МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ІЛЬНИЦЬКА ОЛЬГА ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 517.95

ДИСЕРТАЦІЯ

ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

01.01.02 – диференціальні рівняння
01 – фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

О.В. Ільницька

Науковий керівник: Бокало Микола Михайлович,
доктор фіз.-мат. наук, професор

Львів 2017

Анотація

Ільницька О.В. Задачі без початкових умов для еволюційних систем із запізненням. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.02 "Диференціальні рівняння". – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2017.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, додатку та списку літератури. У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковою темою та особистий внесок здобувача, а також наведено дані про те, де доповідались, обговорювались та опубліковані основні результати дисертації.

Розділ 1 присвячений огляду літератури, що стосується теми дисертації. У підрозділі 1.1 розглянуто публікації, що стосуються задач для параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем із запізненням у класичному формулювання. У підрозділі 1.2 наведено результати, щодо задач для слабко нелінійних параболічних рівнянь із запізненням у варіаційному формулювання. Підрозділ 1.3 присвячений огляду результатів, що були раніше отримані для задач у випадку сильно нелінійних рівнянь із запізненням. У підрозділі 1.4 наведено результати, щодо розв'язків задач для еволюційних включень із запізненням.

У розділі 2 розглянуто задачі для параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь зі змінним локальним запізненням. На даний момент значною мірою вивчено задачі для параболічних рівнянь зі сталим запізненням. Класичні розв'язки задач для параболічних рівнянь із залежним від

часу локальним запізненням раніше не вивчались. У підрозділі 2.1 знайдено умови існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних класичних розв'язків мішаних задач для півлінійних параболічних рівнянь. У підрозділі 2.2 отримано умови існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних класичних розв'язків мішаних задач для різнокомпонентних систем рівнянь із запізненням. У підрозділі 2.3 встановлено умови існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних класичних розв'язків задач без початкових умов для півлінійних параболічних рівнянь, що сильно вироджуються у початковий момент часу. Підрозділ 2.4 присвячений дослідженню умов існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних класичних розв'язків задач без початкових умов для різнокомпонентних систем рівнянь із запізненням, що сильно вироджуються у початковий момент часу. У підрозділі 2.5 отримано умови існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних класичних розв'язків задачі Фур'є для півлінійних параболічних рівнянь із запізненням.

У розділі 3 вивчено питання існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі для слабко нелінійних параболічних рівнянь зі змінним запізненням. Розглянуто випадок залежного від часу інтегрального запізнення. Задачі, що розглянуті у розділі 3, досліджено вперше. У підрозділі 3.1 встановлено умови коректності мішаних задач для таких рівнянь. У підрозділі 3.2 доведено коректність задачі Фур'є для таких рівнянь у класах функцій з певною поведінкою на нескінченності.

У розділі 4 досліджено питання існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі для сильно нелінійних параболічних рівнянь зі змінним запізненням. Розглянуто випадок залежного від часу інтегрального запізнення. Задачі, розглянуті у розділі 4, досліджено вперше. У підрозділі 4.1 встановлено умови коректності мішаних задач для параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. У підрозділі 4.2 вивчено коректність задачі Фур'є для для параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності у класах функцій з певною поведінкою на нескінченності. У підрозділі 4.3 доведено коректність задачі Фур'є для нелінійних еволюційних включень у класах функцій з певною поведінкою на нескінченності.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації

мають теоретичне значення і можуть бути використані для розвитку теорії рівнянь з частинними похідними і застосовані при дослідженні задач фізики тепла, фільтрації, фізики плазми, процесах реконструкції зображень, теорії біологічних популяцій, реакції організму людини на вірус імунодифіциту, дифузії та інших.

Ключові слова: мішана задача, задача без початкових умов, задача Фур'є, часове запізнення, параболічне рівняння, різнокомпонентна система, еволюційне рівняння, еволюційна варіаційна нерівність, еволюційне субдиференціальне включення, сильно вироджуване рівняння.

Список публікацій здобувача

1. Бокало М. М., Ільницька О. В. Мішана задача для нелінійних параболічних рівнянь зі змінним запізненням // Буковинський математичний журнал. 2015. 3(1). С. 16-24.

2. Bokalo M. M., Ilnytska O. V. Initial-boundary value problems for coupled systems with variable time delay// International Journal of Evolution Equations. 2016. 10(1). C. 1-19.

3. Bokalo M., Ilnytska O. Unique solvability of initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations with time dependent delay // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2016. 81. С. 23—38.

4. Ilnytska O.V. Fourier problem for nonlinear parabolic equations with time-dependent delay // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2016. 82. С. 151—165.

5. Бокало М. М., Ільницька О. В. Крайова задача для нелінійних параболічних рівнянь із запізненням та виродженням у початковий момент// Український математичний журнал. 2016. 63(9). С. 1155-1168.

Bokalo M.M., Il'nyts'ka O.V. Boundary-value problems for nonlinear parabolic equations with delay and degeneration at the initial time // Ukrainian Mathematical Journal (2017) 68(9). P. 1323–1339. doi:10.1007/s11253-017-1298-6

6. Bokalo M. M., Ilnytska O. V. Problems for parabolic equations with variable exponents of nonlinearity and time delay // Applicable analysis. 2017. 96(7). P. 1240-1254 (опубліковано онлайн 24 травня 2016).

7. Ilnytska O. V., Bokalo M. M. Problem without initial conditions for coupled systems of evolution equations strongly degenerated at initial moment // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach: Abstracts of Reports, Lviv, Ukraine, 17—21 September 2012. — Lviv, 2012. — P. 197.

8. Ilnytska O. V. Boundary value problems for degenerate parabolic equations with variable delay // Міжнародна конференція молодих математиків. Тези доповідей, 3—6 червня 2015.— Київ, 2015.— С. 121.

9. Ilnytska O. V., Bokalo M. M. Initial-boundary value problems for parabolic delay equations with variable exponents of nonlinearity // International V. Skorobohatko mathematical conference, August 25—28, 2015, Drohobych, Ukraine. — P. 63.

10. Bokalo M. M., Ilnytska O. V. Initial-Boundary Value Problems for Coupled Systems of Parabolic Equations with Variable Delay// International Scientific Conference «Differential equations and their applications», May 19—21, 2016, Uzhhorod, Ukraine. — P. 17.

11. Ilnytska O. V. A mixed boundary value problem for parabolic equations with variable delay // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання — 2016», Львів, 25–27 травня 2016, — Львів, 2016. — Режим доступу до матеріалів: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Ilnytska.pdf.

12. Ilnytska O. V., Bokalo M. M. Boundary value problems for coupled systems of degenerate parabolic equations with variable delay// International Conference on Differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20—24, 2016, Lviv, Ukraine. — P. 70.

13. Ilnytska O. V., Bokalo M. M Initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations with time depended delay // International Scientific Conference "Differential-Functional Equations and their Application"dedicated to the 80th anniversary of Professor V. I. Fodchuk, September 28–30, 2016, Chernivtsi, Ukraine. – P. 118–119.

14. Ilnytska O. V. Problems without initial conditions for nonlinear parabolic equations with time delay // 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynskii: Book of abstracts, November 9—11, 2016, Kyiv, Ukraine. — Kyiv, 2016. — P. 73–75.

Abstract

Ilnytska O. V. Problems without initial conditions for evolution systems with dealy. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis is presented for the degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics (Doctor of Philosophy) in speciality 01.01.02 "Differential equations". – The Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2017.

The thesis consists of an introduction, five chapters, conclusions, appendix and the references. The introduction consists of the relevance of research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods, The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

Chapter 1 provides an literature review concerning on the topic of the thesis. In Section 1.1 we consider the results related to the classical solutions of problems for parabolic equations and coupled systems with delay. In Section 1.2 we consider the results related to the weak solutions of problems for weakly nonlinear parabolic equations with delay. Section 1.3 contains an overview of the results that were previously obtained for problems for strongly nonlinear equations with delay. In Section 1.4 we consider the results related to the solutions of evolution inclusions with delay.

In Chapter 2 problems for parabolic equations and coupled systems with variable local delay are considered. Nowadays problems for parabolic equations with constant delay are quite good investigated but problems for parabolic equations with variable delay are barely studied. Classical solutions for semilinear parabolic equations with time-depended delay haven't been studied before. In Section 2.1 the conditions of existence and uniqueness of classical solutions of initial-boundary

problems for semilinear parabolic equations are investigated. In Section 2.2 the conditions of existence and uniqueness of classical solutions of initial-boundary problems for couples systems are obtained. In Section 2.3 the conditions of existence and uniqueness of classical solutions of problems without initial conditions for semilinear parabolic equations strongly degenerated at the initial time are investigated. In Section 2.4 the conditions of existence and uniqueness of classical solutions of problems without initial conditions for coupled systems of equations strongly degenerated at the initial time are obtained. In Section 2.5 the conditions of existence and uniqueness of classical solutions of problems without initial conditions for semilinear parabolic equations in unbounded on time domains are investigated.

In Chapter 3 we studied the existence and uniqueness of weak solutions of problems for weakly nonlinear parabolic equations with variable delay. The time-dependent integral delay is considered. In Section 3.1 the conditions of well-posedness of initial-boundary problems for such equations are obtained. In Section 3.2 the well-posedness of the problem without initial conditions for such equations in unbounded on time domains in classes of functions with certain behavior on infinity are established. The problems, studied in Chapter 3, haven't been investigated before.

In Chapter 4 we studied the existence and uniqueness of weak solutions of problems for strongly nonlinear parabolic equations with variable delay. In Section 4.1 the conditions of well-posedness of initial-boundary problems for parabolic equations with variable exponents of nonlinearity are obtained. In Section 4.2 the well-posedness of the problem without initial conditions for parabolic equations with variable exponents of nonlinearity in unbounded on time domains in classes of functions with certain behavior on infinity are established. In Section 4.3 the well-posedness of the problem without initial conditions for strongly nonlinear evolutional inclusions in unbounded on time domains is investigated in classes of functions with certain behavior on infinity are established. The problems, studied in Chapter 4, haven't been investigated before.

The practical significance of the results. The results of the thesis have theoretical significance and can be used for the development of the theory of partial differential equations and applied in problems of filtration, plasma physics, image

reconstruction process, the theory of biological populations, the human body's response to the HIV, diffusion and others.

Key words: initial-boundary problem, problem without initial condition, time delay, parabolic equation, coupled system, evolution equation, evolutional variation inequality, evolution subdifferential inclusion, strongly degenerated equation.

Publications list of the applicant.

1. Bokalo M. M., Ilnytska O. V. Initial boundary value problem for nonlinear parabolic equations with variable delay // Bukovinian Mathematical Journal. 2015. 3(1). P. 16–24.

2. Bokalo M. M., Ilnytska O. V. Initial-boundary value problems for coupled systems with variable time delay // International Journal of Evolution Equations. 2016. 10(1). P. 1–19.

3. Bokalo M., Ilnytska O. Unique solvability of initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations with time dependent delay // Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. 2016. 81. P. 23—-38.

4. Ilnytska O.V. Fourier problem for nonlinear parabolic equations with time-dependent delay // Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. 2016. 82. P. 151—-165.

5. Bokalo M. M., Ilnytska O. V. Boundary-value problem for nonlinear degenerated parabolic equations with variable delay // Ukr. Mat. Zh. 2016. 63(9). P. 1155–1168.

Bokalo M.M., Il'nyts'ka O.V. Boundary-value problems for nonlinear parabolic equations with delay and degeneration at the initial time // Ukrainian Mathematical Journal (2017) 68(9). P. 1323–1339. doi:10.1007/s11253-017-1298-6

6. Bokalo M. M., Ilnytska O. V. Problems for parabolic equations with variable exponents of nonlinearity and time delay // Applicable analysis. 2017. 96(7). P. 1240-1254 (published online 24 May 2016).

7. Ilnytska O. V., Bokalo M. M. Problem without initial conditions for coupled systems of evolution equations strongly degenerated at initial moment // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach: Abstracts of Reports, Lviv, Ukraine, 17—21 September 2012. — Lviv, 2012. P. 197.

8. Ilnytska O. V. Boundary value problems for degenerate parabolic equations with variable delay // International conference of young mathematicians. Abstracts, 3—6 June 2015.— Kyiv, 2015. P. 121.

9. Ilnytska O. V., Bokalo M. M. Initial-boundary value problems for parabolic delay equations with variable exponents of nonlinearity // International V. Skorobohatko mathematical conference, August 25—28, 2015, Drohobych, Ukraine. — P. 63.

10. Bokalo M. M., Ilnytska O. V. Initial-Boundary Value Problems for Coupled Systems of Parabolic Equations with Variable Delay// International Scientific Conference «Differential equations and their applications», May 19—21, 2016, Uzhhorod, Ukraine. — P. 17.

11. Ilnytska O. V. A mixed boundary value problem for parabolic equations with variable delay // Conference of young scientists «Pidstryhach readings — 2016», Lviv, 25–27 May 2016, — Lviv, 2016. — Режим доступу до матеріалів: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Ilnytska.pdf.

12. Ilnytska O. V., Bokalo M. M. Boundary value problems for coupled systems of degenerate parabolic equations with variable delay// International Conference on Differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20—24, 2016, Lviv, Ukraine. — P. 70.

13. Ilnytska O. V., Bokalo M. M Initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations with time depended delay // International Scientific Conference "Differential-Functional Equations and their Application"dedicated to the 80th anniversary of Professor V. I. Fodchuk, September 28–30, 2016, Chernivtsi, Ukraine. P. 118–119.

14. Ilnytska O. V. Problems without initial conditions for nonlinear parabolic equations with time delay // 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynskii: Book of abstracts, November 9—11, 2016, Kyiv, Ukraine. — Kyiv, 2016. — P. 73–75.

Зміст

Перелік умовних позначень

n	–	довільне фіксоване натуральне число;
$\mathbb{R}^n$	–	лінійний простір впорядкованих наборів$x = (x_1, ..., x_n)$ дійсних чисел з нормою $\lvert x\rvert := (\lvert x_1\rvert^2 + \ldots + \lvert x_n\rvert^2)^{1/2}$;
Ω	–	обмежена область в $\mathbb{R}^n$;
$\partial\Omega$	–	межа Ω, яка вважається кусково-гладкою поверхнею;
Γ_0, Γ_1	–	частини $\partial\Omega$ такі, що $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \Gamma_0$ – замикання відкритої множини $\partial\Omega$ (зокрема, або $\Gamma_0 = \emptyset$ або$\Gamma_0 = \partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$;
$\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$	–	одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$;
$T > 0$	–	довільне фіксоване число;
$C(\Omega)$	–	простір функцій, неперервних на множині Ω;
$C^\alpha(\Omega)$	–	простір Гельдера (див. ст. 26);
$H^1(\Omega)$	–	простір Соболєва (див. ст. 66);
$C_c^\infty(\Omega)$	–	простір неперервно диференційовних на Ω функцій з компактним носієм;
$H_0^1(\Omega)$	–	замикання простору $C_c^\infty(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$;
$L_{p(\cdot)}(\Omega)$	–	узагальнений простір Лебега (див. ст. 97);
$W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$	–	узагальнений простір Соболєва (див. ст. **??**).

Вступ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню задач без початкових умов для параболічних рівнянь, різнокомпонентних систем та еволюційних включень зі змінним запізненням.

Задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними із запізненням є надзвичайно плідним полем для досліджень та джерелом для багатьох складних математичних проблем та цікавих застосувань. Популярність такого роду досліджень пов'язана з їх активним використанням при вирішенні задач теплопровідності, фільтрації, дифузії, фізики плазми, реконструкції зображень, теорії біологічних популяцій, реакції організму людини на вірус імунодефіциту та інших.

Параболічні рівняння з частинними похідними та різнокомпонентні системи рівнянь із запізненням за наявності початкових умов активно досліджувались багатьма математиками, серед яких П. П. Бабак, Я. Й. Бігун, М. М. Бокало, Я. М. Дрінь, В. М. Дмитрів, Л. Э. Эльсгольц, А. Д. Мишкіс, С. Б. Норкін, С. В. Пао (C. V. Pao), А. М. Самойленко, В. Ю. Слюсарчук, І. М. Черевко, І. Д. Чуєшов, Д. Я. Хусаїнов, А. Баткай (A. Bátkai), А. Бельмілоуді (A. Belmiloudi), Ж. Ді Бласіо (G. Di Blasio), Ч. Джінь (Ch. Jin), Дж. Їнь (J. Yin), Р. Лестер (R. Laister), А. Марціняк-Жохра (A. Marciniak-Czochra). Задачі для еволюційних включень (варіаційних нерівностей) із запізненням вивчали Х. Х. Ро (H. H. Rho), Дж. М. Джеонг (J. M. Jeong), І. І. Врабіє (I. I. Vrabie), Р. Н. Ванг (R. N. Wang), К. М. Хіанг (Q. M. Xiang), П. Х. Цу (P. X. Zhu) та інші.

Вагомий вклад в дослідження задач без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей без запізнення зробили Т. М. Балабушенко, М. М. Бокало, Л. Ф. Бойко, О. М. Бугрій, Ю. Б. Дмитришин, С. Д. Ейдельман, С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, С. П. Лавренюк, М. Д. Мартинен-

ко, М. І. Матійчук, Є. І. Моісєєв О. А. Олійник, О. А. Панков, Н. П. Процах, П. Я. Пукач та інші.

Задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь зі сталим запізненням досліджували М. М. Бокало та В. М. Дмитрів.

На даний час достатньо повно досліджені мішані задачі для параболічних рівнянь та систем зі сталим запізненням. Мішані задачі для параболічних рівнянь зі змінним запізненням досліджувались лише у роботах І. Д. Чуєшова та О. В. Резуненка, проте у цих роботах запізнення залежить від стану системи. Задачі для еволюційних рівнянь та систем із залежним від часу запізненням раніше не досліджувались. Дисертаційна робота присвячена дослідженню такого роду задач.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертації отримано в рамках виконання наукової теми кафедри диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка "Дослідження нелінійних задач для диференціальних операторів", номер держреєстрації 0114U004540.

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є відшукання умов існування та єдиності класичних та узагальнених розв'язків задач без початкових умов для параболічних рівнянь, різнокомпонентних систем та еволюційних включень зі змінним запізненням.

Завданнями дисертаційного дослідження є:

– встановити умови існування та єдиності класичних розв'язків задач без початкових умов для півлінійних параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь зі змінним запізненням, що сильно вироджуються у початковий момент часу;

– дослідити умови існування та єдиності класичних розв'язків задачі Фур'є для півлінійних параболічних рівнянь зі змінним запізненням;

– відшукати умови існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі Фур'є для слабко і сильно нелінійних параболічних рівнянь;

– вивчити коректність задач без початкових умов для сильно нелінійних еволюційних включень.

Об'єктом дослідження є задачі без початкових умов для параболічних рівнянь, різнокомпонентних систем та еволюційних включень зі змінним за-

пізненням.

Предметом досліджень є умови існування та єдиності розв'язків задач без початкових умов для півлінійних, слабко і сильно нелінійних параболічних рівнянь, різнокомпонентних систем рівнянь та нелінійних еволюційних включень зі змінним запізненням.

Методи досліджень. У роботі використовуються методи та ідеї теорії рівнянь з частинними похідними і функціонального аналізу, зокрема, методи послідовних наближень, монотонності і Гальоркіна, принцип стискуючих відображень та інші.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі вперше:

- знайдено умови існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних класичних розв'язків мішаної задачі і крайових задач без початкових умов для півлінійних параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем зі змінним локальним запізненням;
- доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків мішаних задач та задачі Фур'є для слабко та сильно нелінійних параболічних рівнянь зі змінним нелокальним запізненням;
- встановлено умови існування та єдиності розв'язків задачі без початкових умов для еволюційних субдиференціальних включень зі змінним нелокальним запізненням.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення і можуть бути використані для розвитку теорії рівнянь з частинними похідними із запізненням та застосовані при дослідженні задач теплопровідності, дифузії, фільтрації, фізики плазми, реконструкції зображень, теорії біологічних популяцій, реакції організму людини на вірус імунодифіциту, тощо.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації отримані автором самостійно. У працях написаних у співавторстві з науковим керівником, М. М. Бокалу належать постановка задач, вибір методів досліджень та аналіз одержаних результатів.

Апробація результатів роботи. Результати досліджень доповідались та обговорювались на Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: член-кор. НАН України, проф. Пташник Б. Й., проф. Іванчов М. І., проф. Каленюк П. І.), а також на конференціях: International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (Львів, 2012); International Conference of Young Mathematicians (Київ, 2015); International V. Skorobohatko mathematical conference (Дрогобич, 2015); Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 2016); Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2016" (Львів, 2016); International Conference on Differential Equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Львів, 2016); International Scientific Conference "Differential-Functional Equations and their Application" dedicated to the 80th anniversary of Professor V. I. Fodchuk (Чернівці, 2016); 5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky (Київ, 2016).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 6-ти наукових працях у фахових періодичних виданнях з переліку, затвердженого МОН України, з яких 4 – в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз, та додатково висвітлено в 8-ми тезах наукових математичних конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури, а також додатку. Список літератури налічує 105 найменувань і викладений на 10 сторінках. Загальний обсяг роботи – 185 с.

Розділ 1

Огляд літератури та опис результатів дисертації

У даному розділі наведено огляд літератури за тематикою дисертації та опис результатів, отриманих в дисертаційній роботі.

