\}.$$

Простір $L^2_\omega(S;X)$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком і нормою

$$(f,g)_{L^2_\omega(S;X)} = \int_S e^{2\omega t} (f(t), g(t))_X\, dt, \quad \|f\|_{L^2_\omega(S;X)} := \Big(\int_S e^{2\omega t} \|f(t)\|_X^2\, dt \Big)^{1/2}.$$

Розглядаємо *задачу*: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}\, a_i(x,t,u,\nabla u) + a_0(x,t,u,\nabla u) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x,t,s,u(x,s))ds =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \big(f_i(x,t)\big)_{x_i} + f_0(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{20}$$

крайову умову

$$u\Big|_{\Sigma} = 0 \tag{21}$$

та аналог початкової умови

$$\lim_{t \to -\infty} e^{2\omega t} ||u(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{22}$$

де $\omega \in \mathbb{R}$ – задане число.

Тут $\tau : S \to \mathbb{R}$ – неперервна обмежена функція така, що $\tau(t) \geq 0$ для всіх $t \in S$, а $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $c : Q \times S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i : Q \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,n})$ – задані дійснозначні функції з відповідних класів вихідних даних.

Позначаємо через $\mathcal{A}$ множину наборів $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ функцій $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,n})$, які задовольняють умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного $i \in \{0, 1, ..., n\}$ функція $a_i(x, t, \rho, \xi), (x, t, \rho, \xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$, є каратеодорівською та $a_i(x, t, 0, 0) = 0$ для майже всіх $(x, t) \in Q$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, майже всіх $(x, t) \in Q$ і всіх $(\rho, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$|a_i(x, t, \rho, \xi)| \leq C_1\big(|\rho| + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|\big) + h_i(x, t),$$

де $C_1 > 0$ – стала, $h_i \in L^2_{\mathrm{loc}}(Q)$;

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x, t) \in Q$ і всіх (ρ_1, ξ^1), $(\rho_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x, t, \rho_1, \xi^1) - a_i(x, t, \rho_2, \xi^2)\big)(\xi_i^1 - \xi_i^2) +$$

$$+\big(a_0(x, t, \rho_1, \xi^1) - a_0(x, t, \rho_2, \xi^2)\big)(\rho_1 - \rho_2) \geq K_1 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i^1 - \xi_i^2|^2 + K_2|\rho_1 - \rho_2|^2, \tag{23}$$

де $K_1 > 0, K_2 \in \mathbb{R}$ – сталі.

Через $\mathcal{C}$ позначаємо множину дійснозначних функцій $c : Q \times S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, що

$(\mathcal{C}_1)$ c – каратеодорівська функція, $c(x, t, s, 0) = 0$ для майже всіх $(x, t, s) \in Q \times S$;

$(\mathcal{C}_2)$ існує стала $L > 0$ така, що для майже всіх $(x, t, s) \in Q \times S$ і всіх ρ_1, $\rho_2 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\big|c(x, t, s, \rho_1) - c(x, t, s, \rho_2)\big| \leq L|\rho_1 - \rho_2|. \tag{24}$$

Зауважимо, що прикладом рівняння, яке задовольняє наведені вище умови є рівняння (19).

Означення 3.2. *Нехай* $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}$, $c \in \mathcal{C}$, $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in F_{2,\mathrm{loc}}(Q)$. *Узагальненим розв'язком задачі (20)–(22) називаємо функцію* $u \in$

$L^2_{\mathrm{loc}}(S;H^1_0(\Omega))\cap C\left(S;L^2(\Omega)\right)$ *таку, що виконується умова (22) і правильна інтегральна тотожність*

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u)v_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u,\nabla u)v\varphi + v\varphi\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x,t,s,u(x,s))\,ds-$$

$$-uv\varphi'\Big\}\,dxdt = \iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n f_i v_{x_i}\varphi + f_0 v\varphi\Big\}\,dxdt \tag{25}$$

для кожних $v\in H^1_0(\Omega)$ *і* $\varphi\in C^1_c(-\infty,0)$.

Позначаємо

$$\tau^+ := \sup_{t\in S}\tau(t), \qquad \chi(\omega) := \begin{cases} \tau^+, & \text{якщо } \omega=0,\\ \frac{1}{2\omega}(e^{2\omega\tau^+}-1), & \text{якщо } \omega\neq 0,\end{cases} \tag{26}$$

і розглядаємо нерівність

$$\omega + 2L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)} < K_1/K_0 + K_2, \tag{27}$$

де K_1, K_2 – сталі з (23), K_0 – стала з нерівності Фрідріхса

$$||v||_{L^2(\Omega)} \le K_0||v||_{H^1_0(\Omega)} \quad \forall v\in H^1_0(\Omega).$$

Очевидно, що $\omega + 2L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}\to-\infty$ при $\omega\to-\infty$, оскільки $\chi(\omega)\to 0$ при $\omega\to-\infty$, а отже, нерівність (27) має розв'язок.