1.1 Класичні розв'язки задач для параболічних рівнянь та систем із запізненням

1.1.1 Класичні розв'язки задач для параболічних рівнянь із запізненням

Наявність запізнення в диференціальних рівняннях, що описують певні динамічні процеси, є врахуванням того, що стан еволюційної системи в актуальний момент часу залежить від станів в попередні моменти часу. Рівняння із запізненням використовують, зокрема, для моделювання харчових ланцюгів та реакції імунної системи людського організму на вірус імунодефіциту ([50], [54], [59]). В останні роки інтенсивно розвивається математичний апарат для дослідження рівнянь та систем із запізненням (див., наприклад, [4], [5], [13], [18], [22], [46], [53], [69], [88], [85], [86], [87]). На даний час досить повно розроблено теорію диференціальних рівнянь зі сталим запізненням. Сталість запізнення, як правило, є додатковим припущенням для спрощення дослідження, що не мотивовано реальними процесами. Більш природними є рівняння зі змінним запізненням. Звичайні диференціальні рівняння зі змінним запізненням досліджуються досить активно ([9], [11], [59]), але рівняння з частинними похідними зі змінним запізненням не є достатньо вивченими ([5]). Мішана задача для таких рівнянь досліджена у п.2.1.

Нелінійні вироджувані диференціальні рівняння використовують при моделюванні різних процесів, зокрема, опріснення морської води, руху рідин та газів у пористих середовищах. Такі рівняння виникають і в теоріях еластичності, відносності та оптимізації ([47]). Параболічні рівняння із виродженням та задачі для них досліджувались у багатьох роботах, серед яких [1], [7], [12], [45], [47], [66].

Наскільки нам відомо, задачі для параболічних вироджуваних (за рахунок коефіцієнтів) рівнянь із запізненням раніше не досліджувались. Такі задачі розглянуті у п.2.3.

Задача Фур'є для еволюційних рівнянь виникає при моделюванні нестаціонарних процесів у природі, що почались дуже давно і початкові умови не впливають на стан системи у даний момент. У цьому випадку можна вважати, що початковим моментом є $-\infty$, а 0 – кінцевим моментом часу, а замість стандартної початкової умови ставити умову на поведінку розв'язку при прямуванні часової змінної до $-\infty$. Задачі Фур'є для еволюційних рівнянь виникають при моделюванні різних процесів у у економіці, фізиці, екології, кібернетиці, тощо, і досить добре досліджені (див, наприклад, [53], [32], [31], [29], [39], [40], [41], [72], [79], [97], [95], [96]).

Задачі Фур'є для параболічних рівнянь із запізненням досліджені у роботах [53], [4] але лише у випадку, коли запізнення є сталим. Задача Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь зі змінним запізненням раніше не розглядалась. Така задача досліджена у п.2.5.

1.1.2 Класичні розв'язки задач для різнокомпонентних систем рівнянь із запізненням

Серед математичних моделей процесів, до прикладу, росту бактерій та клітин, росту пухлин та розвитку тканин, певні процеси описуються різнокомпонентними системами. Під різнокомпонентною системою ми розуміємо систему, що складається з рівнянь різних типів, а саме, систем параболічних та звичайних диференціальних рівнянь (див., [21], [34], [38], [53], [62], [74], [104] та їхні посилання). Значний внесок у дослідження таких систем зробив C.V. Pao (див, [88], [82], [83] та інші). Зокрема, у роботі [88] використовуючи метод верхнього-нижнього розв'язку та відповідних монотонних ітерацій

досліджено різнокомпонентну систему зі сталим запізненням. Цей метод дозволяє отримати теореми існування-порівняння. Схожі результати отримані у роботах [4], [53] та інших. Варто зауважити, що багато результатів для параболічних рівнянь зі сталим запізненням отримані за допомогою теорії півгруп. Задачі для різнокомпонентних систем зі змінним запізненням раніше не досліджувались. Мішана задача та задача без початкових умов для таких систем розглянуті у п.2.2 та п.2.4 відповідно.

1.2 Узагальнені розв'язки задач для слабко нелінійних параболічних рівнянь із запізненням

У розділі 3 розглядаються мішані задачі для нелінійних параболічних рівнянь з запізненням. Прикладом рівнянь, що там вивчаються, є рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \Big(\widehat{a}_i(x,t) u_{x_i} \Big)_{x_i} + \widehat{a}_0(x,t) u + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c_0(x,t,s) u(x,s) ds = f(x,t), \qquad (1.1)$$

$(x,t) \in Q := \Omega \times (0,T)$ або $(x,t) \in Q := \Omega \times (-\infty, 0)$, де $n \in \mathbb{N}$, Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $\widehat{a}_0, \ldots, \widehat{a}_n$ – вимірні на Q функції, τ – невід'ємна неперервна функція, c_0 – вимірна обмежена функція, f – інтегровна функція, u – шуканий розв'язок.

Рівняння з часовим запізненням виникають при моделюванні динаміки популяції, неньютонівської фільтрації, теплового потоку і т.п. ([65]). Рівняння типу (1.1) зі сталим запізненням були дослідженні в [24], [23], [70], [57], [51] та інших. Огляд цих праць можна знайти в [70]. Зауважимо, що в цих роботах використовується теорія півгруп.

Рівняння з частинними похідними зі змінним запізненням вивчалися мало, нам відомі тільки праці О.В. Резуненка та І.Д. Чуєшова (зокрема, [49], [90]), де розглянуті рівняння вигляду (1.1) при $\tau = \tau(u)$. В [49] розглянуто абстрактне параболічне рівняння із запізненням залежним від стану системи. У [90] розглянено нелінійне функційно-диференціальне рівняння у частинних похідних з головним лінійним елептичним оператором та нелокальним нелінійним доданком із запізненням. Для доведення існування та єдиності

розв'язку задачі у роботах [49] та [90] використано метод апромаксизації Гальоркіна.

Наскільки нам відомо, задачі для слабко нелінійних параболічних рівнянь із часовим запізненням раніше не досліджувалась. Такі задачі розглядаються у розділі 3. Доведено існування та єдиність розв'язку.

1.3 Узагальнені розв'язки задач для сильно нелінійних параболічних рівнянь із запізненням

У розділі 4 розглянуто задачі для нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності та запізненням залежним від часу. Типовим прикладом рівняння, що розглядається є

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \Big(\widehat{a}_i(x,t) |u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i} \Big)_{x_i} + \widehat{a}_0(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \widehat{c}(x,t,s)u(x,s)ds = f(x,t), \tag{1.2}$$

$(x,t) \in Q := \Omega \times (0,T)$ або $(x,t) \in Q := \Omega \times (-\infty, 0)$ де $n \in \mathbb{N}$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $\widehat{a}_0, \ldots, \widehat{a}_n$ – вимірні додатні функції на Q, p_0, ..., p_n (показники нелінійності) – вимірні обмежені функції такі, що $p_0(x) > 1$, ..., $p_n(x) > 1$ м.в. $x \in \Omega$, τ – невід'ємна неперервна функція, $\widehat{c}$ – вимірна обмежена функція, f – вимірна інтегровна функція, u – невідома функція.

Рівняння (1.2), з $\widehat{c} = 0$, є прикладом нелінійного параболічного рівняння зі змінними показниками нелінійності. Такі рівняння описують багато фізичних процесів таких, як електромагнітні поля, електролеогічні рідини, процес реконструкції зображень, потік в полі змінної температури (див. [76], [93]). Для досліджень цих рівнянь використовують узагальнені простори Лебега та Соболєва. Згадані простори були вперше введені Орлічем у [80]. Властивості цих просторів досліджені також у [80], [58], [68], [78], [52]. Задачі для нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності активно досліджуються (див. до прикладу, [76], [15], [16], [32], [33], [61], [77], [17] та посилання в них).

Наскільки нам відомо, мішані задачі для параболічних рівнянь зі змінними

показниками нелінійності та запізненням залежним від часу ще не досліджувались.

1.4 Розв'язки задач для еволюційних включень із запізненням

У підрозділі 4.3 розглянуто задачу без початкових умов для еволюційних включень зі змінним часовим запізненням. Модельним прикладом досліджуваних задач є така задача.

Нехай $p > 2$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Позначимо $Q := \Omega \times (-\infty, 0]$, $\Sigma := \partial\Omega \times (-\infty, 0]$, $\Omega_t := \Omega \times \{t\}$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Під $L^q(F)$, де $q \in [1, \infty)$, F – вимірна множина в $\mathbb{R}^k$ ($k = n$ або $k = n+1$), розуміємо стандартний простір Лебега, а під $W^{1,q}(\Omega) := \{v \in L^q(\Omega) \mid v_{x_i} \in L^q(\Omega)\ (i = \overline{1,n})\}$ – стандартний простір Соболєва з нормою $||v||_{W^{1,q}(\Omega)} := \Big(\int\limits_{\Omega} [|\nabla v|^q + |v|^q]\Big)^{1/q}$.

Нехай K – опукла замкнена множина в $W^{1,p}(\Omega)$, що містить 0. Розглянемо задачу на знаходження функції u з простору $L^p(Q)$ такої, що $u_{x_i} \in L^p(Q)$ $(i = \overline{1,n})$, $u_t \in L^2(Q)$ і для майже всіх $t \in (-\infty, 0]$: $u(\cdot, t) \in K$ і

$$\int\limits_{\Omega_t} \{u_t(v-u) + |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(v-u) + |u|^{p-2}u(v-u) +$$

$$+ (v-u)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} u(x,s)\,ds\}\,dx \geq \int\limits_{\Omega_t} f(v-u)\,dx \quad \forall\, v \in K, \tag{1.3}$$

де $f \in L^2(Q)$, $\tau \in C((-\infty, 0])$, $\tau(t) \geq 0$ $\forall t \in (-\infty, 0]$, $\sup\limits_{t \in (-\infty, 0]} \tau(t) < \infty$, $\nabla u := (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$.

Як показано далі, ця задача має розв'язок.

Відмітимо, що вказану задачу називають варіаційною нерівністю. Її можна записати в більш абстрактній, але зручнішій для дослідження, формі. Для цього проведемо ототожнення функцій і функціоналів так, щоб у результаті отримати неперервні та щільні вкладення

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (W^{1,p}(\Omega))',$$

де $(W^{1,p}(\Omega))'$ – спряжений до $W^{1,p}(\Omega)$ простір. Легко бачити, що для будь-яких $h \in L^2(\Omega)$ і $v \in W^{1,p}(\Omega)$ маємо $\langle h, v\rangle = (h, v)$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – позначення дії елемента з $(W^{1,p}(\Omega))'$ на елемент з $W^{1,p}(\Omega)$, а $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $L^2(\Omega)$. Отже, можемо використовувати позначення $(\cdot,\cdot)$ замість $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Введемо позначення $S := (-\infty, 0]$, $V := W^{1,p}(\Omega)$, $H := L^2(\Omega)$ і визначимо оператор $A : V \to V'$ за правилом

$$(A(v), w) = \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla w + |v|^{p-2} v w\right] dx, \quad v, w \in V.$$

Тоді сформульована вище задача полягає у знаходженні функції $u \in L^p(S; V)$ такої, що $u' \in L^2(S; H)$ та для майже всіх $t \in S$: $u(t) \in K$ і

$$(u'(t) + A(u(t)) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} u(s)\, ds, v - u(t)) \geq$$

$$\geq (f(t), v - u(t)) \quad \forall\, v \in K, \tag{1.4}$$

де $f \in L^2(S; H)$, $\tau \in C(S)$, $\tau(t) \geq 0$ $\forall t \in S$, $\sup\limits_{t\in S} \tau(t) < \infty$.

Зауважимо, що варіаційну нерівність (1.4) можна записати у вигляді субдиференціального включення. Для цього покладемо $I_K(v) := 0$, якщо $v \in K$, і $I_K(v) := +\infty$, якщо $v \in V \setminus K$, а також визначимо

$$\Phi(v) := \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^p\, dx + I_K(v), \quad v \in V.$$

Легко переконатись, що функціонал $\Phi : V \to \mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ є опуклим і напівнеперервним знизу. Тоді з відомих результатів (див., наприклад, [96, с. 83]) випливає, що задачу на знаходження розв'язків варіаційної нерівності (1.4) можна записати у вигляді задачі для субдиференціального включення: знайти функцію $u \in L^p(S; V)$ таку, що $u' \in L^2(S; H)$ і для майже всіх $t \in S$:

$$u'(t) + \partial\Phi(u(t)) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} u(s)\, ds \ni f(t) \quad \text{в} \quad H. \tag{1.5}$$

Саме задачам для включень типу (1.5) і присвячений підрозділ 4.3. Принагідно відзначимо, що у відомих монографіях ([96]) та багатьох статтях, що

стосуються згаданої тематики, субдиференціальні включення часто називають варіаційними нерівностями. У нашій роботі будемо дотримуватися цієї традиції.

Задачі для еволюційних варіаційних нерівностей у випадку сталого запізнення досліджені у [91], [100], [102] та інших. Більшість з відомих нам результатів одержано з використанням теорії півгруп. Досить повний огляд літератури, де використано цей підхід, можна знайти у [100]. У працях [91], [102] використано принцип нерухомої точки.

Підрозділ 4.3 присвячений задачам без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей зі змінним запізненням. Частковим випадком задачі без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей є задача без початкових умов або, іншими словами, задача Фур'є для еволюційних рівнянь. Дослідження задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей (без запізнення) проводились у працях [30], [39], [29], [6], [64], [71], [72], [79], [81], [89], [98] та ін. Зокрема, Р. Е. Шовальтер у роботі [95] довів існування єдиного розв'язку $u \in \mathrm{e}^{2\omega\cdot}W^{1,2}(-\infty,0;H)$ задачі без початкових умов

$$u'(t)+\mu u(t)+A\big(u(t)\big)\ni f(t),\quad t\in(-\infty,0],$$

де H — гільбертів простір, ω,μ – сталі такі, що $\omega+\mu>0$, $f\in \mathrm{e}^{2\omega\cdot}W^{1,2}(-\infty,0;H)$, $A:H\to 2^H$ – максимальний монотонний оператор такий, що $0\in A(0)$. Крім того, якщо $A=\partial\varphi$, де $\varphi:H\to(-\infty,+\infty]$ – власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал такий, що $\varphi(0)=0=\inf\{\varphi(v)\mid v\in H\}$, то ця задача є однозначно розв'язною і для $\mu>0$, $f\in L^2(-\infty,0;H)$ та $\omega=0$.

Відзначимо, що єдиність розв'язків задачі Фур'є для лінійних параболічних рівнянь та варіаційних нерівностей можлива лише при певних обмеженнях на поведінку розв'язків при $t\to-\infty$. Вперше це у випадку рівняння теплопровідності строго обґрунтував А. М. Тіхонов [99]. Натомість, як показав М. М. Бокало [29], задача без початкових умов для деяких нелінійних параболічних рівнянь має єдиний розв'язок в класах функцій з довільною поведінкою при $t\to-\infty$. Аналогічні результати отримано і для еволюційних варіаційних нерівностей в [30].

Задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь зі сталим запізненням досліджені, зокрема, у [4], [53], а зі змінним запізненням – лише у роботі О. В. Ільницької [63]. Проте, наскільки нам відомо, задачі без початкових умов для варіаційних нерівностей із запізненням раніше зовсім не розглядалися, що і слугує основною мотивацією для дослідження таких задач.

Розділ 2

Класичні розв'язки задач для параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем з локальним змінним запізненням

У цьому розділі досліджено коректність мішаних задач та задач без початкових умов для півлінійних параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь з локальним змінним запізненням в класичній постановці. Також отримано апріорні оцінки розв'язків цих задач.

Основні результати розділу опубліковано в працях [5], [36], [38].

2.1 Мішана задача для параболічних рівнянь із локальним змінним запізненням

2.1.1 Основні позначення та допоміжні факти

Введемо деякі позначення і поняття, які будемо використовувати. Під $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 1)$ розумітимемо лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $z = (z_1, \ldots, z_k)$ дійсних чисел, з нормою $|z| = (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}$. Через $C(H)$, де H – множина в $\mathbb{R}^k$, позначатимемо лінійний простір неперервних на H функцій. Якщо H – компакт в $\mathbb{R}^k$, то на $C(H)$ задаємо норму $\|v\|_{C(H)} := \max\limits_{z \in H} |v(z)|$, з якою цей простір є банаховим. Коли H – довільна некомпактна множина в $\mathbb{R}^k$, то послідовність $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до v в $C(H)$, якщо $||v_m - v||_{C(K)} \underset{m \to \infty}{\to} 0$ для будь-якого компакту $K \subset H$.

Через $\mathrm{Lip}(H)$, де H – множина в $\mathbb{R}^k$, позначаємо лінійний простір дійсних функцій, визначених на H, які задовольняють умову Ліпшіца на H, а через

$\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(H)$, якщо H – не компактна множина в $\mathbb{R}^k$, – лінійний простір функцій вимірних на H, які задовольняють умову Ліпшіца на будь-якому компакті в H.

Нехай $\alpha \in (0,1]$, K – компакт в $\mathbb{R}^{n+1} := \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^n,\, t \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Під $C^{\alpha,\alpha/2}(K)$ розумітимемо банахів простір, що є підпростором $C(K)$ і складається з функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in K$, зі скінченою нормою

$$\|v\|^K_{\alpha,\alpha/2} := \|v\|_{C(K)} + \sup_{\substack{(x,t),(x',t)\in K\\ x\neq x'}} \frac{|v(x,t)-v(x',t)|}{|x-x'|^\alpha} + \sup_{\substack{(x,t),(x,t')\in K\\ t\neq t'}} \frac{|v(x,t)-v(x,t')|}{|t-t'|^{\alpha/2}}$$

(див., наприклад, [10, ст. 16, 17]).

Через $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(G)$, де G – довільна некомпактна множина в $\mathbb{R}^{n+1}$, позначатимемо простір функцій v таких, що $v \in C^{\alpha,\alpha/2}(K)$ для довільного компакту $K \subset G$. Під $C^{2,1}(D)$ $\big($відповідно, $C^{2,1}(\overline{D})\big)$, де D – область в $\mathbb{R}^{n+1}$, розумітимемо лінійний простір функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in D$ (відповідно, $(x,t) \in \overline{D}$), які разом зі своїми похідними $v_{x_k}, v_{x_kx_l}$ $(k,l = \overline{1,n})$, v_t визначені і неперервні на D (відповідно, на $\overline{D}$). Якщо D – обмежена область, то вважаємо, що на просторі $C^{2,1}(\overline{D})$ задано норму $||v||_{C^{2,1}(\overline{D})} := ||v||_{C(\overline{D})} + \sum\limits_{k=1}^n ||v_{x_k}||_{C(\overline{D})} + \sum\limits_{k,l=1}^n ||v_{x_kx_l}||_{C(\overline{D})} + ||v_t||_{C(\overline{D})}$, з якою він є банаховим. Через $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$, якщо D – обмежена область в $\mathbb{R}^{n+1}$, позначатимемо банахів простір функцій v з простору $C^{2,1}(\overline{D})$ зі скінченою нормою

$$||v||^{\overline{D}}_{2+\alpha,1+\alpha/2} = \|v\|_{C(\overline{D})} + \sum_{k=1}^n \|v_{x_k}\|^{\overline{D}}_{\alpha,\alpha/2} + \sum_{k,l=1}^n \|v_{x_kx_l}\|^{\overline{D}}_{\alpha,\alpha/2} + \|v_t\|^{\overline{D}}_{\alpha,\alpha/2}.$$

Під $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(G)$, де G – область в $\mathbb{R}^{n+1}$ або об'єднання області з частиною своєї межі, розумітимемо простір функцій v таких, що $v \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ для довільної обмеженої області D такої, що $\overline{D} \subset G$.

Твердження 2.1. *Нехай послідовність функцій $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ є обмеженою в $C^{\alpha,\alpha/2}(K)$, де K – компакт в $\mathbb{R}^{n+1}$, тобто*

$$||u_m||^K_{\alpha,\alpha/2} \le C_1, \qquad m \in \mathbb{N},$$

де $C_1 > 0$ – стала, що не залежить від m. Тоді існують підпослідовність $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ послідовності $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ та функція $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(K)$ такі, що $u_{m_j} \underset{j\to\infty}{\to} u$ в $C(K)$.