Теорема 3.2. *Нехай* $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{A}$, $c\in\mathcal{C}$, $(f_0,f_1,\dots,f_n)\in F_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ *і* ω *– який-небудь фіксований розв'язок нерівності* (27). *Тоді узагальнений розв'язок задачі* (20)–(22) *єдиний.*

Теорема 3.3. *Нехай виконуються припущення теореми 3.2 і* $f_i\in L^2_\omega(S;L^2(\Omega))$ $(i=\overline{0,n})$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (20)–(22) *і для нього є правильні оцінки*

$$e^{2\omega\sigma}\int\limits_\Omega |u(x,\sigma)|^2\,dx \le C_2\int\limits_{-\infty}^{\sigma} e^{2\omega t}||f(\cdot,t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt, \quad \sigma\in S, \tag{28}$$

$$||u||_{L^2_\omega(S;H^1_0(\Omega))} \le C_3\,||f||_{L^2_\omega(S;L^2(\Omega))}, \tag{29}$$

де C_2, C_3 *– додатні сталі, які залежать тільки від* $\tau^+,\omega,L,K_0,K_1,K_2$.

У **розділі 4** вивчаємо питання існування та єдиності узагальнених розв'язків задач для сильно нелінійних параболічних рівнянь і еволюційних включень з нелокальним змінним запізненням.

У **підрозділі 4.1** досліджуємо мішану задачу для параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності і нелокальним запізненням.

Нехай $Q := \Omega \times (0,T]$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0,T]$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0,T]$.

Під $L_{r(\cdot)}(G)$, де $r \in L_\infty(\Omega)$, $r(x) \geq 1$ для майже всіх $x \in \Omega$, $G = \Omega$ або $G = Q$, розуміємо лінійний простір, складений з класів вимірних функцій $v : G \to \mathbb{R}$ таких, що $\rho_{G,r}(v) < \infty$, де $\rho_{G,r}(v) := \int_\Omega |v(x)|^{r(x)}\,dx$, якщо $G = \Omega$, і $\rho_{G,r}(v) := \iint_Q |v(x,t)|^{r(x)}\,dxdt$, якщо $G = Q$. Він є банаховим простором з нормою $||v||_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \leq 1\}$.

Розглядаємо вектор-функцію $p = (p_0, \ldots, p_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$, яка задовольняє умову:

$(\mathcal{P})$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна функція така, що

$$p_i^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_i(x) > 1\,, \qquad p_i^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_i(x) < +\infty\,.$$

Позначаємо через $p' = (p_0', \ldots, p_n') : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ вектор-функцію таку, що $\frac{1}{p_i(x)} + \frac{1}{p_i'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in \Omega$ $(i = \overline{0,n})$.

Нехай $W^1_{p(\cdot)}(\Omega) := \left\{v \in L_{p_0(\cdot)}(\Omega) \mid v_{x_i} \in L_{p_i(\cdot)}(\Omega)\,(i = \overline{1,n})\right\}$ – узагальнений простір Соболєва з нормою $||v||_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)} := ||v||_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n ||v_{x_i}||_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega)}$. Нехай $\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ – замикання простору $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega}) := \left\{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\right\}$ в просторі $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$, а $V_p(\Omega) := \widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega) \cap L_2(\Omega)$. Очевидно, що $V_p(\Omega)$ є банаховим простором з нормою $||v||_{V_p(\Omega)} := ||v||_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)} + ||v||_{L_2(\Omega)}$.

Через $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ позначаємо банахів простір функцій $w \in L_{p_0(\cdot)}(Q)$ таких, що $w_{x_i} \in L_{p_i(\cdot)}(Q)$ $(i = \overline{1,n})$, з нормою $||w||_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)} := ||w||_{L_{p_0(\cdot)}(Q)} + \sum_{i=1}^n ||w_{x_i}||_{L_{p_i(\cdot)}(Q)}$. Під $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ розуміємо замикання простору $\widetilde{C}^{1,0}(\overline{Q}) := \left\{w \in C(\overline{Q}) \;\middle|\; w_{x_i} \in C(\overline{Q})\ (i = \overline{1,n}),\quad w|_{\Sigma_0} = 0\right\}$ в просторі $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$. Легко переконатись, що $w(\cdot,t) \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ для майже всіх $t \in (0,T)$, якщо $w \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$.

Позначаємо через $F_{p'}(Q)$ простір вектор-функцій $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ таких, що $f_i \in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ і $f_i = 0$ майже скрізь у деякому околі поверхні Σ_1 для кожного $i \in \{1, ..., n\}$.

Під $C^1_c(0,T)$ розуміємо підмножину множини $C^1(0,T)$, складену з функцій, які мають компактний носій.

Розглядаємо *задачу*: знайти функцію $u : \overline{\Omega} \times [-\tau_0, T] \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (у певному сенсі) рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}\, a_i(x,t,u,\nabla u) + a_0(x,t,u,\nabla u) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x,t,s,u(x,s))ds =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \big(f_i(x,t)\big)_{x_i} + f_0(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{30}$$

крайові умови

$$u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i\Big|_{\Sigma_1} = 0 \tag{31}$$

та початкову умову

$$u(x,t) = u_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0]. \tag{32}$$

Тут $\tau : [0,T] \to \mathbb{R}$ – неперервна функція така, що $\tau(t) \geq 0$ для всіх $t \in [0,T]$, $\tau_0 := -\min\limits_{t\in[0,T]}(t - \tau(t))$, $\tau^+ := \max\limits_{t\in[0,T]} \tau(t)$, а $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $c : Q \times (-\tau_0, T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i : Q \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,n})$, $u_0 : \overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0] \to \mathbb{R}$ – задані дійснозначні функції.

Позначаємо через $\mathcal{A}_p$, де p – вектор-функція, яка задовольняє умову $(\mathcal{P})$, множину наборів $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ функцій, що задовольняють такі умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ функція $a_i(x,t,\rho,\xi)$, $(x,t,\rho,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$, є каратеодорівською;

$(\mathcal{A}_2)$ для всіх $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, майже всіх $(x,t) \in Q$ і всіх $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$|a_i(x,t,\rho,\xi)| \leq C_1\Big(|\rho|^{p_0(x)/p_i'(x)} + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p_i'(x)}\Big) + h_i(x,t),$$

де $C_1 = \text{const} > 0$, $h_i \in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$;

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ і всіх (ρ_1,ξ^1), $(\rho_2,\xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\xi_i^1 - \xi_i^2) +$$

$$+\big(a_0(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_0(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\rho_1 - \rho_2) \geq 0; \tag{33}$$

$(\mathcal{A}_4)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ і всіх $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,\rho,\xi)\xi_i + a_0(x,t,\rho,\xi)\rho \geq K\Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{p_i(x)} + |\rho|^{p_0(x)}\Big) - g(x,t),$$

де $K = \text{const} > 0$, $g \in L_1(Q)$ $(g \geq 0)$.

Через $\mathcal{C}$ позначаємо множину функцій $c(x,t,s,\rho)$, $(x,t,s,\rho) \in Q \times (-\tau_0, T) \times \mathbb{R}$, таких, що

$(\mathcal{C}_1)$ c – каратеодорівська, $c(x,t,s,0)=0$ для майже всіх $(x,t,s)\in Q\times(-\tau_0,T)$;

$(\mathcal{C}_2)$ для майже всіх $(x,t,s)\in Q\times(-\tau_0,T)$ і всіх ρ_1, $\rho_2\in\mathbb{R}$

$$\big|c(x,t,s,\rho_1)-c(x,t,s,\rho_2)\big|\le L|\rho_1-\rho_2|, \tag{34}$$

де $L=\mathrm{const}>0$.

Прикладом досліджуваних у цьому підрозділі рівнянь є таке

$$u_t-\sum_{i=1}^{n}\Big(\widehat{a}_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i}\Big)_{x_i}+\widehat{a}_0(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u+$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\widehat{c}(x,t,s)\,u(x,s)\,ds=f(x,t), \tag{35}$$

де $\widehat{a}_0,...,\widehat{a}_n$ – вимірні обмежені додатні функції на Q, функція $p=(p_0,...,p_n)$ задовольняє умову $(\mathcal{P})$, $\widehat{c}$ – вимірна обмежена функція, $f\in L_{p_0'(\cdot)}(Q)$.