Доведення. Дане твердження випливає з теореми Арцела-Асколі. ∎

Твердження 2.2. *Нехай G – некомпактна множина в $\mathbb{R}^{n+1}$ і $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$, де $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ – сім'я компактів, причому $K_i \subset K_{i+1}$ для кожного $i \in \mathbb{N}$. Припустимо, що $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ – послідовність функцій з $C_{loc}^{\alpha,\alpha/2}(G)$ така, що для будь-якого $i \in \mathbb{N}$ послідовність звужень членів даної послідовності на K_i є обмеженою в $C^{\alpha,\alpha/2}(K_i)$, тобто*

$$||u_m||_{\alpha,\alpha/2}^{K_i} \leq C_2, \qquad m \in \mathbb{N},$$

де $C_2 > 0$ – стала, яка не залежить від m, але може залежати від i. Тоді існують підпослідовність $\{u_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ та функція $u \in C_{loc}^{\alpha,\alpha/2}(G)$ такі, що

$$u_{m_j} \underset{j\to\infty}{\to} u \quad \text{в } C(G). \tag{2.1}$$

Доведення. Для доведення даного твердження використаємо діагональний процес. Згідно з твердженням 2.1 з послідовності $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність, звуження членів якої на K_1 збіжні в $C(K_1)$ до функції $u^1 \in C^{\alpha,\alpha/2}(K_1)$. З цієї підпослідовності вибираємо підпослідовність, звуження членів якої на K_2 збіжні в $C(K_2)$ до функції $u^2 \in C^{\alpha,\alpha/2}(K_2)$. Очевидно, що $u^2 = u^1$ на K_1. Продовжуючи цей процес далі, отримаємо послідовність підпослідовностей послідовності $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, кожна з яких, починаючи з другої, є підпослідовністю попередньої і рівномірно збігається на відповідному компакті із сім'ї $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$; також отримаємо сім'ю функцій $\{u^i \in C^{\alpha,\alpha/2}(K_i) \,\big|\, i \in \mathbb{N}\}$, які є границями відповідних підпослідовностей. Відмітимо, що $u^{i+1} = u^i$ на K_i для кожного $i \in \mathbb{N}$. Складемо з отриманих підпослідовностей нескінченну матрицю так, що у i-му рядку буде знаходитись підпослідовність, збіжна до u^i в $C(K_i)$. Очевидно, що елементи головної діагоналі цієї матриці утворюють послідовність $\{u_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$, збіжну до u^i в $C(K_i)$ для кожного $i \in \mathbb{N}$. Будуємо функцію $u \in C_{\text{loc}}^{\alpha,\alpha/2}(G)$ за правилом: для кожного $x \in G$ беремо $i \in \mathbb{N}$ таке, що $x \in K_i$, і визначаємо $u(x) := u^i(x)$. Легко переконатись, що для функції u виконується (2.1). ∎

2.1.2 Формулювання задачі та основних результатів підрозділу

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega$, $T > 0$. Позначимо $Q := \Omega\times(0,T]$, $\Sigma := \partial\Omega\times(0,T]$, тоді $\overline{Q} := \overline{\Omega}\times[0,T]$, $\overline{\Sigma} := \partial\Omega\times[0,T]$. Нехай $\tau : [0,T] \to [0,+\infty)$ – задана неперервна функція. Під E_0 розумітимемо множину, яка складається з чисел $t-\tau(t)$ таких, що $t-\tau(t) \le 0$ і $t \in [0,T]$, та числа 0.

Розглянемо ***задачу***: знайти функцію $u \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])\big) \cap C^{2,1}(Q)$, яка задовольняє рівняння

$$Pu(x,t) := u_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)u_{x_kx_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)u_{x_k}(x,t)+$$

$$+a_0(x,t)u(x,t) - g\big(x,t,u(x,t),u(x,t-\tau(t))\big) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.2}$$

крайову умову

$$Ru(x,t) := u(x,t) = h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{2.3}$$

та початкову умову

$$Gu(x,t) := u(x,t) = u_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0. \tag{2.4}$$

Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (2.2)–(2.4), а функцію u – її розв'язком.

Припустимо, що

$(\mathcal{A}_1)$ $a_{kl}, a_k, a_0 \in C(Q)$, $a_{kl} = a_{lk}$ $(k,l = \overline{1,n})$ та $\inf\limits_{(x,t)\in Q} a_0(x,t) > 0$, $\sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)\xi_k\xi_l \ge \mu(t)\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2$, $\forall(x,t) \in Q$, $\forall\xi_1,...,\xi_n \in \mathbb{R}$, де $\mu(t) \ge 0$ $\forall t \in (0,T]$;

$(\mathcal{A}_2)$ $g(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in \Omega\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, – неперервна за усіма змінними і неперервно диференційовна за змінними ξ та η функція, причому існують функції g_1, g_2 такі, що

$$0 \le \partial g(x,t,\xi,\eta)/\partial\xi \le g_1(x,t), \quad (x,t) \in Q,\ \xi,\eta \in \mathbb{R},$$

$$0 \le \partial g(x,t,\xi,\eta)/\partial\eta \le g_2(x,t), \quad (x,t) \in Q,\ \xi,\eta \in \mathbb{R},$$

$$\inf_{(x,t)\in Q}(a_0(x,t) - g_1(x,t)) =: a_0^- > 0, \qquad \sup_{(x,t)\in Q} g_2(x,t) =: g_2^+ < \infty,$$

крім того, $g(x,t,0,0) = 0$, $(x,t) \in Q$;

$(\mathcal{A}_3)$ $f \in C(Q)$, $h \in C(\overline{\Sigma})$, $u_0 \in C(\overline{\Omega} \times E_0)$, причому функція f є обмеженою та виконується умова узгодження нульового порядку:

$$h(x,0) = u_0(x,0) \quad \forall x \in \partial\,\Omega.$$

Тепер сформулюємо основні результати підрозділу.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$ *і*

$$a_0^- - g_2^+ > 0. \tag{2.5}$$

Припустимо, що u_1, u_2 *– розв'язки задач, що відрізняються від задачі* (2.2)–(2.4) *тільки тим, що замість* f, h, u_0 *стоять* $f_1, h_1, u_{0,1}$ *та* $f_2, h_2, u_{0,2}$ *відповідно з такими ж властивостями, які вказані для* f, h, u_0 *відповідно в умові* $(\mathcal{A}_3)$. *Тоді виконуються нерівності*

$$\min\Big\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+} \inf_{(y,s)\in Q} (f_1(y,s) - f_2(y,s)),$$

$$\min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} (h_1(y,s) - h_2(y,s)), \min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0} (u_{0,1}(y,s) - u_{0,2}(y,s)), 0\Big\} \le$$

$$\le u_1(x,t) - u_2(x,t) \le$$

$$\le \max\Big\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s)\in Q} (f_1(y,s) - f_2(y,s)), \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} (h_1(y,s) - h_2(y,s)),$$

$$\max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0} (u_{0,1}(y,s) - u_{0,2}(y,s)), 0\Big\}, \quad (x,t) \in Q. \tag{2.6}$$

Зауважимо, що з цієї теореми випливає неперервна залежність розв'язку задачі (2.2)–(2.4) від вихідних даних.

Наслідок 2.1. *Нехай виконуються умови теореми 2.1 і, крім того,* $f_1(x,t) \le f_2(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$, $h_1(x,t) \le h_2(x,t)$ $\forall (x,t) \in \Sigma$, $u_{0,1}(x,t) \le u_{0,2}(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0$. *Тоді правильна нерівність* $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$.

Наслідок 2.2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$ *і* (2.5). *Тоді для розв'язку задачі* (2.2)–(2.4) *правильна оцінка*

$$\min\Big\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+} \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s), \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h(y,s),$$

$$\min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0} u_0(y,s), 0\Big\} \le u(x,t) \le$$

$$\leq \max\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s)\in Q} f(y,s), \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h(y,s),$$

$$\max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0} u_0(y,s), 0\}, \ (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T]). \tag{2.7}$$

Наслідок 2.3. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$ *і* (2.5). *Тоді задача* (2.2)–(2.4) *має не більше одного розв'язку.*

Введемо потрібні нам далі ще деякі функційні простори. Під $C^{2+\gamma,1+\gamma/2}_{\rm loc}(Q)$ розумітимемо простір функцій $v \in C^{2,1}(Q)$ таких, що для будь-яких строго внутрішньої підобласті Ω' області Ω (тобто, $\overline{\Omega'} \subset \Omega$) та числа $\delta \in (0,T)$ звуження v на $\overline{\Omega'} \times [\delta, T]$ належить простору $C^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega'} \times [\delta,T])$.

Через $C^{\gamma,\gamma/2,1,1}(\overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ позначатимемо простір неперервних функцій $\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in \overline{\Omega}\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, кожна з яких є неперервно диференційовною за змінними ξ,η та для довільних $(x,t,\xi,\eta),(y,s,\overline{\xi},\overline{\eta}) \in \overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ задовольняє нерівність

$$\left|\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta) - \widetilde{g}(y,s,\overline{\xi},\overline{\eta})\right| \leq$$

$$\leq L(|x-y|^\gamma + |t-s|^{\gamma/2} + |\xi - \overline{\xi}| + |\eta - \overline{\eta}|),$$

де $L > 0$ – деяка стала, яка може залежати від $\widetilde{g}$.

Теорема 2.2 (*існування розв'язку*)**.** *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$ *і* (2.5). *Припустимо, що для деякого* $\alpha \in (0,1]$ *маємо*

$(\mathcal{B}_1)$ $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$,

$(\mathcal{B}_2)$ a_{kl}, a_k, $a_0 \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$ $(k,l = \overline{1,n})$, $g \in C^{\alpha,\alpha/2,1,1}(\overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $f \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$, $u_0 \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times E_0)$, $h \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Sigma})$.

Крім того, нехай

$(\mathcal{B}_3)$ $\partial a_{kl}/\partial x_s \in C(Q)$ $(k,l,s = \overline{1,n})$,

$(\mathcal{B}_4)$ $\tau \in Lip([0,T])$, $\mu(t) \geq \mu_0 = const > 0$ $\forall t \in (0,T]$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2.2)–(2.4), *він належить простору* $C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])\big) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$ *і задовольняє оцінки (2.7).*

2.1.3 Допоміжні твердження

Розглянемо мішану задачу для лінійного параболічного рівняння зі змінним запізненням: знайти функцію $u \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])\big) \cap C^{2,1}(Q)$, яка задовольняє рівняння

$$\widehat{P}u(x,t) := u_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)u_{x_k x_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)u_{x_k}(x,t) +$$

$$+\widehat{a}_0(x,t)u(x,t) - \widehat{g}(x,t)u\big(x,t-\tau(t)\big) = f(x,t),\ (x,t) \in Q, \tag{2.8}$$

крайову умову (2.3) і початкову умову (2.4).

Функції a_{kl}, a_k $(k,l = \overline{1,n})$, f, h, u_0 такі ж, як в умовах $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_3)$, а функції $\widehat{a}$, $\widehat{g}$ задовольняють умову

$$(\mathcal{A}_2^*)\ \ \widehat{a}_0, \widehat{g} \in C(Q), \quad \inf_{(x,t)\in Q} \widehat{a}_0(x,t) =: \widehat{a}_0^- > -\infty, \quad \sup_{(x,t)\in Q} \widehat{g}(x,t) =: \widehat{g}^+ < +\infty.$$

Лема 2.1. *Нехай $\widehat{g} \geq 0$ на Q. Тоді для функцій $u, v \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])\big) \cap C^{2,1}(Q)$ таких, що $\widehat{P}u(x,t) < \widehat{P}v(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$, $Ru(x,t) < Rv(x,t)$ $\forall (x,t) \in \Sigma$, $Gu(x,t) < Gv(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0$, правильна нерівність $u(x,t) < v(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$.*

Доведення. Позначимо $w(x,t) := u(x,t) - v(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])$, $\widetilde{f}(x,t) := \widehat{P}w(x,t) \equiv \widehat{P}u(x,t) - \widehat{P}v(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$, $\widetilde{h}(x,t) := Rw(x,t) \equiv Ru(x,t) - Rv(x,t)$ $\forall (x,t) \in \Sigma$, $\widetilde{u}_0(x,t) := Gw(x,t) \equiv Gu(x,t) - Gv(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0$. Легко переконатися, що правильні такі рівності

$$w_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)w_{x_k x_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)w_{x_k}(x,t) +$$

$$+\widehat{a}_0(x,t)w(x,t) - \widehat{g}(x,t)w(x,t-\tau(t)) = \widetilde{f}(x,t),\ (x,t) \in Q, \tag{2.9}$$

$$w(x,t) = \widetilde{h}(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{2.10}$$

$$w(x,t) = \widetilde{u}_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0, \tag{2.11}$$

де $\widetilde{f}, \widetilde{h}, \widetilde{u}_0$ – від'ємні функції.

Треба показати, що $w(x,t) < 0$ $\forall (x,t) \in Q$. Припустимо, що це не так. З нашого припущення і того, що на підставі рівностей (2.10) і (2.11) маємо

$w(x,t) < 0$ при $(x,t) \in (\overline{\Omega} \times E_0) \cup \Sigma$, випливає існування точки $(x^0, t_0) \in Q$ такої, що $w(x,t) < 0$, коли $(x,t) \in \Omega \times (0, t_0)$, і $w(x, t_0) \leq 0$, коли $x \in \Omega$, та $w(x^0, t_0) = 0$. Очевидно, що $w_t(x^0, t_0) \geq 0$. Врахувавши, що x^0 є точкою локального максимуму функції $x \mapsto w(x, t_0) : \Omega \to \mathbb{R}$, маємо: $w_{x_k}(x^0, t_0) = 0$, $\sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x^0, t_0) w_{x_k x_l}(x^0, t_0) \leq 0$. Звідси та з рівності (2.9) одержуємо

$$0 \leq w_t(x^0, t_0) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x^0, t_0) w_{x_k x_l}(x^0, t_0) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x^0, t_0) w_{x_k}(x^0, t_0) +$$

$$+ \widehat{a}_0(x^0, t_0) w(x^0, t_0) - \widehat{g}(x^0, t_0) w(x^0, t_0 - \tau(t_0)) = \widetilde{f}(x^0, t_0) < 0.$$

Отримали протиріччя, що доводить наше твердження. ∎

Наслідок 2.4. *Нехай* $\widehat{g} \geq 0$ *на* Q *і функція* $u \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])\big) \cap C^{2,1}(Q)$ *така, що* $\widehat{P}u(x,t) < 0 \ \ \forall (x,t) \in Q$, $Ru(x,t) < 0 \ \ \forall (x,t) \in \Sigma$, $Gu(x,t) < 0$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0$. *Тоді* $u(x,t) < 0 \ \ \forall (x,t) \in Q$.

Доведення. Дане твердження безпосередньо випливає з леми 2.1, поклавши функцію v тотожно рівну нулеві. ∎

Лема 2.2. *Нехай* $\widehat{g} \geq 0$ *на* Q *і* $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ > -1$. *Тоді для функцій* $u, v \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])\big) \cap C^{2,1}(Q)$ *таких, що* $\widehat{P}u(x,t) \leq \widehat{P}v(x,t) \ \ \forall (x,t) \in Q$, $Ru(x,t) \leq Rv(x,t) \ \ \forall (x,t) \in \Sigma$, $Gu(x,t) \leq Gv(x,t) \ \ \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0$, *правильна нерівність* $u(x,t) \leq v(x,t) \ \ \forall (x,t) \in Q$.

Доведення. Позначимо $w(x,t) := u(x,t) - v(x,t) \ \ \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])$. З наших припущень випливає, що $\widehat{P}w(x,t) \leq 0 \ \ \forall (x,t) \in Q$, $Rw(x,t) \leq 0$ $\forall (x,t) \in \Sigma$, $Gw(x,t) \leq 0 \ \ \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0$. Введемо в розгляд функцію

$$w^\lambda(x,t) := w(x,t) - \lambda\, e^t, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T]),$$

де $\lambda > 0$ – довільне фіксоване число.

Маючи на увазі, що $w(x,t) = w^\lambda(x,t) + \lambda\, e^t$, отримаємо

$$\widehat{P}w(x,t) := w_t^\lambda(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t) w_{x_k x_l}^\lambda(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t) w_{x_k}^\lambda(x,t) +$$

$$+ \widehat{a}_0(x,t) w^\lambda(x,t) - \widehat{g}(x,t) w^\lambda(x, t - \tau(t)) + \lambda\, e^t \big(\widehat{a}_0(x,t) -$$

$$-\widehat{g}(x,t)e^{-\tau(t)}+1\big)=\widehat{P}w^{\lambda}(x,t)+\lambda\,e^{t}\big(\widehat{a}_0(x,t)-\widehat{g}(x,t)e^{-\tau(t)}+1\big).$$

Звідси маємо

$$\widehat{P}w^{\lambda}(x,t)=\widehat{P}w(x,t)-\lambda\,e^{t}\big(\widehat{a}_0(x,t)-\widehat{g}(x,t)e^{-\tau(t)}+1\big). \tag{2.12}$$

В силу умов нашого твердження для будь-якої точки $(x,t)\in Q$ правильна нерівність

$$\widehat{a}_0(x,t)-\widehat{g}(x,t)e^{-\tau(t)}+1>0. \tag{2.13}$$

Справді, маємо

$$\inf_{(x,t)\in Q}(\widehat{a}_0(x,t)-\widehat{g}(x,t)e^{-\tau(t)})\geq\inf_{(x,t)\in Q}\widehat{a}_0(x,t)-\sup_{(x,t)\in Q}\widehat{g}(x,t)e^{-\tau(t)}\geq\widehat{a}_0^{-}-\widehat{g}^{+},$$

оскільки $e^{-\tau(t)}\leq 1$ і $\widehat{g}(x,t)\geq 0$ при $(x,t)\in Q$. Звідси на підставі відповідної умови леми випливає (2.13). В силу нерівностей $\widehat{P}w(x,t)\leq 0$ і (2.13) приходимо до висновку, що права частина рівності (2.12) від'ємна на Q, тобто $\widehat{P}w^{\lambda}(x,t)<0\ \forall(x,t)\in Q$. Легко бачити, що $Rw^{\lambda}(x,t)=Rw(x,t)-\lambda e^{t}<0$ $\forall(x,t)\in\Sigma$, $Gw^{\lambda}(x,t)=Gw(x,t)-\lambda e^{t}<0$ $\forall(x,t)\in\overline{\Omega}\times E_0$. Звідси на підставі наслідку 2.4 отримаємо нерівність $w^{\lambda}(x,t)<0$ $\forall(x,t)\in Q$, тобто $w(x,t)<\lambda e^{t}$ $\forall(x,t)\in Q$. Зафіксувавши в цій нерівності (x,t) та спрямувавши λ до 0, отримаємо нерівність $w(x,t)\leq 0$ $\forall(x,t)\in Q$, тобто $u(x,t)\leq v(x,t)$ $\forall(x,t)\in Q$. ∎

Твердження 2.3. *Нехай* $\widehat{g}\geq 0$ *на* Q *і* $\widehat{a}_0^{-}-\widehat{g}^{+}>0$. *Тоді для довільного розв'язку* u *задачі* (2.8),(2.3),(2.4) *виконується оцінка*

$$\min\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_0^{-}-\widehat{g}^{+}}\inf_{(y,s)\in Q}f(y,s),\ \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}h(y,s),\ \min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0}u_0(y,s),\ 0\Big\}\leq u(x,t)\leq$$

$$\leq\max\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_0^{-}-\widehat{g}^{+}}\sup_{(y,s)\in Q}f(y,s),\ \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}h(y,s),\ \max_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times E_0}u_0(y,s),0\Big\},\ (x,t)\in Q. \tag{2.14}$$

Доведення. Нехай u – розв'язок задачі (2.8),(2.3),(2.4). Приймемо

$$C_1:=\max\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_0^{-}-\widehat{g}^{+}}\sup_{(y,s)\in Q}f(y,s),\ \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}h(y,s),\ \max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0}u_0(y,s),\ 0\Big\}\geq 0.$$

Тоді для функції $v(x,t) = C_1$, $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])$, маємо

$$\widehat{P}v(x,t) = \big(\widehat{a}(x,t) - \widehat{g}(x,t)\big)\, C_1 \geq (\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+)C_1 \geq$$

$$\geq (\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+)\frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \sup_{(y,s)\in Q} f(y,s) \geq$$

$$\geq f(x,t) = \widehat{P}u(x,t),\ (x,t) \in Q,$$

$$Rv(x,t) = C_1 \geq \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h(y,s) \geq h(x,t) = Ru(x,t),\ (x,t) \in \overline{\Sigma},$$

$$Gv(x,t) = C_1 \geq \max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0} u_0(y,s) \geq u_0(x,t) = Gu(x,t),\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0.$$

Звідси на підставі леми 2.2 маємо $u(x,t) \leq C_1$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])$.

Тепер покладемо

$$C_2 := \min\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s),\ \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h(y,s),\ \min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0} u_0(y,s), 0\Big\} \leq 0.$$

Тоді

$$\widehat{P}v(x,t) = \big(\widehat{a}(x,t) - \widehat{g}(x,t)\big)\, C_2 \leq (\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+)C_2 \leq$$

$$\leq (\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+)\frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s) =$$

$$= \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s) \leq f(x,t) = \widehat{P}u(x,t),\ (x,t) \in Q,$$

$$Rv(x,t) = C_2 \leq \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h(y,s) \leq Ru(x,t),\ (x,t) \in \overline{\Sigma},$$

$$Gv(x,t) = C_2 \leq \min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0} u_0(y,s) \leq Gu(x,t),\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0.$$

Звідси на підставі леми 2.2 маємо $u(x,t) \geq C_2$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])$. ∎

Лема 2.3. *Для довільних* $(x,t) \in Q$, $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ *правильна рівність*

$$g(x,t,\xi_1,\eta_1) - g(x,t,\xi_2,\eta_2) = (\xi_1 - \xi_2)G_1(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) +$$

$$+(\eta_1 - \eta_2)G_2(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2),$$

де

$$G_1(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) := \int_0^1 g_\xi\Big(x,t,z(\xi_1-\xi_2)+\xi_2, z(\eta_1-\eta_2)+\eta_2\Big)dz, \quad (2.15)$$

$$G_2(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) := \int\limits_0^1 g_\eta\Big(x,t,z(\xi_1-\xi_2)+\xi_2, z(\eta_1-\eta_2)+\eta_2\Big)dz, \quad (2.16)$$

причому

$$0 \le G_i(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) \le g_i(x,t) \quad (i=1,2). \quad (2.17)$$

Доведення. На підставі леми Адамара для будь-яких $(x,t)\in Q$, $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2 \in \mathbb{R}$ маємо

$$g(x,t,\xi_1,\eta_1)-g(x,t,\xi_2,\eta_2) = (\xi_1-\xi_2)\int\limits_0^1 g_\xi\Big(x,t,z(\xi_1-\xi_2)+\xi_2, z(\eta_1-\eta_2)+\eta_2\Big)dz+$$

$$+(\eta_1-\eta_2)\int\limits_0^1 g_\eta\Big(x,t,z(\xi_1-\xi_2)+\xi_2, z(\eta_1-\eta_2)+\eta_2\Big)dz =$$

$$= (\xi_1-\xi_2)G_1(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) + (\eta_1-\eta_2)G_2(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2).$$

З умови $(\mathcal{A}_2)$ випливає (2.17). ∎

2.1.4 Обґрунтування основних результатів підрозділу

Доведення теореми 2.1. Позначимо $w(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{\Omega}\times(E_0\cup(0,T])$. Розглядаючи різницю виразів $Pu_1(x,t)$ і $Pu_2(x,t)$ та використовуючи лему 2.3, отримаємо рівність

$$\widehat{P}w(x,t) := w_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)w_{x_kx_l}(x,t) + \sum_{k=1}^n a_k w_{x_k}(x,t)+$$

$$+\widehat{a}_0(x,t)\,w(x,t) - \widehat{g}(x,t)\,w(x,t-\tau(t)) = \widetilde{f}(x,t),\ (x,t)\in Q, \quad (2.18)$$

де

$$\widehat{a}_0(x,t) := a_0(x,t) - G_1\Big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),$$

$$u_1(x,t-\tau(t)),u_2(x,t-\tau(t))\Big), \quad (x,t)\in Q,$$

$$\widehat{g}(x,t) := G_2\Big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),u_1(x,t-\tau(t)),u_2(x,t-\tau(t))\Big),\ (x,t)\in Q,$$

$$\widetilde{f}(x,t) := Pu_1(x,t) - Pu_2(x,t), \quad (x,t)\in Q,$$

а G_1 і G_2 визначені, відповідно, в (2.15) і (2.16). Легко бачити, що

$$Rw(x,t) = \widetilde{h}(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma, \quad (2.19)$$

$$Gw(x,t)) = \widetilde{u}_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0, \tag{2.20}$$

де

$$\widetilde{h}(x,t) := Ru_1(x,t) - Ru_2(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma,$$

$$\widetilde{u}_0(x,t) := Gu_1(x,t) - Gu_2(x,t), \ (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0.$$

Перевіримо виконання умов твердження 2.3, а точніше, переконаємося, що $\widehat{g} \geq 0$ на Q і $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ > 0$. З леми 2.3 (див. (2.17)) випливає, що $\widehat{g}(x,t) \geq 0$ для будь-яких $(x,t) \in Q$. Використовуючи умову $(\mathcal{A}_2)$ та лему 2.3, отримаємо

$$\widehat{a}_0^- := \inf_{(x,t)\in Q} \widehat{a}_0(x,t) = \inf_{(x,t)\in Q} \Big[a_0(x,t) -$$

$$-G_1\big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),u_1(x,t-\tau(t)),u_2(x,t-\tau(t))\big)\Big] \geq$$

$$\geq \inf_{(x,t)\in Q} (a_0(x,t) - g_1(x,t)) = a_0^-,$$

$$\widehat{g}^+ := \sup_{(x,t)\in Q} \widehat{g}(x,t) = \sup_{(x,t)\in Q} G_2\Big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),$$

$$u_1(x,t-\tau(t)),u_2(x,t-\tau(t))\Big) \leq \sup_{(x,t)\in Q} g_2(x,t) = g_2^+.$$

Так як $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ \geq a_0^- - g_2^+$, а з умови нашого твердження маємо $a_0^- - g_2^+ > 0$, то умови твердження 2.3 виконуються. Отож, для функції w, яка задовольняє рівності (2.18) – (2.20), правильна нерівність типу (2.14). Звідси випливає оцінка (2.6). ∎

Доведення наслідку 2.1. З умови наслідку маємо, що $a_0^- - g_2^+ > 0$ і $\widetilde{f}(x,t) \leq 0$, $(x,t) \in Q$, $\widetilde{h}(x,t) \leq 0$, $(x,t) \in \Sigma$. З (2.6) отримаємо $u_1(x,t) - u_2(x,t) \leq 0$, $(x,t) \in Q$, тобто $u_1(x,t) \leq u_2(x,t)$, $(x,t) \in Q$. ∎

Доведення наслідку 2.2. Дане твердження безпосередньо випливає з теореми 2.1, поклавши $u_1 = u$, $u_2 = 0$. ∎

Доведення наслідку 2.3. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 – два різні розв'язки задачі (2.2)–(2.4). Тоді з теореми 2.1 маємо, що $0 \leq u_1(x,t) - u_2(x,t) \leq 0$, $(x,t) \in \overline{Q}$, тобто $u_1 = u_2$ на $\overline{Q}$, а це протирічить нашому припущенню. Отже, наше твердження є правильним. ∎

Зауваження 2.1. *При виконанні умов* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$, *наслідок 2.1 є правильним і у випадку* $g \equiv 0$. *Справді, з умови* $(\mathcal{A}_1)$ *та того, що* $g \equiv 0$, *випливає виконання умов наслідку 2.1, а отже, правильність даного твердження.*

Доведення теореми 2.2. Покладемо

$$C_1 := \max\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s)\in Q} f(y,s), \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h(y,s), \max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0} u_0(y,s), 0\}, \quad (2.21)$$

$$C_2 := \min\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+} \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s), \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h(y,s), \min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_0} u_0(y,s), 0\}. \quad (2.22)$$

Визначимо послідовність функцій $\{v_p\}_{p=0}^{\infty} \subset C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])\big) \cap C_{loc}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q)$ таким чином. Спочатку приймемо $v_0(x,t) = C_1$, $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])$. Наступні члени цієї послідовності визначимо так: якщо відома функція v_{p-1}, то функцію v_p знаходимо як розв'язок задачі

$$\widetilde{P}v_p(x,t) \equiv v_{p,t}(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)v_{p,x_kx_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)v_{p,x_k}(x,t) +$$

$$+ a_0(x,t)v_p(x,t) = g\big(x,t,v_{p-1}(x,t),v_{p-1}(x,t-\tau(t))\big) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad (2.23)$$

$$v_p(x,t) = h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \quad (2.24)$$

$$v_p(x,t) = u_0(x,t), \quad x \in \overline{\Omega} \times E_0. \quad (2.25)$$

Покажемо, що так визначити послідовність $\{v_p\}$ можна. Нехай p – довільне фіксоване натуральне число. Позначимо

$$\widetilde{f}_p(x,t) := g\big(x,t,v_{p-1}(x,t),v_{p-1}(x,t-\tau(t))\big) + f(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}. \quad (2.26)$$

Оскільки $v_{p-1} \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])\big)$, то з умов $(\mathcal{B}_2)$, $(\mathcal{B}_4)$ випливає, що $f_p \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$. Звідси та умов $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$ та $(\mathcal{B}_1)$ – $(\mathcal{B}_3)$, на підставі теореми 9 монографії [6, ст. 93] функція $v_p \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{Q}\big) \cap C_{loc}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q)$ знаходиться однозначно для кожного $p \in \mathbb{N}$. Використовуючи умову (2.25) та те, що $u_0 \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times E_0)$, легко переконатися, що функція v_p належить до простору $C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])\big) \cap C_{loc}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q)$.

Тепер переконаймося в правильності нерівностей

$$C_2 \leqslant v_{p+1}(x,t) \leqslant v_p(x,t) \leqslant C_1, \ (x,t) \in Q, \quad (2.27)$$

для довільного $p \in \mathbb{N}$, де C_1, C_2 визначені, відповідно, в (2.21), (2.22). Для цього використаємо метод математичної індукції. Доведемо спочатку, що $v_1(x,t) \leqslant v_0(x,t)$, $(x,t) \in Q$. З означення v_1 маємо

$$v_1(x,t) \leq C_1 = v_0(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma,$$

$$v_1(x,t) \leq C_1 = v_0(x,t), \quad x \in \overline{\Omega} \times E_0.$$

Використовуючи лему 2.3 та умову $(\mathcal{A}_2)$, а точніше те, що $g_\xi \geq 0$, $g_\eta \geq 0$, $g(x,t,0,0) = 0$, матимемо

$$\widetilde{P}v_1(x,t) - \widetilde{P}v_0(x,t) = g(x,t,C_1,C_1) + f(x,t) - a_0(x,t)C_1 =$$
$$= f(x,t) - C_1\Big(a_0(x,t) - G_1(x,t,C_1,0,C_1,0) - G_2(x,t,C_1,0,C_1,0)\Big) \leq$$
$$\leq f(x,t) - C_1\big(a_0(x,t) - g_1(x,t) - g_2(x,t)\big) \leq$$
$$\leq f(x,t) - (a_0^- - g_2^+)C_1 \leq f(x,t) - \sup_{(x,t)\in Q} f(y,s) \leq 0, \quad (x,t) \in Q.$$

Звідси та із зауваження 2.1 випливає, що $v_1(x,t) \leq v_0(x,t)$, $(x,t) \in Q$.

Тепер покажемо, що для будь-якого $p \in \mathbb{N}$ з нерівності $v_p(x,t) \leq v_{p-1}(x,t)$, $(x,t) \in Q$, випливає нерівність $v_{p+1}(x,t) \leq v_p(x,t)$, $(x,t) \in Q$.

Згідно з (2.24), (2.25) маємо

$$v_{p+1}(x,t) = h(x,t) = v_p(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma,$$
$$v_{p+1}(x,t) = u_0(x,t) = v_p(x,t), \quad x \in \overline{\Omega} \times E_0.$$

На підставі леми 2.3 легко бачити, що

$$\widetilde{P}v_{p+1}(x,t) - \widetilde{P}v_p(x,t) = g\big(x,t,v_p(x,t),v_p(x,t-\tau(t))\big) -$$
$$-g(x,t,v_{p-1}(x,t),v_{p-1}(x,t-\tau(t))) = G_1\Big(x,t,v_p(x,t),v_{p-1}(x,t),v_p(x,t-\tau(t)),$$
$$v_{p-1}(x,t-\tau(t))\Big) \times (v_p(x,t) - v_{p-1}(x,t)) +$$
$$+G_2\Big(x,t,v_p(x,t),v_{p-1}(x,t),v_p(x,t-\tau(t)),v_{p-1}(x,t-\tau(t))\Big) \times$$
$$\times\Big(v_p(x,t-\tau(t)) - v_{p-1}(x,t-\tau(t))\Big) \leqslant 0, \quad (x,t) \in Q.$$

Звідси та із зауваження 2.1 отримаємо потрібне твердження. Отже, на підставі принципу математичної індукції для довільного $p \in \mathbb{N}$ маємо $v_{p+1}(x,t) \leqslant v_p(x,t) \leqslant C_1$, $(x,t) \in Q$.

Залишилось показати, що $C_2 \leqslant v_p(x,t)$, $(x,t) \in Q$, для кожного $p \in \mathbb{N}$. Знову використаємо метод математичної індукції. Очевидно, що $C_2 \leqslant v_0(x,t)$, $(x,t) \in Q$. Нехай $C_2 \leqslant v_{p-1}(x,t)$, $(x,t) \in Q$, для деякого $p \in \mathbb{N}$. Доведемо, що тоді $C_2 \leqslant v_p(x,t)$, $(x,t) \in Q$. Покладемо $v_*(x,t) = C_2$, $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])$. Враховуючи означення C_2, отримаємо

$$v_*(x,t) = C_2 \leq v_p(x,t),\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0,$$
$$v_*(x,t) = C_2 \leq v_p(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma,$$
$$\widetilde{P}v_*(x,t) - \widetilde{P}v_p(x,t) = a_0(x,t)C_2 - g\big(x,t,v_{p-1}(x,t),v_{p-1}(x,t-\tau(t))\big) -$$
$$-f(x,t) \leq C_2\big(a_0(x,t) - g_1(x,t) - g_2(x,t)\big) - f(x,t) \leq$$
$$\leq (a_0^- - g_2^+)C_2 - f(x,t) \leq \inf_{(x,t)\in Q} f(y,s) - f(x,t) \leq 0,\ (x,t) \in Q.$$

Звідси на підставі зауваження 2.1 отримуємо

$$v_*(x,t) \leqslant v_p(x,t), \qquad (x,t) \in Q,$$

що і потрібно було довести.

Отже, ми показали що послідовність $\{v_p\}$ – монотонна і обмежена. Звідси випливає, що існує визначена на $\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])$ функція u така, що для кожної точки $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])$ маємо $v_p(x,t) \to u(x,t)$ при $p \to \infty$ і u задовольняє умови (2.3), (2.4). Покажемо, що u – шуканий розв'язок.

З (2.23)–(2.25) та (2.27) в силу теореми 10.1 монографії [10, ст.238,239] отримаємо

$$||v_p||^{\overline{Q}}_{\alpha,\alpha/2} \leq C_3, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{2.28}$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка не залежить від p. Звідси та твердження 2.1 випливає, що існує підпослідовність послідовності $\{v_p\}_{p=1}^{\infty}$ (цю підпослідовність позначимо так само, як і всю послідовність, через $\{v_p\}_{p=1}^{\infty}$) така, що

$$v_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad C(\overline{Q}). \tag{2.29}$$

Із властивостей просторів Гельдера отримаємо, що $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$. Звідси та умов (2.4), ($\mathcal{B}_2$) і умови (2.25) випливає, що $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times (E_0 \cup (0,T])$.

Тепер відмітимо, що з умов $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{B}_2)$ – $(\mathcal{B}_4)$ та оцінки (2.28) маємо

$$||\tilde{f}_p||^{\overline{Q}}_{\alpha,\alpha/2} \leqslant C_4 \quad \forall p \in \mathbb{N}, \tag{2.30}$$

де $C_4 > 0$ – стала, яка не залежить від p.

Для довільного $\delta > 0$ позначимо $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}\{x, \partial\Omega\} > \delta\}$. Нехай $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ – монотонна послідовність чисел така, що $0 < \delta_k < T$, $\delta_k \underset{k\to\infty}{\downarrow} 0$ і Ω_{δ_k} – область в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_{\delta_k} = \Omega$. Позначимо $Q_k := \Omega_{\delta_k} \times (\delta_k, T]$. Враховуючи (2.30) і умови нашої теореми, з теореми 5 монографії [6, ст. 86,87] для кожного $k \in \mathbb{N}$ матимемо

$$||v_p||_{2+\alpha,1+\alpha/2}^{\overline{Q_k}} \leqslant C_5, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{2.31}$$

де $C_5 > 0$ – стала, яка від p не залежить, але залежить від C_3, C_4, і може залежати від k.

Із (2.29), (2.31) та твердження 2.2 випливає, що $u \in C_{\text{loc}}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q)$ із послідовності $\{v_p\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{v_{p_j}\}_{j=1}^\infty$, що $v_{p_j} \to u$ в $C^{2,1}(Q)$. Поклавши в (2.23) $p = p_j$ та спрямувавши j до нескінченності, приходимо до висновку, що u задовольняє рівняння (2.2). Як уже зазначалось, u також задовольняє умови (2.3), (2.4), а отже, ця функція є розв'язком задачі (2.2)-(2.4). ∎

2.2 Мішана задача для різнокомпонентних систем з локальним змінним запізненням

2.2.1 Формулювання задачі та основних результатів підрозділу

Нехай n, M, L – натуральні числа; $Q := \Omega \times (0, T]$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T]$.

Розглянемо різнокомпонентну систему

$$P_i w(x,t) := u_{i,t}(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x,t) u_{i,x_k x_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t) u_{i,x_k}(x,t)$$

$$+a_i(x,t)u_i(x,t) - g_i\big(x,t,w(x,t),w_\tau(x,t)\big) = f_i(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad i = 1,...,M, \tag{2.32}$$

$$P_{M+j} w(x,t) := v_{j,t}(x,t) + b_j(x,t) v_j(x,t) - g_{M+j}\big(x,t,w(x,t),w_\tau(x,t)\big) =$$

$$= f_{M+j}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad j = 1,...,L, \tag{2.33}$$

де $w = (u_1, \ldots, u_M; v_1, \ldots, v_L)$, $w_\tau(x,t) = (u_{1,\tau_1}, \ldots, u_{M,\tau_M}; v_{1,\tau_{M+1}}, \ldots, v_{L,\tau_{M+L}}) :=$

$\big(u_1(x,t-\tau_1(t)),\dots,u_M(x,t-\tau_M(t));v_1(x,t-\tau_{M+1}(t)),\dots,v_L(x,t-\tau_{M+L}(t))\big)$, і τ_s ($s=1,...,M+L$) – неперервні невід'ємні функції на $[0,T]$.

Для кожного $s\in\{1,\dots,M+L\}$ позначимо через $E_{s,0}$ множину, яка складається з чисел $t-\tau_s(t)$ таких, що $t-\tau_s(t)\le 0$ і $t\in[0,T]$, та числа 0.

Позначимо через W множину вектор-функцій $w=(u_1,\dots,u_M;v_1,\dots,v_L)$ таких, що $u_i\in C\big(\overline{\Omega}\times(E_{i,0}\cup(0,T])\big)\cap C^{2,1}(Q)$ $(i=1,...,M)$, $v_j\in C\big(\overline{\Omega}\times(E_{M+j,0}\cup(0,T])\big)\cap C^{0,1}(\overline{Q})$ $(j=1,...,L)$.

Розглянемо ***задачу***: знайти вектор-функції $w\in W$, яка задовольняє систему (2.32), (2.33), крайові умови

$$R_iw(x,t):=u_i(x,t)=h_i(x,t),\quad (x,t)\in\Sigma,\quad i=1,...,M, \tag{2.34}$$

та початкові умови

$$G_sw(x,t):=w_s(x,t)=w_{s,0}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Omega}\times E_{s,0},\quad s=1,\dots,M+L. \tag{2.35}$$

На вихідні дані накладаємо такі обмеження:

($\mathcal{A}_1$) $a_{i,kl}=a_{i,lk}$, $a_{i,k}$, $a_i\in C(Q)$ $(i=1,...,M;\ k,l=1,...,n)$; для кожного $i\in\{1,\dots,M\}$

$$\sum_{k,l=1}^{n}a_{i,kl}(x,t)\xi_k\xi_l\ge\mu_i(t)\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\quad\forall(x,t)\in Q,\ \forall\xi_1,...,\xi_n\in\mathbb{R},$$

де $\mu_i(t)\ge 0$ $\forall t\in(0,T]$; b_j $(j=1,...,L)\in C(\overline{Q})$;

($\mathcal{A}_2$) $g_i(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta)\in\Omega\times(0,T]\times\mathbb{R}^{M+L}\times\mathbb{R}^{M+L}$ $(i=1,\dots,M)$, $g_j(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta)\in\overline{\Omega}\times[0,T]\times\mathbb{R}^{M+L}\times\mathbb{R}^{M+L}$ $(j=1,\dots,L)$, – неперервні за усіма змінними і неперервно диференційовні за змінними ξ та η, причому існують функції $g^1_{r,s},g^2_{r,s}$ $(r,s=1,\dots,M+L)$ такі, що

$$0\le g_{r,\xi_s}(x,t,\xi,\eta)\le g^1_{r,s}(x,t)\quad\forall(x,t)\in Q,\ \forall\,\xi,\eta\in\mathbb{R}^{M+L},$$

$$0\le g_{r,\eta_s}(x,t,\xi,\eta)\le g^2_{r,s}(x,t)\quad\forall(x,t)\in Q,\ \forall\,\xi,\eta\in\mathbb{R}^{M+L},$$

$$\inf_{(x,t)\in Q}[a_i(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L}g^1_{i,s}(x,t)]=:a_i^-\ >0,\quad i=1,\dots,M, \tag{2.36}$$

$$\inf_{(x,t)\in\overline{Q}}[b_j(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L} g^1_{M+j,s}(x,t)]=:b_j^->0,\quad j=1,\dots,L, \tag{2.37}$$

$$\sup_{(x,t)\in Q}\sum_{s=1}^{M+L} g^2_{r,s}(x,t)=:g_r^{2,+}<\infty,\quad r=1,\dots,M+L;$$

$$g_r(x,t,0,0)=0\quad \forall (x,t)\in Q,\quad r=1,\dots,M+L;$$

$(\mathcal{A}_3)$ $f_i\in C(Q)$ $(i=1,\dots,M)$, $\sup\limits_{(x,t)\in Q}|f_i(x,t)|<\infty$, $f_{M+j}\in C(\overline{Q})$ $(j=1,\dots,L)$, $h_i\in C(\overline{\Sigma})$ $(i=1,...,M)$, $w_{r,0}\in C(\overline{\Omega}\times E_{r,0})$ $(r=1,...,M+L)$; виконується умова узгодження нульового порядку:

$$h_i(x,0)=w_{i,0}(x,0)\quad \forall x\in\partial\,\Omega,\quad i=1,\dots,M.$$

Введемо позначення

$$Pw:=(P_1w,\dots,P_{M+L}w),\ Rw:=(R_1w,\dots,R_Mw),\ Gw:=(G_1w,\dots,G_{M+L}w),$$

$$f:=(f_1,\dots,f_{M+L}),\quad h:=(h_1,\dots,h_M),\quad w_0:=(w_{1,0},...,w_{M+L,0}).$$

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$ *і*

$$a_i^- - g_i^{2,+}>0,\quad b_j^- - g_{M+j}^{2,+}>0,\quad i=1,\dots,M;\ j=1,\dots,L. \tag{2.38}$$

Припустимо, що w^1,w^2 *– розв'язки задач, що відрізняються від задачі* (2.32) – (2.35) *тільки тим, що замість* f,h,w_0 *стоять* f^1,h^1,w_0^1 *і* f^2,h^2,w_0^2 *відповідно з такими ж властивостями, які вказані для* f,h,w_0 *відповідно в умові* $(\mathcal{A}_3)$. *Тоді правильні нерівності*

$$\min\Big\{\frac{1}{a_i^- - g_i^{2,+}}\inf_{(y,s)\in Q}\big(f_i^1(y,s)-f_i^2(y,s)\big),\ \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}\big(h_i^1(y,s)-h_i^2(y,s)\big),$$

$$\min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{i,0}}\big(w_{i,0}^1(y,s)-w_{i,0}^2(y,s)\big),0\Big\}\le u_i^1(x,t)-u_i^2(x,t)\le$$

$$\le\max\Big\{\frac{1}{a_i^- - g_i^{2,+}}\sup_{(y,s)\in Q}\big(f_i^1(y,s)-f_i^2(y,s)\big),\ \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}\big(h_i^1(y,s)-h_i^2(y,s)\big),$$

$$\max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{i,0}}\big(w_{i,0}^1(y,s)-w_{i,0}^2(y,s)\big),0\Big\},\quad (x,t)\in Q,\ i=1,\dots,M, \tag{2.39}$$

$$\min\Big\{\frac{1}{b_j^- - g_{M+j}^{2,+}}\min_{(y,s)\in\overline{Q}}\big(f_{M+j}^1(y,s)-f_{M+j}^2(y,s)\big),$$

$$\min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{M+j,0}} \big(w^1_{M+j,0}(y,s) - w^2_{M+j,0}(y,s)\big), 0\Big\} \le$$
$$\le v^1_j(x,t) - v^2_j(x,t) \le$$
$$\le \max\Big\{\frac{1}{b^-_j - g^{2,+}_{M+j}} \max_{(y,s)\in\overline{Q}} \big(f^1_{M+j}(y,s) - f^2_{M+j}(y,s)\big),$$
$$\max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{M+j,0}} \big(w^1_{M+j,0}(y,s) - w^2_{M+j,0}(y,s)\big), 0\Big\}, \quad (x,t)\in\overline{Q},\ j=1,\dots,L. \tag{2.40}$$

Наслідок 2.5. *Нехай виконуються умови теореми 2.3 і, крім того,*

$$f^1_r(x,t) \le f^2_r(x,t) \quad \forall (x,t)\in Q,$$
$$w^1_{r,0}(x,t) \le w^2_{r,0}(x,t)\ \ \forall (x,t)\in\overline{\Omega}\times E_{r,0}\ (r=1,\dots,M+L),$$
$$h^1_i(x,t) \le h^2_i(x,t) \quad \forall (x,t)\in\Sigma \quad (i=1,\dots,M).$$

Тоді правильна нерівність $w^1_r(x,t) \le w^2_r(x,t)\ \ \forall (x,t)\in\overline{Q}\ \ (r=1,\dots,M+L)$.