Означення 4.1. *Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P})$, $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{A}_p$, $c\in\mathcal{C}$, $(f_0,f_1,\dots,f_n)\in F_{p'}(Q)$, $u_0\in C([-\tau_0,0];L_2(\Omega))$. Узагальненим розв'язком задачі (30)–(32) називаємо функцію $u\in\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)\cap C\left([-\tau_0,T];L_2(\Omega)\right)$, яка задовольняє початкову умову*

$$||u(\cdot,t)-u_0(\cdot,t)||_{L_2(\Omega)}=0\qquad\forall t\in[-\tau_0,0] \tag{36}$$

та інтегральну тотожність вигляду (25) *для кожних $v\in V_p(\Omega)$, $\varphi\in C_c^1(0,T)$.*

Теорема 4.1. *Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P})$, $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{A}_p$, $c\in\mathcal{C}$, $(f_0,f_1,\dots,f_n)\in F_{p'}(Q)$, $u_0\in C([-\tau_0,0];L_2(\Omega))$. Тоді задача (30)–(32) має єдиний узагальнений розв'язок u і він задовольняє оцінку*

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega}|u(x,t)|^2\,dx+\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big|u_{x_i}(x,t)\big|^{p_i(x)}+|u(x,t)|^{p_0(x)}\Big\}\,dxdt\le$$

$$\le C_2\Big(\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big|f_i(x,t)\big|^{p_i'(x)}+g(x,t)\Big\}\,dxdt+\max_{t\in[-\tau_0,0]}\int\limits_{\Omega}|u_0(x,t)|^2\,dx\Big), \tag{37}$$

де $C_2>0$ – стала, що залежить лише від K, L, τ_0,τ^+,T та p_i^- $(i=\overline{0,n})$.

У **підрозділі 4.2** досліджуємо задачу Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності і нелокальним запізненням.

Нехай $Q := \Omega \times S$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times S$, $Q_{t_1,t_2} := \Omega \times (t_1, t_2)$ для довільних дійсних t_1 і t_2, $t_1 < t_2$.

Через $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, де $r \in L_\infty(\Omega)$, $r(x) \geq 1$ для майже всіх $x \in \Omega$, позначаємо простір вимірних функцій $g\colon Q \to \mathbb{R}$ таких, що звуження g на Q_{t_1,t_2} належить до $L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ для всіх $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$. Цей простір є повним локально опуклим лінійним простором щодо сім'ї півнорм $\left\{ \|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} \,\middle|\, t_1, t_2 \in S \right\}$. Аналогічним чином визначаємо простір $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Розглядаємо вектор-функцію $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$, яка задовольняє умову:

$(\mathcal{P}^*)$ виконується умова $(\mathcal{P})$ (з підрозділу 4.1) і $p_i^- \geq 2$ $(i = \overline{0,n})$.

Нехай $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}) := \left\{ w \in L_{p_0(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \mid w_{x_i} \in L_{p_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})\, (i = \overline{1,n}), w(\cdot,t) \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega) \text{ для майже всіх } t \in S \right\}$.

Через $F_{p',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ позначаємо простір вектор-функцій $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ таких, що $f_i \in L_{p_i'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і $f_i = 0$ майже скрізь в деякому околі поверхні Σ_1 для кожного $i \in \{0, ..., n\}$.

Розглядаємо *задачу*: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка (в певному сенсі) задовольняє рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}\, a_i(x,t,u,\nabla u) + a_0(x,t,u,\nabla u) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x,t,s,u(x,s))ds =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \big(f_i(x,t)\big)_{x_i} + f_0(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{38}$$

і крайові умови

$$u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i\Big|_{\Sigma_1} = 0. \tag{39}$$

Тут $\tau : S \to \mathbb{R}$ — неперервна обмежена функція така, що $\tau(t) \geq 0$ для всіх $t \in S$, $\tau^+ := \sup\limits_{t\in S} \tau(t)$, а $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $c : Q \times S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i : Q \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,n})$ – задані дійснозначні функції.

Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P}^*)$. Через $\mathcal{A}_p$ позначимо множину наборів $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ дійснозначних функцій $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,n})$, які задовольняють умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ функція a_i є каратеодорівською і $a_i(x,t,0,0) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, майже всіх $(x,t) \in Q$ і всіх $(\rho, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$|a_i(x,t,\rho,\xi)| \le C_1\Big(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p_i'(x)} + |\rho|^{p_0(x)/p_i'(x)}\Big) + h_i(x,t),$$

де $C_1 = \mathrm{const} > 0$, $h_i \in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$;

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ і всіх (ρ_1, ξ^1), $(\rho_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\xi_i^1 - \xi_i^2) + \\ &+ \big(a_0(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_0(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\rho_1 - \rho_2) \ge \\ \ge K_1\Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i^1 - \xi_i^2|^{p_i(x)} &+ |\rho_1 - \rho_2|^{p_0(x)}\Big) + K_2|\rho_1 - \rho_2|^2, \end{aligned} \tag{40}$$

де $K_1, K_2 = \mathrm{const} > 0$.