Наслідок 2.6. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$ *і* (2.38). *Тоді розв'язок* $w=(u_1,...,u_M;\ v_1,...,v_L)$ *задачі* (2.32)–(2.35) *задовольняє оцінку*

$$\forall i\in\{1,\dots,M\}: \quad \min\Big\{\frac{1}{a^-_i - g^{2,+}_i} \inf_{(y,s)\in Q} f_i(y,s), \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h_i(y,s),$$
$$\min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{i,0}} w_{i,0}(y,s), 0\Big\} \le u_i(x,t) \le \max\Big\{\frac{1}{a^-_i - g^{2,+}_i} \sup_{(y,s)\in Q} f_i(y,s),$$
$$\max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h_i(y,s), \max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{i,0}} w_{i,0}(y,s), 0\Big\}, \quad (x,t)\in Q, \tag{2.41}$$
$$\forall j\in\{1,\dots,L\}: \ \min\Big\{\frac{1}{b^-_j - g^{2,+}_{M+j}} \min_{(y,s)\in\overline{Q}} f_{M+j}(y,s),$$
$$\min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{M+j,0}} w_{M+j,0}(y,s), 0\Big\} \le v_j(x,t) \le \max\Big\{\frac{1}{b^-_j - g^{2,+}_{M+j}} \max_{(y,s)\in\overline{Q}} f_{M+j}(y,s),$$
$$\max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{M+j,0}} w_{M+j,0}(y,s), 0\Big\}, \quad (x,t)\in\overline{Q}. \tag{2.42}$$

Наслідок 2.7. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$ *і* (2.38). *Тоді задача* (2.32)–(2.35) *має не більше одного розв'язку.*

Теорема 2.4. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$ *і* (2.38). *Припустимо, що для деякого* $\alpha\in(0,1]$ *маємо*

$(\mathcal{B}_1)$ $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$,

$(\mathcal{B}_2)$ $a_{i,kl}$, $a_{i,k}$, a_i, $b_j \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$, $g_r \in C^{\alpha,\alpha/2,1,1}(\overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $f_r \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$, $h_i \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Sigma})$, $w_{r,0} \in C^{\alpha}(\overline{\Omega} \times E_{r,0})$ *(*$r = 1,\dots,M+L$; $i = 1,\dots,M$; $j = 1,\dots,L$; $k,l = 1,\dots,n$ *).*

Крім того, нехай

$(\mathcal{B}_3)$ $\partial a_{i,kl}/\partial x_s \in C(Q)$ $(i = 1,\dots,M;\ k,l,s = 1,\dots,n)$,

$(\mathcal{B}_4)$ $\mu_i(t) \geq \mu_0 = const > 0$ $\forall t \in [0,T]$ $(i = 1,...,M)$,

$(\mathcal{B}_5)$ $\tau_s \in Lip((0,T])\,(s = 1,\dots,M+L)$.

Тоді існує єдиний розв'язок $w = (u_1,\dots,u_M; v_1,\dots,v_L)$ *задачі* (2.32)–(2.35), *для нього правильні включення* $u_i \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times (E_{i,0} \cup (0,T])\big) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$, $v_j \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times E_{M+j,0}\big) \cap C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$ *(*$i = 1,\dots,M$; $j = 1,\dots,L$ *), та оцінки (2.41), (2.42).*

Обґрунтування результатів цього підрозділу проводиться подібним чином, як це зроблено в підрозділі 2.1. Повне доведення цих результатів наведено в додатку А.

2.3 Крайова задача без початкових умов для параболічних рівнянь із локальним змінним запізненням і виродженням у початковий момент часу

2.3.1 Формулювання задачі та основних результатів підрозділу

Нехай $Q := \Omega \times (0,T]$, $\widetilde{Q} := \overline{\Omega} \times (0,T]$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0,T]$, а $\tau : (0,T] \to \mathbb{R}$ – неперервна функція така, що $0 \leq \tau(t) < t$ для всіх $t \in (0,T]$.

Розглянемо ***задачу***: знайти функцію $u \in C(\widetilde{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$, яка задовольняє рівняння

$$Pu(x,t) := p(x,t)u_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)u_{x_k x_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)u_{x_k}(x,t) +$$

$$+a_0(x,t)u(x,t) - g\big(x,t,u(x,t),u(x,t-\tau(t))\big) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad (2.43)$$

крайову умову

$$Ru(x,t) := u(x,t) = h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{2.44}$$

та аналог початкової умови

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} ||u(\cdot,t)||_{C(\overline{\Omega})} < \infty \tag{2.45}$$

(зауважимо, що умова (2.45) рівносильна умові $\sup\limits_{(x,t)\in\widetilde{Q}} |u(x,t)| < \infty$).

Припустимо, що виконуються умови:

($\mathcal{A}$) a_{kl}, a_k, $a_0 \in C(Q)$, $a_{kl} = a_{lk}$ $(k,l = \overline{1,n})$, $\inf\limits_{(x,t)\in Q} a_0(x,t) > 0$ і

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)\xi_k\xi_l \geq \mu(t)\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \quad \forall (x,t) \in Q,\ \forall \xi_1,...,\xi_n \in \mathbb{R},$$

де $\mu \in C((0,T])$, $\mu(t) > 0$ $\forall t \in (0,T]$;

($\mathcal{P}$) $p \in C(Q)$, $p(x,t) > 0$ $\forall (x,t) \in Q$, $\lim\limits_{t\to 0} p(x,t) = 0$ $\forall x \in \Omega$ та, крім того, існує функція $\varphi \in C((0,T])$ така, що

$$\varphi(t) > 0 \ \forall t \in (0,T], \quad \sup_{(x,t)\in Q} \big(p(x,t)\varphi(t)\big) < \infty,$$

$$\int_0^T \varphi(s)ds = +\infty, \quad \sup_{t\in(0,T]} \int_{t-\tau(t)}^{t} \varphi(s)ds < \infty; \tag{2.46}$$

($\mathcal{G}$) $g(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in \Omega\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, – неперервна за усіма змінними і неперервно диференційовна за змінними ξ та η функція, причому існують визначені на Q невід'ємні функції g_1, g_2 такі, що

$$0 \leq g_\xi(x,t,\xi,\eta) \leq g_1(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q,\ \forall\, (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2,$$

$$0 \leq g_\eta(x,t,\xi,\eta) \leq g_2(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q,\ \forall\, (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\inf_{(x,t)\in Q} (a_0(x,t) - g_1(x,t)) =: a_0^- > 0, \tag{2.47}$$

$$\sup_{(x,t)\in Q} g_2(x,t) =: g_2^+ < \infty;$$

крім того, $g(x,t,0,0) = 0$ для будь-яких $(x,t) \in Q$;

($\mathcal{F}$) $f \in C(Q)$, $h \in C(\Sigma)$ – обмежені функції.

Зауваження 2.2. *Умову* $(\mathcal{P})$ *задовольняють, зокрема, функції* p *і* φ *такі, що* $p \in C(Q)$, $p(x,t) > 0$ *для кожного* $(x,t) \in Q$, $p(x,t) \sim t^{\alpha}$ *при* $t \to 0+$ *рівномірно по* $x \in \Omega$, $\varphi(t) = t^{-\alpha}$, $t \in (0,T]$, $\tau(t) \sim t^{\gamma}$ *при* $t \to 0+$, *де* $\gamma > \alpha > 1$ *– деякі числа.*

Зауваження 2.3. *Умову* $(\mathcal{G})$ *задовольняє, зокрема, функція* $g(x,t,\xi,\eta) = g_1(x,t)\xi + g_2(x,t)\eta$, *де функції* g_1, g_2 *такі, як в умові* $(\mathcal{G})$, *і, як наслідок, цю умову задовольняє функція* $g = 0$.

Тепер сформулюємо основні результати підрозділу.

Теорема 2.5. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{G})$ *і*

$$a_0^- - g_2^+ > 0. \tag{2.48}$$

Припустимо, що u_1, u_2 *– розв'язки задач, які відрізняються від задачі* (2.43)–(2.45) *лише тим, що замість* f, h *стоять* f_1, h_1 *та* f_2, h_2 *відповідно з такими ж властивостями, які вказані для* f, h *відповідно в умові* $(\mathcal{F})$. *Тоді виконуються нерівності*

$$\min\left\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+}\inf_{(y,s)\in Q}\left(f_1(y,s) - f_2(y,s)\right), \inf_{(y,s)\in\Sigma}\left(h_1(y,s) - h_2(y,s)\right), 0\right\} \le$$
$$\le u_1(x,t) - u_2(x,t) \le$$
$$\le \max\left\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+}\sup_{(y,s)\in Q}\left(f_1(y,s) - f_2(y,s)\right), \sup_{(y,s)\in\Sigma}\left(h_1(y,s) - h_2(y,s)\right), 0\right\},$$
$$(x,t) \in Q. \tag{2.49}$$

Зауважимо, що з цієї теореми безпосередньо випливає неперервна залежність розв'язку задачі (2.43)–(2.45) від початкових даних.

Наслідок 2.8. *Нехай виконуються умови теореми 2.5 і, крім того,*

$$f_1(x,t) \le f_2(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q, \quad h_1(x,t) \le h_2(x,t) \quad \forall (x,t) \in \Sigma.$$

Тоді правильна нерівність

$$u_1(x,t) \le u_2(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q.$$

Наслідок 2.9. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{G})$, $(\mathcal{F})$ *і* (2.48). *Тоді для розв'язку задачі* (2.43)–(2.45) *правильними є оцінки*

$$\min\Big\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+}\inf_{(y,s)\in Q} f(y,s),\ \inf_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\Big\} \le u(x,t) \le$$

$$\le \max\Big\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+}\sup_{(y,s)\in Q} f(y,s),\ \sup_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\Big\},\ (x,t)\in Q. \tag{2.50}$$

Наслідок 2.10. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{G})$, $(\mathcal{F})$ *і* (2.48). *Тоді задача* (2.43)–(2.45) *має не більше одного розв'язку.*

Згідно з означеннями пункту 2.1.1 під $C^{\alpha,\alpha/2}_{\rm loc}(Q)$ розумітимемо простір функцій $v\in C(Q)$ таких, що для строго внутрішньої підобласті Ω' області Ω (тобто, $\overline{\Omega'}\subset\Omega$) та будь-якого числа $\delta\in(0,T)$ звуження v на $\overline{\Omega'}\times[\delta,T]$ належить до простору $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega'}\times[\delta,T])$, а під $C^{\alpha,\alpha/2}_{\rm loc}(\widetilde{Q})$ (відповідно, $C^{\alpha,\alpha/2}_{\rm loc}(\Sigma)$) – простір функцій $v\in C(\widetilde{Q})$ (відповідно, $v\in C(\Sigma)$) таких, що для будь-якого числа $\delta\in(0,T)$ звуження v на $\overline{\Omega}\times[\delta,T]$ (відповідно, на $\partial\Omega\times[\delta,T]$) належить до простору $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}\times[\delta,T])$ (відповідно, $C^{\alpha,\alpha/2}(\partial\Omega\times[\delta,T])$).

Під $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\rm loc}(Q)$ розумітимемо простір таких функцій $v\in C^{2,1}(Q)$, що їх похідні v_{x_k}, $v_{x_kx_l}$ $(k,l=\overline{1,n})$, v_t належать простору $C^{\alpha,\alpha/2}_{\rm loc}(Q)$.

Через $C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{\rm loc}(\overline{\Omega}\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ позначатимемо простір неперервних функцій $\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta)\in\overline{\Omega}\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, кожна з яких є неперервно диференційовною за змінними ξ,η та для будь-якого $\delta\in(0,T)$ існує додатна стала $L=L(\widetilde{g},\delta)>0$ така, що

$$\big|\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta)-\widetilde{g}(y,s,\overline{\xi},\overline{\eta})\big| \le L(|x-y|^\alpha+|t-s|^{\alpha/2}+|\xi-\overline{\xi}|+|\eta-\overline{\eta}|)$$

для довільних $(x,t,\xi,\eta),(y,s,\overline{\xi},\overline{\eta})$ з $\overline{\Omega}\times[\delta,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Теорема 2.6. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{G})$, $(\mathcal{F})$ *і* (2.48). *Припустимо, що для деякого* $\alpha\in(0,1]$ *маємо*

$(\mathcal{B}_1)$ $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$,

$(\mathcal{B}_2)$ $p, a_{kl}, a_k, a_0\in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\widetilde{Q})$ $(k,l=\overline{1,n})$, $g\in C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{loc}(\overline{\Omega}\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $f\in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\widetilde{Q})$, $h\in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\Sigma)$.

Крім того, нехай

$(\mathcal{B}_3)$ $\partial a_{kl}/\partial x_s \in C(\widetilde{Q})$ $(k,l,s=\overline{1,n})$,

$(\mathcal{B}_4)$ $\tau \in Lip_{loc}((0,T])$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2.43)–(2.45), *він належить простору* $C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\widetilde{Q}) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$ *і задовольняє оцінки* (2.50).

2.3.2 Допоміжні твердження

Розглянемо допоміжну задачу: знайти функцію $w \in C(\widetilde{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$, яка задовольняє рівняння

$$p(x,t)w_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)w_{x_kx_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)w_{x_k}(x,t) +$$

$$+\widehat{a}_0(x,t)w(x,t) - \widehat{g}(x,t)w(x,t-\tau(t)) = \widehat{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.51}$$

та умови

$$w(x,t) = \widehat{h}(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{2.52}$$

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} ||w(\cdot,t)||_{C(\overline{\Omega})} < \infty. \tag{2.53}$$

Припустимо, що функції $a_{k,l}, a_k$ $(k,l=\overline{1,n})$, p такі ж, як в умовах $(\mathcal{A})$ і $(\mathcal{P})$ відповідно, функції $\widehat{f}$, $\widehat{h}$ з мають такі ж властивості, як f,h (див. $(\mathcal{F})$) відповідно, а функції $\widehat{a}_0$, $\widehat{g}$ задовольняють умови:

$\widehat{a}_0, \widehat{g} \in C(Q)$, $\widehat{a}_0^- := \inf\limits_{(x,t)\in Q} \widehat{a}_0(x,t) > -\infty$, $\widehat{g}^+ := \sup\limits_{(x,t)\in Q} \widehat{g}(x,t) < +\infty$.

Зауваження 2.4. *Якщо* $p(x,t) \geq p_0 = const > 0$ *для всіх* $(x,t) \in \Omega \times (0,T]$, *то можна не накладати умову* $\tau(t) < t$ *і тоді замість* (2.53) *ставити початкову умову*

$$u(x,t) = u_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_0. \tag{2.54}$$

де E_0 *– множина, яка складається з чисел* $t-\tau(t)$ *таких, що* $t-\tau(t) \leq 0$ *і* $t \in (0,T]$, *та числа* 0. *Така задача досліджена у підрозділі 2.1*

Твердження 2.4. *Нехай* $\widehat{g} \geq 0$ *на* Q *і* $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ > 0$. *Тоді для розв'язку задачі (2.51)–*(2.53) *правильна оцінка*

$$\min\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+} \inf_{(y,s)\in Q} \widehat{f}(y,s), \inf_{(y,s)\in\Sigma} \widehat{h}(y,s), 0\right\} \leq w(x,t) \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+}\sup_{(y,s)\in Q}\widehat{f}(y,s),\ \sup_{(y,s)\in\Sigma}\widehat{h}(y,s),0\right\},\quad (x,t)\in Q. \tag{2.55}$$

Доведення. Введемо такі позначення:

$$\theta(t) := \int\limits_T^t \varphi(s)ds,\quad \varkappa(t) := \int\limits_{t-\tau(t)}^t \varphi(s)ds,\quad t\in(0,T]. \tag{2.56}$$

На підставі умови $(\mathcal{P})$ маємо, що $\theta(t)\leq 0$ при $t\in(0,T]$, θ монотонно зростає на $(0,T]$, $\theta(T)=0$, $\theta(t)\to-\infty$ при $t\to 0$, $\varkappa(t)\geq 0$ при $t\in(0,T]$ та $\varkappa$ – обмежена.

Нехай w – розв'язок задачі (2.51)–(2.53) і $M>0$ – стала така, що

$$|w(x,t)|\leq M,\ \ (x,t)\in\widetilde{Q}. \tag{2.57}$$

Позначимо

$$w^\mu(x,t) := w(x,t)e^{\mu\,\theta(t)},\quad (x,t)\in\widetilde{Q},$$

де $\mu>0$ – поки що довільне число. Тоді

$$w(x,t) = w^\mu(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)},\quad (x,t)\in\widetilde{Q}. \tag{2.58}$$

Підставивши у рівність (2.51) вираз w, заданий формулою (2.58), та врахувавши рівності

$$w_t(x,t) = w_t^\mu(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)} - \mu\varphi(t)\,w^\mu(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)},$$

$$w_{x_k}(x,t) = w_{x_k}^\mu(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)}\ (k=\overline{1,n}),$$

$$w(x,t-\tau(t)) = w^\mu(x,t-\tau(t))e^{-\mu\int_T^{t-\tau(t)}\varphi(s)ds} \equiv e^{\mu\,\varkappa(t)}w^\mu(x,t-\tau(t))e^{-\mu\,\theta(t)},$$

матимемо

$$p(x,t)\,w_t^\mu(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)} - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)\,w_{x_kx_l}^\mu(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)} +$$

$$+\sum_{k=1}^n a_k(x,t)\,w_{x_k}^\mu(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)} + \big(\widehat{a}_0(x,t) - \mu p(x,t)\varphi(t)\big)\,w^\mu(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)} -$$

$$-\widehat{g}(x,t)e^{\mu\,\varkappa(t)}\,w^\mu(t-\tau(t))e^{-\mu\,\theta(t)} = \widehat{f}(x,t),\quad (x,t)\in Q.$$

Домноживши цю рівність на $e^{\mu\,\theta(t)}$ і ввівши позначення

$$\widehat{a}_0^{\mu}(x,t) := \widehat{a}_0(x,t) - \mu p(x,t)\varphi(t), \;\; \widehat{g}^{\mu}(x,t) := \widehat{g}(x,t)e^{\mu\,\varkappa(t)},$$

$$f^{\mu}(x,t) := \widehat{f}(x,t)e^{\mu\,\theta(t)} \quad \forall (x,t) \in Q, \tag{2.59}$$

отримаємо

$$p(x,t)\,w_t^{\mu}(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)\,w_{x_k x_l}^{\mu}(x,t) \; + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)\,w_{x_k}^{\mu}(x,t) +$$

$$+\widehat{a}_0^{\mu}(x,t)\,w^{\mu}(x,t) - \widehat{g}^{\mu}(x,t)\,w^{\mu}(t-\tau(t)) = f^{\mu}(x,t), \quad (x,t) \in Q. \tag{2.60}$$

З умови (2.52) та співвідношення (2.58) маємо

$$w^{\mu}(x,t) = h^{\mu}(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{2.61}$$

де $h^{\mu}(x,t) := \widehat{h}(x,t)e^{\mu\,\theta(t)}$, $(x,t) \in \Sigma$.