Через $\mathcal{C}$ позначимо множину функцій $c(x,t,s,\rho)$, $(x,t,s,\rho) \in Q \times S \times \mathbb{R}$, які задовольняють умови:

$(\mathcal{C}_1)$ функція c є каратеодорівською і $c(x,t,s,0) = 0$ для майже всіх $(x,t,s) \in Q \times S$;

$(\mathcal{C}_2)$ існує стала $L > 0$ (залежна від c) така, що для майже всіх $(x,t,s) \in Q \times S$ і всіх ρ_1, $\rho_2 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\big|c(x,t,s,\rho_1) - c(x,t,s,\rho_2)\big| \le L|\rho_1 - \rho_2|. \tag{41}$$

Зауважимо, що прикладом досліджуваних у цьому підрозділі рівнянь є рівняння (35).

Означення 4.2. *Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P}^*)$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}_p$, $c \in \mathcal{C}$, $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in F_{p',loc}(\overline{Q})$. Узагальненим розв'язком задачі (38), (39) називаємо функцію $u \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),loc}(\overline{Q}) \cap L_2(Q) \cap C\,(S; L_2(\Omega))$ таку, що виконується інтегральна тотожність вигляду (25) для кожного $v \in V_p(\Omega)$ і $\varphi \in C_c^1(-\infty, 0)$.*

Теорема 4.2. *Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P}^*)$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}_p$, $c \in \mathcal{C}$, $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in F_{p',loc}(\overline{Q})$ і, крім того, $f_i \in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i = \overline{0,n})$,*

$$K_2 - L\tau^+ > 0. \tag{42}$$

Тоді задача (38), (39) *має єдиний узагальнений розв'язок, він належить простору* $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ *і для нього правильна оцінка*

$$\sup_{t\in S}\int\limits_{\Omega}|u(x,t)|^2\,dx+\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big|u_{x_i}(x,t)\big|^{p_i(x)}+|u(x,t)|^{p_0(x)}+|u(x,t)|^2\Big\}\,dxdt\le$$

$$\le C_2\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}\big|f_i(x,t)\big|^{p_i'(x)}\Big\}\,dxdt, \tag{43}$$

де $C_2>0$ *— стала, яка залежить тільки від* K_1, K_2, L, τ^+ *і* p_i^- $(i=\overline{0,n})$.

У **підрозділі 4.3** розглядаємо задачу без початкових умов для сильно нелінійних еволюційних включень.

Нехай V – сепарабельний рефлексивний банахів простір над полем дійсних чисел з нормою $\|\cdot\|$, а H – гільбертів простір над полем дійсних чисел зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $|\cdot|$. Припускаємо, що простір V вкладається щільно, неперервно і компактно в H. Вважаємо (провівши відповідне ототожнення функціоналів), що простір H' є підпростором спряженого до V простору V'. Ототожнивши (на підставі теореми Рісса) простори H та H', отримуємо неперервні та щільні вкладення

$$V\subset H\subset V'. \tag{44}$$

Зауважимо, що в даному випадку $\langle g,v\rangle=(g,v)$ для будь-яких $v\in V, g\in H$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означає дію елемента з V' на елемент з V. Тому далі вживаємо позначення $(\cdot,\cdot)$ замість $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Нехай $q\in[1,\infty]$, q' – спряжене до q, тобто, $1/q+1/q'=1$. Під $L^q_{\rm loc}(S;X)$ розуміємо лінійний простір визначених і вимірних на S зі значеннями в банаховому просторі X функцій таких, що для будь-яких $t_1,t_2\in S$ $(t_1<t_2)$ їх звуження на відрізок $[t_1,t_2]$ належать простору $L^q(t_1,t_2;X)$.

Розглядаємо простори

$$H^1(S;H):=\big\{w\in L^2(S;H)\mid w'\in L^2(S;H)\big\},$$

$$W_{q,{\rm loc}}(S;V):=\{w\in L^q_{\rm loc}(S;V)\,\big|\,w'\in L^{q'}_{\rm loc}(S;V')\}.$$

Нехай $\Phi:V\to(-\infty,+\infty]$ – власний функціонал, тобто $\mathrm{dom}(\Phi):=\{v\in V:\ \Phi(v)<+\infty\}\neq\emptyset$, який задовольняє умови:

$(\mathcal{A}_1)$ $\quad\Phi\big(\alpha v+(1-\alpha)w\big)\leqslant\alpha\Phi(v)+(1-\alpha)\Phi(w)\qquad\forall\,v,w\in V,\ \forall\,\alpha\in[0,1],$

тобто Φ є *опуклим*,

$(\mathcal{A}_2)$ $\quad v_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}v$ в $V\quad\Longrightarrow\quad\underline{\inf}_{k\to\infty}\,\Phi(v_k)\ge\Phi(v),$

тобто Φ є *напівнеперервним знизу*.

Нагадаємо, що *субдиференціалом* функціоналу Φ називають відображення $\partial\Phi : V \to 2^{V'}$, визначене за правилом

$$\partial\Phi(v) := \{v^* \in V' \mid \Phi(w) \geqslant \Phi(v) + (v^*, w - v) \quad \forall\, w \in V\}$$

для довільного $v \in V$, а *областю визначення* субдиференціалу $\partial\Phi$ – множину $D(\partial\Phi) := \{v \in V \,|\, \partial\Phi(v) \neq \emptyset\}$. Ми ототожнюємо субдиференціал $\partial\Phi$ з його графіком, вважаючи, що $[v, v^*] \in \partial\Phi$ тоді і лише тоді, коли $v^* \in \partial\Phi(v)$, тобто $\partial\Phi = \{[v, v^*] \mid v \in D(\partial\Phi),\ v^* \in \partial\Phi(v)\}$.

Також припускаємо, що виконуються умови:

$(\mathcal{A}_3)$ існують сталі $p > 2$, $K_1 > 0$ такі, що

$$\Phi(v) \geqslant K_1\|v\|^p \quad \forall\, v \in \mathrm{dom}(\Phi);$$

крім того, $\Phi(0) = 0$;

$(\mathcal{A}_4)$ існує стала $K_2 > 0$ така, що для довільних $[v_1, v_1^*]$, $[v_2, v_2^*] \in \partial\Phi$:

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant K_2|v_1 - v_2|^2.$$

Нехай $c : S \times S \times H \to H$ – функція, яка задовольняє умову:

$(\mathcal{C})$ для будь-якого $v \in H$ відображення $c(\cdot, \cdot, v) : S \times S \to H$ є вимірним, та існує стала $L > 0$ така, що правильна нерівність

$$|c(t, s, v_1) - c(t, s, v_2)| \leq L|v_1 - v_2|$$

для майже всіх $(t, s) \in S \times S$ і всіх $v_1, v_2 \in H$; крім того, $c(t, s, 0) = 0$ для майже всіх $(t, s) \in S \times S$.

Розглянемо еволюційну варіаційну нерівність (субдиференціальне включення)

$$u'(t) + \partial\Phi\big(u(t)\big) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t, s, u(s))\, ds \ni f(t), \quad t \in S, \tag{45}$$

де $f : S \to V'$ – задана функція, $\tau : S \to \mathbb{R}$ – задана неперервна функція така, що $\tau(t) \geq 0$ для всіх $t \in S$, $\tau^+ := \sup\limits_{t \in S} \tau(t) < \infty$, $u : S \to V$ – шукана функція.

Означення 4.3. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{C})$ *і* $f \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S; V')$. *Функцію* u *називаємо* розв'язком *варіаційної нерівності (45), якщо вона задовольняє такі умови:*

1) $u \in W_{p,\mathrm{loc}}(S; V) \cap L^2(S; H)$;

2) $u(t) \in D(\partial\Phi)$ *для майже всіх* $t \in S$ *;*

3) *існує функція* $g \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S;V')$ *така, що для майже всіх* $t \in S$ *маємо* $g(t) \in \partial\Phi\big(u(t)\big)$ *і*

$$u'(t) + g(t) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u(s))\,ds = f(t) \quad \text{в} \quad V'.$$

Задачу на знаходження розв'язку варіаційної нерівності (45) при заданих Φ, c, τ і f називаємо задачею без початкових умов для еволюційної варіаційної нерівності (45) або, коротко, задачею $\mathbf{P}(\Phi, c, \tau, f)$, а функцію u – її розв'язком.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_4)$, $(\mathcal{C})$. *Припустимо, що* $f \in L^2(S;H)$ *і*

$$K_2 - L\tau^+ > 0.$$

Тоді задача $\boldsymbol{P}(\Phi, c, \tau, f)$ *має єдиний розв'язок і він належить простору* $L^\infty(S;V) \cap L^p(S;V) \cap H^1(S;H)$ *та задовольняє оцінки:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in S} \|u(t))\| \leqslant C_1\Big(\int_S |f(t)|^2\,dt\Big)^{1/p},$$

$$\int_S \big(\|u(t)\|^p + |u(t)|^2 + |u'(t)|^2\big)\,dt \leqslant C_2 \int_S |f(t)|^2\,dt,$$

де $C_1, C_2 > 0$ *– сталі, що залежать лише від* K_1, K_2, L *та* τ^+.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню задач для параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь зі змінним запізненням. Такі задачі виникають при математичному моделюванні процесів у природознавстві, техніці, економіці, теорії популяцій тощо. На даний час досить добре вивчено задачі для параболічних рівнянь та їх систем у випадку сталого запізнення. Проте задачі для параболічних рівнянь та їх систем із залежним від часу як локальним, так і нелокальним запізненням раніше не вивчались.