Нехай $\varepsilon \in (0,T)$ – довільне число. Позначимо через E_{ε} множину, що складається з чисел $t-\tau(t)$ таких, що $t-\tau(t) < \varepsilon$ і $t \geq \varepsilon$, та числа ε. Приймемо

$$Q_{\varepsilon} := \Omega \times (\varepsilon, T] \quad \Big(\text{тоді } \overline{Q_{\varepsilon}} := \overline{\Omega} \times [\varepsilon, T]\Big), \quad \Sigma_{\varepsilon} := \partial\Omega \times (\varepsilon, T].$$

Розглянемо задачу: знайти функцію $w \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_{\varepsilon} \cup (\varepsilon, T])\big) \cap C^{2,1}(Q_{\varepsilon})$, яка задовольняє рівняння

$$p(x,t)w_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)w_{x_k x_l}(x,t) \; + \sum_{k=1}^{n} a_k w_{x_k}(x,t) +$$

$$+\widehat{a}_0^{\mu}(x,t)w(x,t) - \widehat{g}^{\mu}(x,t)w(t-\tau(t)) = f^{\mu}(x,t), \quad (x,t) \in Q_{\varepsilon}, \tag{2.62}$$

крайову умову

$$w(x,t) = h^{\mu}(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_{\varepsilon}, \tag{2.63}$$

і початкову умову

$$w(x,t) = w^{\mu}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_{\varepsilon}. \tag{2.64}$$

Ця задача вже без виродження, а тому можна застосувати результати підрозділу 2.1. Переконаємося, що для розв'язків задачі (2.62)–(2.64) при досить малих значеннях μ виконується умови твердження 2.3. Справді, з умови

$\widehat{g} \geq 0$ на Q безпосередньо випливає нерівність $\widehat{g}^{\mu} \geq 0$ на Q. Покажемо, що існує $\mu^* > 0$ таке, що $\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+} > 0$ для будь-якого $\mu \in [0, \mu^*]$, де $\widehat{a}_0^{\mu,-} := \inf\limits_{(x,t)\in Q} \widehat{a}_0^{\mu}(x,t)$, $\widehat{g}^{\mu,+} := \sup\limits_{(x,t)\in Q} \widehat{g}^{\mu}(x,t)$. Для цього введемо позначення: $(p\varphi)^+ := \sup\limits_{(x,t)\in Q} \big(p(x,t)\varphi(t)\big)$, $\varkappa^+ := \sup\limits_{t\in(0,T]} \varkappa(t)$. Легко бачити, що для $\mu > 0$

$$\widehat{a}_0^{\mu,-} = \inf_{(x,t)\in Q} \big(\widehat{a}_0(x,t) - \mu p(x,t)\varphi(t)\big) \geq \widehat{a}_0^- - \mu(p\varphi)^+, \tag{2.65}$$

а також

$$\widehat{g}^{\mu,+} = \sup_{(x,t)\in Q} \big(\widehat{g}(x,t)e^{\mu\varkappa(t)}\big) \leq \widehat{g}^+ e^{\mu\varkappa^+}. \tag{2.66}$$

З (2.65) і (2.66) отримаємо $\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+} \geq \widehat{a}_0^- - \mu(p\varphi)^+ - \widehat{g}^+ e^{\mu\varkappa^+} =: l(\mu)$ при $\mu > 0$. Розглянемо функцію $l(\mu)$, $\mu \in [0, +\infty)$. Очевидно, що вона є неперервною і $l(0) = \widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ > 0$. Звідси випливає існування такого $\mu^* > 0$, що $l(\mu) > 0$ при $\mu \in [0, \mu^*]$. Отже,

$$\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+} \geq l(\mu) > 0 \quad \text{при} \quad \mu \in [0, \mu^*]. \tag{2.67}$$

Отже, при $\mu \in [0, \mu^*]$ умови твердження 2.3 для задачі (2.62) – (2.64) виконуються. Звідси та того, що на підставі рівностей (2.60) і (2.61) звуження w^{μ} на $\overline{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, T])$ є розв'язком задачі (2.62)–(2.64), для всіх $\mu \in (0, \mu^*]$ випливають оцінки

$$\min\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+}} \inf_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f^{\mu}(y,s), \inf_{(y,s)\in\Sigma_\varepsilon} h^{\mu}(y,s), \inf_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_\varepsilon} w^{\mu}(y,s), 0\right\}$$
$$\leq w^{\mu}(x,t) \leq$$
$$\leq \max\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-} - \widehat{g}^{\mu,+}} \sup_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f^{\mu}(y,s), \sup_{(y,s)\in\Sigma_\varepsilon} h^{\mu}(y,s), \sup_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_\varepsilon} w^{\mu}(y,s), 0\right\}, \ (x,t)\in Q_\varepsilon. \tag{2.68}$$

Зрозуміло, що для будь-якого $\varepsilon \in (0, T)$ маємо

$$\inf_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f^{\mu}(y,s) \geq \inf_{(y,s)\in Q} f^{\mu}(y,s), \qquad \inf_{(y,s)\in\Sigma_\varepsilon} h^{\mu}(y,s) \geq \inf_{(y,s)\in\Sigma} h^{\mu}(y,s),$$
$$\sup_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f^{\mu}(y,s) \leq \sup_{(y,s)\in Q} f^{\mu}(y,s), \qquad \sup_{(y,s)\in\Sigma_\varepsilon} h^{\mu}(y,s) \leq \sup_{(y,s)\in\Sigma} h^{\mu}(y,s). \tag{2.69}$$

Також легко переконатися, врахувавши оцінку (2.57) і монотонність θ, що

$$\sup_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_\varepsilon} |w^{\mu}(y,s)| \leq \sup_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times(0,\varepsilon]} |w(y,s)e^{\mu\theta(s)}| \leq Me^{\mu\theta(\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0. \tag{2.70}$$

На підставі (2.69) і (2.70) з (2.68), спрямувавши ε до 0, отримаємо

$$\min\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-}-\widehat{g}^{\mu,+}}\inf_{(y,s)\in Q}f^{\mu}(y,s),\ \inf_{(y,s)\in\Sigma}h^{\mu}(y,s),0\right\}\le w^{\mu}(x,t)\le$$

$$\le\max\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-}-\widehat{g}^{\mu,+}}\sup_{(y,s)\in Q}f^{\mu}(y,s),\ \sup_{(y,s)\in\Sigma}h^{\mu}(y,s),0\right\},\quad (x,t)\in Q,\ \mu\in(0,\mu^*]. \tag{2.71}$$

Нехай

$$Q_-:=\{(x,t)\in Q\,|\,f(x,t)<0\},\quad Q_+:=\{(x,t)\in Q\,|\,f(x,t)>0\},$$

$$\Sigma_-:=\{(x,t)\in Q\,|\,h(x,t)<0\},\quad \Sigma_+:=\{(x,t)\in Q\,|\,h(x,t)>0\}.$$

У випадку $Q_-\neq\varnothing$, врахувавши, що $0<e^{\mu\theta(s)}\le 1\ \forall s\in(0,T]$, маємо

$$\inf_{(y,s)\in Q}f^{\mu}(y,s)=\inf_{(y,s)\in Q_-}f(y,s)e^{\mu\theta(s)}\ge\inf_{(y,s)\in Q_-}f(y,s)=\inf_{(y,s)\in Q}f(y,s),$$

а тому (див.(2.67))

$$\frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-}-\widehat{g}^{\mu,+}}\inf_{(y,s)\in Q}f^{\mu}(y,s)\ge\frac{1}{\widehat{a}_0^{\mu,-}-\widehat{g}^{\mu,+}}\inf_{(y,s)\in Q}f(y,s)\ge\frac{1}{l(\mu)}\inf_{(y,s)\in Q}f(y,s). \tag{2.72}$$

Отже, в цьому випадку в лівій частині першої з нерівностей (2.71) перший член можна замінити на $\frac{1}{l(\mu)}\inf\limits_{(y,s)\in Q}f(y,s)$. Очевидно, що теж саме можна зробити і тоді, коли $Q_-=\varnothing$, оскільки в цьому випадку перший член лівої частини першої з нерівностей (2.71) є невід'ємний, а отже, не визначає значення лівої частини першої з нерівностей (2.71).

Провівши аналогічні міркування стосовно другого члена лівої частини першої з нерівностей (2.71), а також першого та другого членів правої частини другої з нерівностей (2.71), отримаємо

$$\min\left\{\frac{1}{l(\mu)}\inf_{(y,s)\in Q}f(y,s),\ \inf_{(y,s)\in\Sigma}h(y,s),0\right\}\le w(x,t)e^{\mu\,\theta(t)}\le$$

$$\le\max\left\{\frac{1}{l(\mu)}\sup_{(y,s)\in Q}f(y,s),\ \sup_{(y,s)\in\Sigma}h(y,s),0\right\},\quad (x,t)\in Q,\ \mu\in(0,\mu^*]. \tag{2.73}$$

Зафіксувавши довільним чином вибрану точку $(x,t)\in Q$, перейдемо в (2.73) до границі при $\mu\to+0$. У результаті, взявши до уваги, що $l(\mu)\underset{\mu\to+0}{\longrightarrow}\widehat{a}_0^{-}-\widehat{g}^{+}$, отримаємо оцінки (2.55). ∎

2.3.3 Обґрунтування основних результатів підрозділу

Доведення теореми 2.5. Позначимо $w(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t), \quad (x,t) \in \widetilde{Q}$. Розглядаючи різницю виразів Pu_1 і Pu_2, на підставі леми 2.3 отримаємо рівність

$$p(x,t)w_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)w_{x_k x_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)w_{x_k}(x,t) +$$

$$+\widehat{a}_0(x,t)\, w(x,t) - \widehat{g}(x,t)\, w(x,t-\tau(t)) = \widehat{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.74}$$

де

$$\widehat{a}_0(x,t) := a_0(x,t) - G_1\big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),u_1(x,t-\tau(t)),u_2(x,t-\tau(t))\big),$$

$$\widehat{g}(x,t) := G_2\big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),u_1(x,t-\tau(t)),u_2(x,t-\tau(t))\big),$$

$$\widehat{f}(x,t) = f_1(x,t) - f_2(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

а G_1 і G_2 визначені, відповідно, в (2.15) і (2.16). Легко бачити, що

$$w(x,t) = \widehat{h}(x,t) := h_1(x,t) - h_2(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{2.75}$$

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \|w(\cdot,t)\|_{C(\overline{\Omega})} < \infty. \tag{2.76}$$

З (2.74)–(2.76) випливає, що функція w є розв'язком задачі (2.51)–(2.53). Перевіримо виконання умов твердження 2.4, а саме, чи $\widehat{g} \geq 0$ на Q і $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ > 0$. З леми 2.3 випливає, що $\widehat{g}(x,t) \geq 0$ для будь-яких $(x,t) \in Q$. Використовуючи умову $(\mathcal{G})$ та лему 2.3, отримуємо

$$\widehat{a}_0^- := \inf_{(x,t)\in Q} \widehat{a}_0(x,t) = \inf_{(x,t)\in Q} \Big[a_0(x,t) - G_1\Big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),u_1(x,t-\tau(t)),$$

$$u_2(x,t-\tau(t))\Big)\Big] \geq \inf_{(x,t)\in Q}(a_0(x,t) - g_1(x,t)) = a_0^-,$$

$$\widehat{g}^+ := \sup_{(x,t)\in Q} \widehat{g}(x,t) = \sup_{(x,t)\in Q} G_2\Big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),u_1(x,t-\tau(t)),$$

$$u_2(x,t-\tau(t))\Big) \leq \sup_{(x,t)\in Q} g_2(x,t) = g_2^+.$$

Оскільки $\widehat{a}_0^- - \widehat{g}^+ \geq a_0^- - g_2^+$, а за умовою нашого твердження маємо $a_0^- - g_2^+ > 0$, то умови твердження 2.4 виконуються. Отож, для функції w правильні нерівності (2.55), з яких випливають нерівності (2.49). ∎

Доведення наслідку 2.8. За умовою наслідку маємо, що $f_1(x,t) - f_2(x,t) \le 0$ $\forall (x,t) \in Q$, $h_1(x,t) - h_2(x,t) \le 0$ $\forall (x,t) \in \Sigma$. Тоді з (2.49) отримаємо $u_1(x,t) - u_2(x,t) \le 0$ $\forall (x,t) \in Q$, тобто $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$. ∎

Доведення наслідку 2.9. Дане твердження безпосередньо отримуємо з теореми 2.5, поклавши $u_1 := u$, $u_2 := 0$. ∎

Доведення наслідку 2.10. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 – два різні розв'язки задачі (2.43)–(2.45). Тоді з теореми 2.5 маємо, що $0 \le u_1(x,t) - u_2(x,t) \le 0$, $(x,t) \in Q$, тобто $u_1 = u_2$ на Q, а це протирічить нашому припущенню. Отож, твердження наслідку 2.10 є правильним. ∎

Доведення теореми 2.6. Нехай ε – довільне число з проміжку $(0, T/3)$, а позначення Q_ε, Σ_ε, E_ε такі ж, як при доведенні твердження 2.4.

Нехай функція $\theta_\varepsilon \in C^\infty((0,T])$ така, що $0 \le \theta_\varepsilon(t) \le 1$ при $t \in (0,T]$, $\theta_\varepsilon(t) = 0$ при $t \in (0, 2\varepsilon]$ і $\theta_\varepsilon(t) = 1$ при $t \in (3\varepsilon, T]$. Покладемо

$$h_\varepsilon(x,t) := \theta_\varepsilon(t) h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \qquad f_\varepsilon(x,t) := \theta_\varepsilon(t) f(x,t), \quad (x,t) \in Q.$$

Зауважимо, що

$$|h_\varepsilon(x,t)| \le |h(x,t)| \quad \forall (x,t) \in \Sigma, \qquad |f_\varepsilon(x,t)| \le |f(x,t)| \quad \forall (x,t) \in Q. \tag{2.77}$$

Розглянемо задачу: знайти функцію $u_\varepsilon \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, T])\big) \cap C^{2,1}(Q_\varepsilon)$, яка задовольняє рівняння

$$P u_\varepsilon(x,t) = f_\varepsilon(x,t), \quad (x,t) \in Q_\varepsilon, \tag{2.78}$$

та умови

$$u_\varepsilon(x,t) = h_\varepsilon(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_\varepsilon, \tag{2.79}$$

$$u_\varepsilon(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_\varepsilon, \tag{2.80}$$

де P – диференціальний оператор, який визначений у (2.43).

З теореми 2.2 випливає існування єдиного розв'язку $u_\varepsilon \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_\varepsilon) \cap C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, T]))$ задачі (2.78)–(2.80). На підставі наслідку 2.2 для звуження u_ε на $\overline{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, 2\varepsilon])$ для всіх $(x,t) \in \overline{Q}_\varepsilon / Q_{2\varepsilon}$ маємо оцінку

$$|u_\varepsilon(x,t)| \le \max\Big\{ \frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s) \in Q_\varepsilon / Q_{2\varepsilon}} |f_\varepsilon(y,s)|, \sup_{(y,s) \in \Sigma_\varepsilon / \Sigma_{2\varepsilon}} |h_\varepsilon(y,s)| \Big\}. \tag{2.81}$$

З означень f_ε та h_ε випливає, що права частина (2.81) дорівнює нулю, а тому $u_\varepsilon(x,t) = 0$ для кожного $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_\varepsilon \cup (\varepsilon, 2\varepsilon])$. Довизначимо u_ε нулем на всю множину $\widetilde{Q}$ і залишимо за цим продовженням позначення u_ε. Легко переконатися, що u_ε є розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (2.43) – (2.45) тільки тим, що f і h замінено на f_ε і h_ε відповідно. Звідси на підставі наслідку 2.9 та (2.77) випливає, що

$$|u_\varepsilon(x,t)| \le \max\Big\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s)\in Q} |f(y,s)|, \sup_{(y,s)\in\Sigma} |h(y,s)|\Big\}, \quad (x,t) \in Q. \quad (2.82)$$

Нехай $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ – послідовність чисел з інтервалу $(0, T/3)$ така, що $\varepsilon_j \downarrow 0$ при $j \to \infty$. Зробимо перепозначення $u_j := u_{\varepsilon_j}$, $f_j := f_{\varepsilon_j}$, $h_j := h_{\varepsilon_j}$ для кожного $j \in \mathbb{N}$. З (2.82) випливає, що послідовність $\{u_j\}$ є обмеженою на $\widetilde{Q}$, тобто

$$\sup_{(x,t)\in\widetilde{Q}} |u_j(x,t)| \le C_3, \qquad j \in \mathbb{N}, \quad (2.83)$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка не залежить від j.

Нехай $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ – монотонна послідовність чисел така, що $\delta_k \underset{k\to\infty}{\downarrow} 0$, $0 < \delta_k < T$ і $\Omega_k := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}\{x, \partial\Omega\} > \delta_k\}$ – область в $\mathbb{R}^n$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Позначимо $I_k := (\delta_k, T]$, $Q_k := \Omega_k \times I_k$, $Q^k := \Omega \times I_k$. Відмітимо, що $Q_k \subset Q^k$, $Q_k \subset Q_{k+1}$, $Q^k \subset Q^{k+1}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$; $\bigcup\limits_{k=1}^\infty \Omega_k = \Omega$, $\bigcup\limits_{k=1}^\infty \overline{Q}_k = Q$, $\bigcup\limits_{k=1}^\infty \overline{Q^k} = \widetilde{Q}$.

Нехай $g_j(x,t) := f_j(x,t) + g(x,t,u_j(x,t),u_j(x,t-\tau(t)))$, $(x,t) \in \widetilde{Q}$, для кожного $j \in \mathbb{N}$. З неперервності функцій g на $\widetilde{Q} \times \mathbb{R}^2$, f_j, u_j $(j \in \mathbb{N})$ на $\widetilde{Q}$ та оцінок (2.77), (2.83) випливає, що функції g_j $(j \in \mathbb{N})$ є неперервними на $\widetilde{Q}$ і для довільного $k \in \mathbb{N}$ справджується оцінка

$$||g_j||_{C(\overline{Q^k})} \leqslant C_4, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (2.84)$$

де $C_4 > 0$ – стала, яка не залежить від j, але може залежати від k.

З (2.78) випливає, що для кожного $j \in \mathbb{N}$

$$p(x,t)u_{j,t}(x,t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)u_{j,x_kx_l}(x,t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n a_k(x,t)u_{j,x_k}(x,t) + a_0(x,t)u_j(x,t) = g_j(x,t), \ (x,t) \in Q, \quad (2.85)$$

а з (2.79) –

$$u_j(x,t) = h_j(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma. \tag{2.86}$$

Відмітимо, що на підставі умов $(\mathcal{B}_1)-(\mathcal{B}_4)$ рівняння (2.85) є частковим випадком рівняння (1.1), дослідженого у главі 3 монографії [10]. Зокрема, теорема 10.1 (ст. 238-239) цієї монографії встановлює оцінки сталої Гельдера розв'язку рівняння (1.1) з цієї монографії у підобласті області його задання. На підставі цієї теореми для розв'язку рівняння (2.85), що задовольняє умову (2.86), отримуємо оцінку

$$||u_j||^{\overline{Q^k}}_{\alpha,\alpha/2} \leq C_5, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{2.87}$$

де $C_5 > 0$ – стала, яка залежить від коефіцієнтів рівняння, сталих C_3, C_4 з оцінок (2.83), (2.84) та δ_k, але не залежить від j.

Отже, згідно з твердженням 2.2 існують функція $u \in C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{Q})$ і підпослідовність послідовності $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ (цю підпослідовність позначимо так само, як і всю послідовність, через $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$) такі, що

$$u_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad C(\widetilde{Q}). \tag{2.88}$$

Покажемо, що u – розв'язок задачі (2.43)–(2.45). Для цього спочатку зауважимо, що з умов $(\mathcal{G})$, $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{B}_2)$, $(\mathcal{B}_4)$ та оцінки (2.87) маємо

$$||g_j||^{\overline{Q^k}}_{\alpha,\alpha/2} \leqslant C_6, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{2.89}$$

де $C_6 > 0$ – стала, яка не залежить від j, але може залежати від k.

Оскільки на підставі умов $(\mathcal{B}_1)$, $(\mathcal{B}_2)$, $(\mathcal{B}_3)$ рівняння (2.85) є частковим випадком рівняння (10.1), дослідженого у главі 4 монографії [10], то згідно з теоремою 10.1 (ст. 400) цієї монографії, яка встановлює локальні оцінки розв'язку рівняння (10.1) цієї монографії та його похідних у класах Гельдера, для розв'язку рівняння (2.85) отримуємо оцінку

$$||u_j||^{\overline{Q_k}}_{2+\alpha,1+\alpha/2} \leqslant C_7, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{2.90}$$

де $C_7 > 0$ – стала, яка залежить від коефіцієнтів рівняння, сталих C_3, C_6 з оцінок (2.83), (2.89), але не залежить від j.