У роботі знайдено умови існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних, а також апріорні оцінки класичних розв'язків мішаних задач та крайових задач без початкових умов для півлінійних параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь з локальним змінним запізненням. Також встановлено умови існування, єдиності та апріорні оцінки узагальнених розв'язків мішаних задач та задачі Фур'є для слабко нелінійних параболічних рівнянь з нелокальним змінним запізненням. Для сильно нелінійних

параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності та нелокальним запізненням отримано умови існування та єдиності, а також апріорні оцінки узагальнених розв'язків мішаних задач та задачі Фур'є. Крім того, знайдено умови існування та єдиності, а також апріорні оцінки розв'язку задачі Фур'є для сильно нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей (субдиференціальних включень) з нелокальним змінним запізненням.

Ці результати мають теоретичний характер і їх можна використати для дослідження еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей із запізненням, а також при розв'язуванні практичних задач, які моделюються такими рівняннями.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бокало М. М., Ільницька О. В. Мішана задача для нелінійних параболічних рівнянь зі змінним запізненням // Буковинський математичний журнал. 2015. 3(1). С. 16-24.

2. Bokalo M. M., Ilnytska O. V. Initial-boundary value problems for coupled systems with variable time delay// International Journal of Evolution Equations. 2016. 10(1). C. 1-19.

3. Bokalo M., Ilnytska O. Unique solvability of initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations with time dependent delay // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2016. 81. С. 23—38.

4. Ilnytska O.V. Fourier problem for nonlinear parabolic equations with time-dependent delay // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2016. 82. С. 151—165.

5. Бокало М. М., Ільницька О. В. Крайова задача для нелінійних параболічних рівнянь із запізненням та виродженням у початковий момент// Український математичний журнал. 2016. 63(9). С. 1155-1168.

Bokalo M.M., Il'nyts'ka O.V. Boundary-value problems for nonlinear parabolic equations with delay and degeneration at the initial time // Ukrainian Mathematical Journal (2017) 68(9). P. 1323–1339. doi:10.1007/s11253-017-1298-6

6. Bokalo M. M., Ilnytska O. V. Problems for parabolic equations with variable exponents of nonlinearity and time delay // Applicable analysis. 2017. 96(7). P. 1240-1254 (опубліковано онлайн 24 травня 2016).

7. Ilnytska O. V., Bokalo M. M. Problem without initial conditions for coupled systems of evolution equations strongly degenerated at initial moment // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach: Abstracts of Reports, Lviv, Ukraine, 17—21 September 2012. — Lviv, 2012. — P. 197.

8. Ilnytska O. V. Boundary value problems for degenerate parabolic equations with variable delay // Міжнародна конференція молодих математиків. Тези доповідей, 3—6 червня 2015.— Київ, 2015.— С. 121.

9. Ilnytska O. V., Bokalo M. M. Initial-boundary value problems for parabolic delay equations with variable exponents of nonlinearity // International V. Skorobohatko mathematical conference, August 25—28, 2015, Drohobych, Ukraine. — P. 63.

10. Bokalo M. M., Ilnytska O. V. Initial-Boundary Value Problems for Coupled Systems of Parabolic Equations with Variable Delay// International Scientific Conference «Differential equations and their applications», May 19—21, 2016, Uzhhorod, Ukraine. — P. 17.

11. Ilnytska O. V. A mixed boundary value problem for parabolic equations with variable delay // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання — 2016», Львів, 25–27 травня 2016, — Львів, 2016. — Режим доступу до матеріалів: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Ilnytska.pdf.

12. Ilnytska O. V., Bokalo M. M. Boundary value problems for coupled systems of degenerate parabolic equations with variable delay// International Conference on Differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20—24, 2016, Lviv, Ukraine. — P. 70.

13. Ilnytska O. V., Bokalo M. M Initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations with time depended delay // International Scientific Conference "Differential-Functional Equations and their Application"dedicated to the 80th anniversary of Professor V. I. Fodchuk, September 28–30, 2016, Chernivtsi, Ukraine. P. — 118–119.