Із (2.88), (2.90), твердження 2.2 та теореми про диференціювання границі збіжної послідовності функцій випливає, що функція u (див. (2.88)) належить простору $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$ та з послідовності $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ можна вибрати

підпослідовність $\{u_{j_m}\}_{m=1}^{\infty}$, яка збігається до u у просторі $C^{2,1}(Q)$. Тепер відмітимо, що $h_j \to h$ при $j \to \infty$ рівномірно на кожному компакті поверхні Σ. Крім того, з (2.88) та неперервності функцій g, f_j $(i \in \mathbb{N})$ маємо

$$g_j(x,t) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f(x,t) + g(x,t,u(x,t),u(x,t-\tau(t))), \quad (x,t) \in Q.$$

Враховуючи викладене, покладемо $j = j_m$ у (2.85) і (2.86) та перейдемо там до границі при $m \to \infty$. У результаті отримаємо рівності, з яких випливає, що функція u є класичним розв'язком рівняння (2.43) та задовольняє крайову умову (2.44). Виконання умови (2.45) випливає із (2.83) та (2.88). ∎

2.4 Крайова задача без початкових умов для різнокомпонентних систем рівнянь із локальним змінним запізненням і виродженням у початковий момент часу

2.4.1 Формулювання задачі та основних результатів підрозділу

Нехай n, M, L – натуральні числа; $Q := \Omega \times (0,T]$, $\widetilde{Q} := \overline{\Omega} \times (0,T]$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0,T]$.

Розглянемо різнокомпонентну систему

$$P_i w(x,t) := p_i(x,t)u_{i,t}(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,lk}(x,t)u_{i,x_k x_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t)u_{i,x_k}(x,t) +$$

$$+a_i(x,t)u_i(x,t) - g_i\big(x,t,w(x,t),w_\tau(x,t)\big) = f_i(x,t),\ (x,t) \in Q,\ i = 1,...,M, \tag{2.91}$$

$$P_{M+j} w(x,t) := q_j(x,t)v_{j,t}(x,t) + b_j(x,t)v_j(x,t) - g_{M+j}\big(x,t,w(x,t),w_\tau(x,t)\big) =$$

$$= f_{M+j}(x,t), \quad (x,t) \in \widetilde{Q}, \quad j = 1,...,L, \tag{2.92}$$

де $w(x,t) := \big(u_1(x,t),\dots,u_M(x,t);v_1(x,t),\dots,v_L(x,t)\big)$, $w_\tau(x,t) := \big(u_1(x,t-\tau_1(t)),\dots,u_M(x,t-\tau_M(t));v_1(x,t-\tau_{M+1}(t)),\dots,v_L(x,t-\tau_{M+L}(t))\big)$, а τ_s – неперервна невід'ємна функція на $(0,T]$ така, що $\tau_s(t) < t$ $\forall t \in (0,T]$ для кожного $s \in \{1,\dots,M+L\}$.

Під W розуміємо множину вектор-функцій $w = (u_1,\dots,u_M;v_1,\dots,v_L)$ таких, що $u_i \in C(\widetilde{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ $(i = 1,...,M)$, $v_j \in C^{0,1}(\widetilde{Q})$ $(j = 1,...,L)$.

Розглянемо ***задачу***: знайти вектор-функцію $w \in W$, яка задовольняє систему (2.91), (2.92), крайову умову

$$w_i(x,t) = h_i(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \quad i = 1, ..., M, \tag{2.93}$$

та аналог початкової умови

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \, ||w_r(\cdot,t)||_{C(\overline{\Omega})} < \infty, \quad r = 1, \ldots, M+L \tag{2.94}$$

(зауважимо, що умова (2.94) рівносильна умові $\max\limits_{r\in\{1,...,M+L\}} \sup\limits_{(x,t)\in\widetilde{Q}} |w_r(x,t)| < \infty$).

На вихідні дані задачі (2.91)–(2.94) накладаємо такі обмеження:

($\mathcal{A}_1$) $a_{i,kl} = a_{i,lk}$, $a_{i,k}$, a_i $(i = 1, ..., M;\ k, l = 1, ..., n)$ – неперервні функції на Q і для кожного $i \in \{1, \ldots, M\}$

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x,t)\xi_k\xi_l \geq \mu_i(t) \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \quad \forall (x,t) \in Q,\ \forall \xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{R},$$

де $\mu_i(t) \geq 0$ $\forall t \in (0,T]$;

b_j $(j = 1, ..., L)$ – неперервні функції на $\widetilde{Q}$;

($\mathcal{A}_2$) $p_i : Q \to \mathbb{R}$, $q_j : \widetilde{Q} \to \mathbb{R}$ – неперервні додатні функції такі, що $\lim\limits_{t\to 0+} p_i(x,t) = 0$, $x \in \Omega$, $\lim\limits_{t\to 0+} q_j(x,t) = 0$, $x \in \overline{\Omega}$, та існує функція $\varphi \in C((0,T])$, для якої виконуються умови: $\varphi(t) > 0$ при $t \in (0,T]$,

$$\int_0^T \varphi(s)ds = +\infty, \quad \sup_{t\in(0,T]} \int_{t-\tau_k(t)}^{t} \varphi(s)ds < \infty \ (k = 1, ..., M+L) \tag{2.95}$$

і $\sup\limits_{(x,t)\in Q} \big(p_i(x,t)\,\varphi(t)\big) < \infty$, $\sup\limits_{(x,t)\in\widetilde{Q}} \big(q_j(x,t)\,\varphi(t)\big) < \infty$ $(i = 1, .., M,\ j = 1, ..., L)$.

($\mathcal{A}_3$) $g_i(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in \Omega \times (0,T] \times \mathbb{R}^{M+L} \times \mathbb{R}^{M+L}$, $(i = 1, \ldots, M)$, $g_{M+j}(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in \overline{\Omega} \times (0,T] \times \mathbb{R}^{M+L} \times \mathbb{R}^{M+L}$, $(j = 1, \ldots, L)$ – неперервні за усіма змінними і неперервно диференційовні за змінними ξ та η функції, причому існують функції $g_{r,s}^1, g_{r,s}^2$ $(r, s = 1, \ldots, M+L)$ такі, що

$$0 \leq g_{r,\xi_s}(x,t,\xi,\eta) \leq g_{r,s}^1(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q,\ \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}^{M+L},$$

$$0 \le g_{r,\eta_s}(x,t,\xi,\eta) \le g^2_{r,s}(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q,\ \forall\, \xi,\eta \in \mathbb{R}^{M+L},$$

$$\inf_{(x,t)\in Q}[a_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} g^1_{i,s}(x,t)] =: a_i^- > 0, \quad i = 1,\dots,M, \tag{2.96}$$

$$\inf_{(x,t)\in \widetilde{Q}}[b_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} g^1_{M+j,s}(x,t)] =: b_j^- > 0, \quad j = 1,\dots,L, \tag{2.97}$$

$$\sup_{(x,t)\in Q} \sum_{s=1}^{M+L} g^2_{r,s}(x,t) =: g_r^{2,+} < \infty, \quad r = 1,\dots,M+L;$$

крім того, $g_r(x,t,0,0) = 0$, $(x,t) \in Q$ $(r = 1,\dots,M+L)$;

$(\mathcal{A}_4)$ $f_i \in C(Q)$ $(i = 1,\dots,M)$, $f_{M+j} \in C(\widetilde{Q})$ $(j = 1,\dots,L)$, $h_i \in C(\Sigma)$ $(i = 1,\dots,M)$, причому функції f_r, h_i є обмеженими $(r = 1,\dots,M+L,$ $i = 1,\dots,M)$.

Надалі використовуватимемо позначення

$$f := (f_1,\dots,f_M,\dots,f_{M+L}), \quad h := (h_1,\dots,h_M).$$

Теорема 2.7. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_3)$ *і*

$$a_i^- - g_i^{2,+} > 0, \quad b_j^- - g^{2,+}_{M+j} > 0 \quad (i = 1,\dots,M;\ j = 1,\dots,L). \tag{2.98}$$

Припустимо, що w^1, w^2 *– розв'язки задач, що відрізняються від задачі (2.91)–(2.94) тільки тим, що замість* f, h *стоять* f^1, h^1 *та* f^2, h^2 *відповідно з такими ж властивостями, які вказані для* f, h *відповідно в умові* $(\mathcal{A}_4)$. *Тоді виконуються нерівності*

$$\min\Big\{\frac{1}{a_i^- - g_i^{2,+}} \inf_{(y,s)\in Q}\big(f_i^1(y,s) - f_i^2(y,s)\big),\ \inf_{(y,s)\in\Sigma}\big(h_i^1(y,s) - h_i^2(y,s)\big), 0\Big\} \le$$

$$\le u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t) \le$$

$$\le \max\Big\{\frac{1}{a_i^- - g_i^{2,+}} \sup_{(y,s)\in Q}\big(f_i^1(y,s) - f_i^2(y,s)\big),\ \sup_{(y,s)\in\Sigma}\big(h_i^1(y,s) - h_i^2(y,s)\big), 0\Big\},$$

$$(x,t) \in Q, \quad i \in \{1,\dots,M\}, \tag{2.99}$$

$$\min\Big\{\frac{1}{b_j^- - g_{M+j}^{2,+}}\inf_{(y,s)\in\widetilde{Q}}\big(f_{M+j}^1(y,s)-f_{M+j}^2(y,s)\big),0\Big\}\le v_j^1(x,t)-v_j^2(x,t)\le$$
$$\le\max\Big\{\frac{1}{b_j^- - g_{M+j}^{2,+}}\sup_{(y,s)\in\widetilde{Q}}\big(f_{M+j}^1(y,s)-f_{M+j}^2(y,s)\big),0\Big\},$$
$$(x,t)\in\widetilde{Q},\quad j\in\{1,\dots,L\}. \tag{2.100}$$

Наслідок 2.11. *Нехай виконуються умови теореми 2.7 і, крім того,*

$$f_r^1(x,t)\le f_r^2(x,t)\quad\forall(x,t)\in Q\quad(r=1,\dots,M+L),$$
$$h_i^1(x,t)\le h_i^2(x,t)\quad\forall(x,t)\in\Sigma\quad(i=1,\dots,M).$$

Тоді правильна нерівність $w_r^1(x,t)\le w_r^2(x,t)\ \ \forall(x,t)\in Q\ \ (r=1,\dots,M+L)$.

Наслідок 2.12. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$*–*$(\mathcal{A}_4)$ *і (2.98). Тоді для розв'язку* $w=(u_1,...,u_M;\ v_1,...,v_L)$ *задачі (2.91)–(2.94) правильна оцінка*

$$\forall i\in\{1,\dots,M\}:\quad \min\Big\{\frac{1}{a_i^- - g_i^{2,+}}\inf_{(y,s)\in Q}f_i(y,s),\inf_{(y,s)\in\Sigma}h_i(y,s),0\Big\}\le$$
$$\le u_i(x,t)\le\max\Big\{\frac{1}{a_i^- - g_i^{2,+}}\sup_{(y,s)\in Q}f_i(y,s),\sup_{(y,s)\in\Sigma}h_i(y,s),0\Big\},\quad(x,t)\in Q, \tag{2.101}$$

$$\forall j\in\{1,\dots,L\}:\quad \min\Big\{\frac{1}{b_j^- - g_{M+j}^{2,+}}\inf_{(y,s)\in\widetilde{Q}}f_{M+j}(y,s),0\Big\}$$
$$\le v_j(x,t)\le\max\Big\{\frac{1}{b_j^- - g_{M+j}^{2,+}}\sup_{(y,s)\in\widetilde{Q}}f_{M+j}(y,s),0\Big\},\quad(x,t)\in\widetilde{Q}. \tag{2.102}$$

Наслідок 2.13. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$*–*$(\mathcal{A}_4)$ *і (2.98). Тоді задача (2.91)–(2.94) має не більше одного розв'язку.*

Далі використовуватимемо простори $C_{\rm loc}^{\alpha,\alpha/2}(Q)$, $C_{\rm loc}^{\alpha,\alpha/2}(\widetilde{Q})$, $C_{\rm loc}^{\alpha,\alpha/2}(\Sigma)$, $C_{\rm loc}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q)$, які введені в п.2.3.1.

Під $C_{\rm loc}^{\alpha,1+\alpha/2}(\widetilde{Q})$ розумітимемо простір функцій $v\in C^{0,1}(\widetilde{Q})$ таких, що v,v_t належать простору $C_{\rm loc}^{\alpha,\alpha/2}(\widetilde{Q})$.

Через $C_{\rm loc}^{\alpha,\alpha/2,1,1}(\overline{\Omega}\times(0,T]\times\mathbb{R}^{M+L}\times\mathbb{R}^{M+L})$ позначатимемо простір неперервних функцій $\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta)\in\overline{\Omega}\times(0,T]\times\mathbb{R}^{M+L}\times\mathbb{R}^{M+L}$, кожна з яких є неперервно диференційовною за змінними ξ,η та для будь-якого $\delta\in(0,T)$ існує стала $L>0$ така, що для всіх $(x,t),(x',t')\in\overline{\Omega}\times[\delta,T]$, $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{M+L}\times\mathbb{R}^{M+L}$ виконується нерівність

$$|\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta)-\widetilde{g}(x',t',\xi,\eta)|\le L(|x-y|^\alpha+|t-s|^{\alpha/2}).$$

Теорема 2.8. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_4)$ *і* (2.98). *Припустимо, що для деякого* $\alpha \in (0,1]$ *маємо*

$(\mathcal{B}_1)$ $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$,

$(\mathcal{B}_2)$ $p_i,\, a_{i,kl},\, a_{i,k},\, a_i,\, q_j,\, b_j \in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\widetilde{Q})$, $g_r \in C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{loc}(\overline{\Omega} \times (0,T] \times \mathbb{R}^{M+L} \times \mathbb{R}^{M+L})$, $f_r \in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\widetilde{Q})$, $h_i \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(\Sigma)$ $(r = 1,\dots,M+L;\ i = 1,\dots,M;\ j = 1,\dots,L)$.

Крім того, нехай

$(\mathcal{B}_3)$ $\partial a_{i,kl}/\partial x_r \in C(Q)$ $(k,l,r = 1,\dots,n;\ i = 1,\dots,M)$,

$(\mathcal{B}_4)$ $\tau_s \in Lip_{loc}((0,T])\,(s = 1,\dots,M+L)$, $\inf\limits_{t\in(0,T]} \mu_i(t) > 0$ $(i = 1,\dots,M)$.

Тоді існує єдиний розв'язок $w = (u_1,\dots,u_M; v_1,\dots,v_L)$ *задачі* (2.91)–(2.94), *для нього правильні включення* $u_i \in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\widetilde{Q}) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$, $v_j \in C^{\alpha,\alpha/2}(\widetilde{Q}) \cap C^{\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(\widetilde{Q})$ $(i = 1,\dots,M;\ j = 1,\dots,L)$ *та оцінки (2.101), (2.102).*

Обґрунтування результатів цього підрозділу проводиться подібним чином, як це зроблено в підрозділі 2.3. Повне доведення цих результатів наведено в додатку А.

2.5 Задача Фур'є для параболічних рівнянь із локальним змінним запізненням

2.5.1 Формулювання задачі та основних результатів підрозділу

Нехай $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\overline{Q} := \overline{\Omega} \times S$, $\Sigma := \partial\Omega \times S$.

Розглянемо ***задачу***: знайти функцію $u \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$, яка задовольняє рівняння

$$Pu(x,t) := u_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t) u_{x_k x_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t) u_{x_k}(x,t) +$$

$$+ a_0(x,t)u(x,t) - g\big(x,t,u(x,t),u(x,t-\tau(t))\big) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad (2.103)$$

крайову умову

$$u(x,t) = h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \qquad (2.104)$$

і аналог початкової умови

$$\overline{\lim_{t\to-\infty}} ||u(\cdot,t)||_{C(\overline{\Omega})} < \infty, \tag{2.105}$$

де $\tau \in C(S)$, $\tau(t) \geq 0$ $\forall t \in S$, $\sup\limits_{t\in S} \tau(t) < \infty$.

Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (2.103)–(2.105).

На вихідні дані задачі (2.103)–(2.105) накладаємо такі обмеження:

$(\mathcal{A}_1)$ a_{kl}, a_k, $a_0 \in C(Q)$, $a_{kl} = a_{lk}$ $(k,l = \overline{1,n})$, існує стала $\nu \geq 0$ така, що

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)\xi_k\xi_l \geq \mu(t) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \quad \forall (x,t) \in Q,\ \forall \xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{R},$$

де $\mu(t) \geq 0$ $\forall t \in S$;

$(\mathcal{A}_2)$ $g(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in \Omega \times S \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, – неперервна за усіма змінними і неперервно диференційовна за змінними ξ та η функція, причому існують функції $g_1, g_2 : Q \to \mathbb{R}$ такі, що

$$0 \leq g_\xi(x,t,\xi,\eta) \leq g_1(x,t),\ \ 0 \leq g_\eta(x,t,\xi,\eta) \leq g_2(x,t)\ \forall (x,t) \in Q,\ \forall \xi,\eta \in \mathbb{R},$$

$$\inf_{(x,t)\in Q} (a_0(x,t) - g_1(x,t)) =: a_0^- > 0, \qquad \sup_{(x,t)\in Q} g_2(x,t) =: g_2^+ < \infty,$$

крім того, $g(x,t,0,0) = 0$, $(x,t) \in Q$;

$(\mathcal{A}_3)$ $f \in C(Q)$, $h \in C(\Sigma)$ – обмежені функції.

Теорема 2.9. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_2)$ *і*

$$a_0^- - g_2^+ > 0. \tag{2.106}$$

Припустимо, що u_1, u_2 *– розв'язки задач, що відрізняються від задачі* (2.103)–(2.105) *тільки тим, що замість* f, h *стоять* f_1, h_1 *та* f_2, h_2 *відповідно з такими ж властивостями, які вказані для* f, h *відповідно в умові* $(\mathcal{A}_3)$. *Тоді виконуються нерівності*

$$\min\left\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+} \inf_{(y,s)\in Q} (f_1(y,s) - f_2(y,s)),\ \inf_{(y,s)\in\Sigma} (h_1(y,s) - h_2(y,s)), 0\right\} \leq$$
$$\leq u_1(x,t) - u_2(x,t) \leq$$
$$\leq \max\left\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s)\in Q} (f_1(y,s) - f_2(y,s)),\ \sup_{(y,s)\in\Sigma} (h_1(y,s) - h_2(y,s)), 0\right\},$$
$$(x,t) \in Q. \tag{2.107}$$

Зауважимо, що з цієї теореми безпосередньо випливає неперервна залежність розв'язку задачі (2.103)–(2.105) від вихідних даних.

Наслідок 2.14. *Нехай виконуються умови теореми 2.9 і, крім того,* $f_1(x,t) \le f_2(x,t)\ \ \forall (x,t) \in Q,\ \ h_1(x,t) \le h_2(x,t)\ \ \forall (x,t) \in \Sigma$. *Тоді правильна нерівність* $u_1(x,t) \le u_2(x,t)\ \ \forall (x,t) \in Q$.

Наслідок 2.15. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$ *і* (2.106) *Тоді, для розв'язку задачі* (2.103)–(2.105) *правильна оцінка*

$$\min\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+} \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s),\ \inf_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\} \le u(x,t) \le$$
$$\le \max\{\frac{1}{a_0^- - g_2^+} \sup_{(y,s)\in Q} f(y,s),\ \sup_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\}, \quad (x,t) \in Q. \tag{2.108}$$

Наслідок 2.16. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$ *і* (2.106). *Тоді задача* (2.103)–(2.105) *має не більше одного розв'язку.*

Згідно з означеннями пункту 2.1.1, під $C^{\alpha,\alpha/2}_{\rm loc}(Q)$ розумітимемо простір функцій $v \in C(Q)$ таких, що для строго внутрішньої підобласті Ω' області Ω (тобто, $\overline{\Omega'} \subset \Omega$) та будь-якого числа $t^* \in (-\infty, 0)$ звуження v на $\overline{\Omega'} \times [t^*, 0]$ належить до простору $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega'} \times [t^*, 0])$, а під $C^{\alpha,\alpha/2}_{\rm loc}(\overline{Q})$ (відповідно, $C^{\alpha,\alpha/2}_{\rm loc}(\Sigma)$) – простір функцій $v \in C(\overline{Q})$ (відповідно, $v \in C(\Sigma)$) таких, що будь-якого числа $t^* \in (-\infty, 0)$ звуження v на $\overline{\Omega} \times [t^*, 0]$ (відповідно, звуження v на $\partial\Omega \times [t^*, 0]$) належить простору $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times [t^*, 0])$ (відповідно, $C^{\alpha,\alpha/2}(\partial\Omega \times [t^*, 0])$).

Під $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\rm loc}(Q)$ розумітимемо простір функцій $v \in C^{2,1}(Q)$ таких, що їх похідні v_{x_k}, $v_{x_k x_l}$ $(k, l = \overline{1,n})$, v_t належать простору $C^{\alpha,\alpha/2}_{\rm loc}(Q)$.

Через $C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{\rm loc}(\overline{\Omega} \times S \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ позначатимемо простір неперервних функцій $\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in \overline{\Omega} \times S \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, кожна з яких є неперервно диференційовною за змінними ξ, η та для будь-яких чисел $t^* \in (-\infty, 0)$, $q_1, q_2 > 0$ існують сталі $L_k = L_k(\widetilde{g}, t^*, q_1, q_2) > 0$ $(k = \overline{1,3})$ такі, що виконуються нерівності

$$|\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta) - \widetilde{g}(y,s,\xi,\eta)| \le L_1(|x-y|^\alpha + |t-s|^{\alpha/2}),$$

$$|\widetilde{g}_\xi(x,t,\xi,\eta)| \le L_2, \qquad |\widetilde{g}_\eta(x,t,\xi,\eta)| \le L_3$$

для довільних $(x,t,\xi,\eta),(y,s,\xi,\eta)$ з $\overline{\Omega}\times[t^*,0]\times[-q_1,q_1]\times[-q_2,q_2]$.

Позначимо через $C^{\alpha/2}_{\rm loc}(S)$ простір функцій $v(t)$, $t\in S$, таких, що для будь-якого числа $t^*\in(-\infty,0)$ звуження v на $[t^*,0]$ належить простору $C^{\alpha/2}([t^*,0])$.