14. Ilnytska O. V. Problems without initial conditions for nonlinear parabolic equations with time delay // 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynskii: Book of abstracts, November 9—11, 2016, Kyiv, Ukraine. — Kyiv, 2016. — P. 73–75.

Анотація

Ільницька О.В. Задачі без початкових умов для еволюційних систем із запізненням. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2017.

Дисертація присвячена дослідженню умов коректності задач для параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь із залежним від часу запізненням.

Знайдено умови існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних класичних розв'язків мішаних задач для півлінійних параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь з локальним змінним запізненням, задач без початкових умов для півлінійних параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь з локальним змінним запізненням, що

сильно вироджуються у початковий момент часу, задачі Фур'є для півлінійних параболічних рівнянь з локальним змінним запізненням.

Вивчено питання існування та єдиності узагальнених розв'язків задач для слабко нелінійних параболічних рівнянь з інтегральним змінним запізненням. Встановлено умови коректності мішаних задач та задачі Фур'є для таких рівнянь.

Встановлено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаних задач та задачі Фур'є для параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності та інтегральним запізненням.

Доведено коректність задачі Фур'є для нелінійних еволюційних варіаційних нерівностей (субдиференціальних включень) у класах функцій з певною поведінкою на нескінченності.

Ключові слова: мішана задача, задача без початкових умов, задача Фур'є, часове запізнення, параболічне рівняння, різнокомпонентна система, еволюційне рівняння, еволюційна варіаційна нерівність, еволюційне субдиференціальне включення, сильно вироджуване рівняння.

Аннотация

Ильницкая О.В. Задачи без начальных условий для эволюционных систем из запаздыванием. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Львовский национальный университет имени Ивана Франка, Львов, 2017.

Диссертация посвящена исследованию условий корректности задач для параболических уравнений и разнокомпонентных систем уравнений с временным запаздыванием.

Найдены условия существования, единственности и непрерывной зависимости от исходных данных классических решений смешанных задач для полулинейных параболических уравнений и разнокомпонентних систем уравнений с локальным переменным запаздыванием, задач без начальных условий для полулинейных параболических уравнений и разнокомпонентных систем уравнений с локальным переменным запаздыванием.

Изучены вопросы существования и единственности обобщенных решений задачи для слабо нелинейных параболических уравнений с интегральным переменным запаздыванием. Установлены условия корректности смешанных задач и задачи Фурье для таких уравнений.

Установлены условия существования и единственности обобщенных решений смешанных задач и задачи Фурьє для параболических уравнений с переменными показателями нелинейности и интегральным запаздыванием.

Доказано корректность задачи Фурье для нелинейных эволюционных вариационных неравенств (субдифференциальных включений) в классах функций с определенным поведением на бесконечности.

Ключевые слова: смешаная задача, задача без начальных условий, задача Фурьє, временное запаздывание, параболическое уравнение, разнокомпонентная система, эволюционное уравнение, эволюционное вариационное неравенство, эволюционное субдифференциальное включение, сильно вырождающееся уравнение.

Abstract

Ilnytska O.V. Problems without initial conditions for evolution systems with dealy. – Manuscript.

The thesis is presented for the degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics (Doctor of Philosophy) in speciality 01.01.02 – Differential equations. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2017.

The thesis is dedicated to investigation of the well-posedness of problems for parabolic equations and coupled systems of equations with time-dependent delay.

The conditions of existence and uniqueness of classical solutions of initial-boundary problems for semilinear parabolic equations and coupled systems with local variable delay, of problems without initial conditions for semilinear parabolic equations and coupled systems with local variable delay are investigated.

The existence and uniqueness of weak solutions of problems for weakly nonlinear parabolic equations with time-dependent integral delay are studied. The conditions of well-posedness of initial-boundary problems and the problem without initial conditions for such equations are obtained.

The conditions of existence and uniqueness of weak solutions of initial-boundary problems for parabolic equations with variable exponents of nonlinearity and with time-dependent integral delay are obtained. The conditions of existence and uniqueness of weak solutions of the problem without initial conditions for parabolic equations with variable exponents of nonlinearity and time-dependent integral delay in unbounded on time domains in classes of functions with certain behavior on infinity are established. The well-posedness of the problem without initial conditions for strongly nonlinear evolutional variation inequalities (subdifferential inclusions) with time-dependent integral delay in unbounded on time domains is investigated in classes of functions with certain behavior on infinity is established.

Key words: initial-boundary problem, problem without initial condition, time delay, parabolic equation, coupled system, evolution equation, evolutional variation inequality, evolution subdifferential inclusion, strongly degenerated equation.