Теорема 2.10. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$ *і* (2.106). *Припустимо, що для деякого* $\alpha\in(0,1]$ *маємо*

$(\mathcal{B}_1)$ $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$,

$(\mathcal{B}_2)$ $a_{kl},\,a_k,\,a_0\in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\overline{Q})$ $(k,l=\overline{1,n})$, $g\in C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{loc}(\overline{\Omega}\times S\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $f\in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\overline{Q})$, $h\in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\overline{\Sigma})$.

Крім того, нехай

$(\mathcal{B}_3)$ $\partial a_{kl}/\partial x_s\in C(Q)$ $(k,l,s=\overline{1,n})$,

$(\mathcal{B}_4)$ $\tau\in Lip_{loc}(S)$, $\inf\limits_{t\in[t_*,0]}\mu(t)>0$ $\forall t_*\in S$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2.103)–(2.105), *він належить простору* $C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\overline{Q})\cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$ *і задовольняє оцінки* (2.15).

2.5.2 Обґрунтування основних результатів підрозділу

Зробимо в задачі (2.103)–(2.105) заміну змінних:

$$t=\ln z,\quad z\in(0,1],\ t\in S. \tag{2.109}$$

Нехай

$$\widetilde{u}(x,z)=u(x,t)|_{t=\ln z},\quad (x,z)\in\widehat{Q}:=\Omega\times(0,1],\ (x,t)\in Q.$$

Тоді $u_t=\widetilde{u}_z z$, $u_{x_k}=\widetilde{u}_{x_k}$, $u_{x_kx_l}=\widetilde{u}_{x_kx_l}$ $(k,l=\overline{1,n})$,

$$u(x,t-\tau(t))=u(x,\ln z-\tau(\ln z))=u\big(x,\ln ze^{-\tau(\ln z)}\big)=$$
$$=\widetilde{u}\big(x,ze^{-\tau(\ln z)}\big)=\widetilde{u}(x,z-\widetilde{\tau}(z)),\quad (x,t)\in Q,\ (x,z)\in\widehat{Q},$$

де $\widetilde{\tau}(z):=z(1-e^{-\tau(\ln z)})$ $\forall z\in(0,1]$. Очевидно, що $\widetilde{\tau}$ є неперервною невід'ємною функцією на $(0,1]$ і $\int\limits_{z-\widetilde{\tau}(z)}^{z}\frac{ds}{s}=\ln s|_{z-\widetilde{\tau}(z)}^{z}=\ln\frac{z}{z-\widetilde{\tau}(z)}=\tau(\ln z)$, а отже, оскільки функція τ – обмежена, то маємо

$$\sup_{z\in(0,1]}\int\limits_{z-\widetilde{\tau}(z)}^{z}\frac{ds}{s}<\infty. \tag{2.110}$$

Отож, в результаті заміни змінних (2.109) приходимо до задачі

$$\widetilde{p}(x,z)\widetilde{u}_z(x,z) - \sum_{k,l=1}^{n} \widetilde{a}_{kl}(x,z)\widetilde{u}_{x_k x_l}(x,z) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_k(x,z)\widetilde{u}_{x_k}(x,z) +$$

$$+\widetilde{a}_0(x,z)\widetilde{u}(x,z) - \widetilde{g}\big(x,z,\widetilde{u}(x,z),\widetilde{u}(x,z-\widetilde{\tau}(z))\big) = \widetilde{f}(x,z), \quad (x,z) \in \widehat{Q}, \quad (2.111)$$

$$\widetilde{u}(x,z) = \widetilde{h}(x,z), \quad (x,z) \in \widehat{\Sigma}, \quad (2.112)$$

$$\overline{\lim_{z\to+0}} ||\widetilde{u}(\cdot,z)||_{C(\overline{\Omega})} < \infty, \quad (2.113)$$

де $\widetilde{p}(x,z) := z \ \ \forall (x,z) \in \widehat{Q}$, а $\widetilde{a}_{kl}, \widetilde{a}_k, \widetilde{a}_0, \widetilde{g}, \widetilde{f}, \widetilde{h}$ – функції, отримані з функцій $a_{kl}, a_k, a_0, g, f, h$ відповідно при заміні змінних (2.109).

Легко переконатися, що задача (2.111)–(2.113) є аналогічна до задачі (2.43)–(2.45). Справді, якщо у формулюванні задачі (2.111)–(2.113) забрати символ "$\sim$" і поміняти z на t, то отримаємо в точності задачу (2.43)–(2.45). Легко переконатися, враховуючи (2.110), що вихідні дані задачі (2.111)–(2.113) задовольняють умови, які співпадають з умовами $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{G})$, $(\mathcal{F})$ підрозділу 2.3 при відповідній заміні символів, зокрема, $\varphi(t)$ треба замінити на $1/z$ $(t \in S,\ z \in (0,1])$. Звідси і результатів підрозділу 2.3 випливають всі наші твердження.

Висновки до розділу 2

У розділі 2 досліджено мішані задачі для півлінійних параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь з локальним змінним запізненням, задачі без початкових умов для півлінійних параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь із виродженням в початковий момент часу та з локальним змінним запізненням, а також задачі Фур'є для півлінійних параболічних рівнянь з локальним змінним запізненням. Також отримано апріорні оцінки розв'язків цих задач.

Розділ 3

Узагальнені розв'язки задач для слабко нелінійних параболічних рівнянь із нелокальним змінним запізненням

У цьому розділі встановлено коректну розв'язність мішаної задачі та задачі Фур'є для слабко нелінійних параболічних рівнянь зі змінним інтегральним запізненням. Також отримано апріорні оцінки розв'язків цих задач.

На відміну від попереднього розділу, де досліджувались класичні роз'язки задач для параболічних рівнянь з локальним змінним запізненням, тут досліджуються узагальнені розв'язки задач для параболічних рівнянь з нелокальним змінним запізненням.

Матеріали розділу викладено в працях [37], [63].

3.1 Мішана задача для параболічних рівнянь із нелокальним змінним запізненням

3.1.1 Основні позначення та допоміжні факти

Нехай $Q := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0,T)$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0,T)$.

Введемо потрібні нам функційні простори. Позначимо через $H^1(\Omega)$ простір функцій $v \in L^2(\Omega)$ таких що $v_{x_i} \in L^2(\Omega)$ $(i = \overline{1,n})$, зі скалярним добутком $(v,w)_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \big(v\,w + \sum\limits_{i=1}^{n} v_{x_i} w_{x_i}\big)dx$ і нормою $||v||_{H^1(\Omega)} := \Big(||v||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} ||v_{x_i}||^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}$. Нехай $\widetilde{H}^1(\Omega)$ замикання простору $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega}) := \big\{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\big\}$ в $H^1(\Omega)$. Зокрема, коли $\Gamma_1 = \emptyset$, то писатимемо $H^1_0(\Omega)$ замість $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Відомо, що $H^1_0(\Omega)$ співпадає із замиканням простору нескінченно диференційовних на Ω функцій з компактним носієм $C^\infty_c(\Omega)$

в $H^1(\Omega)$.

Введемо простір $L^2(0,T;\widetilde{H}^1(\Omega))$ вимірних функцій $w:(0,T)\to\widetilde{H}^1(\Omega)$ таких, що $t\mapsto||w(t)||_{\widetilde{H}^1(\Omega)}\in L^2(0,T)$.

Позначимо через $F_2(Q)$ простір вектор-функцій $(f_0,f_1,...,f_n)\in[L^2(Q)]^{1+n}$ таких, що $f_i\in L^2(Q)$ і $f_i=0$ майже скрізь у деякому околі поверхні Σ_1 для кожного $i\in\{1,...,n\},$.

Через $C_c^1(0,T)$ позначимо підпростір простору $C^1(0,T)$, елементи якого мають компактний носій. Також введемо простір $C([t_1,t_2];L^2(\Omega))$ неперервних функцій $w:[t_1,t_2]\to L^2(\Omega)$ $(t_1,t_2\in\mathbb{R},\ t_1<t_2)$.

3.1.2 Формулювання задачі та результатів підрозділу

Розглянемо ***задачу***: знайти функцію $u:\overline{\Omega}\times[-\tau_0,T]\to\mathbb{R}$, що задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t-\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}a_i(x,t,u,\nabla u)+a_0(x,t,u,\nabla u)+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(x,t,s,u(x,s))ds=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\big(f_i(x,t)\big)_{x_i}+f_0(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{3.1}$$

крайові умови

$$u\Big|_{\Sigma_0}=0,\qquad \sum_{i=1}^{n}a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i\Big|_{\Sigma_1}=0, \tag{3.2}$$

та початкову умову

$$u(x,t)=u_0(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Omega}\times[-\tau_0,0], \tag{3.3}$$

де $\tau:[0,T]\to\mathbb{R}$ – неперервна функція така, що $\tau(t)\geq 0$ для всіх $t\in[0,T]$, $\tau_0:=-\min\limits_{t\in[0,T]}(t-\tau(t))$ (вважаємо, що $[-0,0]=\{0\}$), $\tau^+:=\max\limits_{t\in[0,T]}\tau(t)$, а $a_i:Q\times\mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{R}$, $c:Q\times(-\tau_0,T)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_i:Q\to\mathbb{R}$ $(i=\overline{0,n})$, $u_0:\overline{\Omega}\times[-\tau_0,0]\to\mathbb{R}$ – задані дійснозначні функції з відповідних класів вихідних даних.

Введемо класи вихідних даних.

Нехай $\mathcal{A}$ – множина наборів $(a_0,a_1,...,a_n)$ функцій $a_i(x,t,\rho,\xi)$, $(x,t,\rho,\xi)\in Q\times\mathbb{R}^{1+n}$ $(i=0,1,...,n)$, які задовольняють такі умови:

($\mathcal{A}_1$) для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ функція a_i – каратеодорівська, тобто, $a_i(x, t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ – неперервна функція для майже всіх $(x, t) \in Q$, $a_i(\cdot, \cdot, \rho, \xi) : Q \to \mathbb{R}$ – вимірна функція для всіх $(\rho, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$;

($\mathcal{A}_2$) для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, майже всіх $(x, t) \in Q$ та всіх $(\rho, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$|a_i(x, t, \rho, \xi)| \leq C_1\big(|\rho| + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|\big) + h_i(x, t),$$

де $C_1 = \text{const} > 0$, $h_i \in L^2(Q)$;

($\mathcal{A}_3$) для майже всіх $(x, t) \in Q$ та всіх (ρ_1, ξ^1), $(\rho_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x, t, \rho_1, \xi^1) - a_i(x, t, \rho_2, \xi^2)\big)(\xi_i^1 - \xi_i^2) +$$

$$+\big(a_0(x, t, \rho_1, \xi^1) - a_0(x, t, \rho_2, \xi^2)\big)(\rho_1 - \rho_2) \geq -K_0|\rho_1 - \rho_2|^2, \qquad (3.4)$$

де $K_0 = \text{const} \geq 0$;

($\mathcal{A}_4$) для майже всіх $(x, t) \in Q$ та всіх $(\rho, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ маємо

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, t, \rho, \xi)\xi_i + a_0(x, t, \rho, \xi)\rho \geq K_1 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 - K_2|\rho|^2 - g(x, t),$$

де $K_1 = \text{const} > 0, K_2 = \text{const} \geq 0$, $0 \leq g \in L^1(Q)$.

Через $\mathcal{C}$ позначимо множину функцій $c(x, t, s, \rho)$, $(x, t, s, \rho) \in Q \times (-\tau_0, T) \times \mathbb{R}$, таких, що

($\mathcal{C}_1$) c є каратеодорівською функцією, тобто $c(x, t, s, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – неперервна функція для майже всіх $(x, t, s) \in Q \times (-\tau_0, T)$, а $c(\cdot, \cdot, \cdot, \rho) : Q \times (-\tau_0, T) \to \mathbb{R}$ – вимірна для всіх $\rho \in \mathbb{R}$; $c(x, t, s, 0) = 0$ для майже всіх $(x, t, s) \in Q \times (-\tau_0, T)$;

($\mathcal{C}_2$) ля майже всіх $(x, t, s) \in Q \times (-\tau_0, T)$ та всіх ρ_1, $\rho_2 \in \mathbb{R}$ правильна нерівність

$$\big|c(x, t, s, \rho_1) - c(x, t, s, \rho_2)\big| \leq L|\rho_1 - \rho_2|, \qquad (3.5)$$

де $L = \text{const} > 0$.

Зауваження 3.1. *З умови* $c(x,t,s,0)=0$ *та* $(\mathcal{C}_2)$ *випливає, що для майже всіх* $(x,t,s)\in Q\times(-\tau_0,T)$ *та всіх* $\rho\in\mathbb{R}$ *справедлива оцінка*

$$|c(x,t,s,\rho)|\le L|\rho|. \tag{3.6}$$

Тепер можемо дати означення узагальненого розв'язку задачі (3.1)–(3.3).

Означення 3.1. *Нехай* $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{A}$, $c\in\mathcal{C}$, $(f_0,f_1,\dots,f_n)\in F_2(Q)$, $u_0\in C([-\tau_0,0];L^2(\Omega))$. *Узагальненим розв'язком задачі (3.1)–(3.3) називаємо функцію* $u\in L^2(0,T;\widetilde{H}^1(\Omega))\cap C\left([-\tau_0,T];L^2(\Omega)\right)$ *таку, що задовольняє початкову умову*

$$||u(\cdot,t)-u_0(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)}=0 \qquad \forall t\in[-\tau_0,0], \tag{3.7}$$

та інтегральну тотожність

$$\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u)v_{x_i}\varphi+a_0(x,t,u,\nabla u)v\varphi+v\varphi\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(x,t,s,u(x,s))\,ds-$$

$$-uv\varphi'\Big\}\,dxdt=\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^n f_iv_{x_i}\varphi+f_0v\varphi\Big\}\,dxdt \tag{3.8}$$

для кожних $v\in\widetilde{H}^1(\Omega)$ *та* $\varphi\in C_c^1(0,T)$.

Теорема 3.1. *Нехай* $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{A}$, $c\in\mathcal{C}$, $(f_0,f_1,\dots,f_n)\in F_2(Q)$, $u_0\in C([-\tau_0,0];L^2(\Omega))$. *Тоді задача (3.1)–(3.3) має єдиний узагальнений розв'язок і він задовольняє оцінку*

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_\Omega|u(x,t)|^2\,dx+\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}\right|^2+|u|^2\Big\}\,dxdt\le$$

$$\le C_2\Bigg(\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^n\left|f_i\right|^2+g\Big\}\,dxdt+\max_{t\in[-\tau_0,0]}\int\limits_\Omega|u_0(x,t)|^2\,dxdt\Bigg), \tag{3.9}$$

де C_2 *– додатна стала, що залежить тільки від* $K_1,K_2,\ L,\ \tau_0,T$.

3.1.3 Доведення основних результатів підрозділу

Далі використовуватимемо таке допоміжне твердження, що доведене в [33].

Лема 3.1. *Нехай* $w \in L^2(0,T;\widetilde{H}^1(\Omega))$ *задовольняє тотожність*

$$\iint\limits_Q \left\{ \sum_{i=1}^n g_i v_{x_i}\varphi + g_0 v\varphi - wv\varphi' \right\} dxdt = 0, \quad v \in \widetilde{H}^1(\Omega),\ \varphi \in C_0^1(0,T), \tag{3.10}$$

для деяких $g_j \in L^2(Q)$ $(j = \overline{0,n})$. *Тоді* $w \in C([0,T];L^2(\Omega))$ *і для будь-яких* $\theta \in C^1([0,T])$, $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ *та* $t_1, t_2 \in [0,T]$ $(t_1 < t_2)$ *маємо*

$$\theta(t_2)\int\limits_\Omega w(x,t_2)v(x)\,dx - \theta(t_1)\int\limits_\Omega w(x,t_1)v(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n g_i v_{x_i}\theta + g_0 v\theta - wv\theta' \right\} dxdt = 0, \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{2}\theta(t_2)\int\limits_\Omega |w(x,t_2)|^2\,dx - \frac{1}{2}\theta(t_1)\int\limits_\Omega |w(x,t_1)|^2\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega |w|^2\theta'\,dxdt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n g_i w_{x_i} + g_0 w \right\}\theta\,dxdt = 0. \tag{3.12}$$

Доведення теореми 3.1. Для функції $w : Q \to \mathbb{R}$ позначимо

$$a_j(w)(x,t) := a_j(x,t,w(x,t),\nabla w(x,t)), \quad (x,t) \in Q, \quad j = \overline{0,n},$$

$$c(w)(x,t,s) := c(x,t,s,w(x,s)), \quad (x,t,s) \in Q \times (-\tau_0, T).$$

Розіб'ємо доведення теореми 3.1 на три етапи: спершу доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (3.1)–(3.3), потім його існування та оцінку (3.9).

Перший крок (єдиність розв'язку). Припустимо супротивне. Нехай u_1 та u_2 – два різні узагальнені розв'язки задачі (3.1)–(3.3). Розглянемо різницю (3.8) з $u = u_2$ та (3.8) з $u = u_1$. З отриманої інтегральної тотожності, використовуючи лему 3.1 з $w = u_1 - u_2$, $\theta = e^{-\lambda t}$ (λ – поки що довільна додатна стала), $t_1 = 0$, $t_2 = T$, здобуваємо (див. (3.12))

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda T}\int\limits_\Omega |w(x,T)|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\iint\limits_Q |w|^2 e^{-\lambda t} dxdt + \iint\limits_Q \Bigg\{ \sum_{i=1}^n (a_i(u_1) - a_i(u_2))(u_{1,x_i} - u_{2,x_i}) +$$

$$+(a_0(u_1) - a_0(u_2))(u_1 - u_2) + w(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} [c(u_1)(x,t,s) - c(u_2)(x,t,s)]ds \Bigg\} e^{-\lambda t} dxdt = 0. \tag{3.13}$$

З умови $(\mathcal{A}_3)$ маємо

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(u_1)-a_i(u_2))(u_{1,x_i}-u_{2,x_i})+(a_0(u_1)-a_0(u_2))(u_1-u_2)\geq -K_0|u_1-u_2|^2. \tag{3.14}$$

Продовжимо $w(x,t)$ нулем для майже всіх $(x,t)\in\Omega\times[-\tau_0,0]$. Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$, теорему Фубіні (див., наприклад, [43, с.91]) та нерівність Гельдера (див., наприклад, [43, с.92]) одержуємо

$$\Big|\iint\limits_Q w(x,t)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}[c(u_1)(x,t,s)-c(u_2)(x,t,s)]\,ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\Big|\leq$$

$$\leq\iint\limits_Q |w(x,t)|\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}|c(u_1)(x,t,s)-c(u_2)(x,t,s)|\,ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\leq$$

$$\leq L\int\limits_\Omega dx\int\limits_0^T|w(x,t)|\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}|w(x,s)|ds\Big)e^{-\lambda t}dt\leq$$

$$\leq L\int\limits_\Omega dx\int\limits_0^T|w(x,t)|e^{-\frac{\lambda t}{2}}\Big(e^{-\frac{\lambda t}{2}}\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|\,ds\Big)dt\leq$$

$$\leq L\sqrt{\tau^+}\int\limits_\Omega\left[\Big(\int\limits_0^T|w(x,t)|^2e^{-\lambda t}dt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^T e^{-\lambda t}dt\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|^2ds\Big)^{1/2}\right]dx. \tag{3.15}$$

Тепер розглянемо другий інтеграл правої частини нерівності (3.15). Змінюючи порядок інтегрування, для майже всіх $x\in\Omega$ маємо

$$\int\limits_0^T e^{-\lambda t}dt\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|^2ds\leq\int\limits_{-\tau^+}^{T}|w(x,s)|^2ds\int\limits_s^{s+\tau^+}e^{-\lambda t}dt=$$

$$=\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})\int\limits_0^T|w(x,s)|^2e^{-\lambda s}ds.$$

Підставивши в (3.15) останній член з отриманого вище співвідношення замість першого, отримаємо

$$\Big|\iint\limits_Q w(x,t)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\big[c(u_1)(x,t,s)-c(u_2)(x,t,s)\big]\,ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\Big|\leq$$

$$\leq L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\iint\limits_Q |w(x,t)|^2 e^{-\lambda t}dxdt. \tag{3.16}$$

Використовуючи (3.14), (3.16), з (3.13) отримуємо

$$\Big(\lambda/2 - K_0 - L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\Big)\iint\limits_Q |w(x,t)|^2 e^{-\lambda t}dtdx \leq 0. \tag{3.17}$$

Вибравши λ таке, що $\lambda/2 - K_0 - L\sqrt{\lambda^{-1}\tau^+(1-e^{-\lambda\tau^+})} > 0$, з (3.17) одержуємо рівність $u_1 = u_2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, що суперечить нашому припущенню. Отож, узагальнений розв'язок задачі (3.1)–(3.3) єдиний.

Другий крок (існування розв'язку). Для доведення існування розв'язку задачі (3.1)-(3.3) використаємо метод Гальоркіна. Нехай $\{w_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ – повна лінійно незалежна система функцій з $\widetilde{H}^1(\Omega)$, що є ортонормованою базою в $L^2(\Omega)$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$, покладемо

$$\alpha_k(t) := \int\limits_\Omega u_0(x,t)w_k(x)dx, \quad t \in [-\tau_0, 0]. \tag{3.18}$$

Очевидно, що $\alpha_k \in C([-\tau_0, 0])$ $(k \in \mathbb{N})$.

Для всіх $m \in \mathbb{N}$ позначимо

$$u_{0,m}(x,t) := \sum_{k=1}^m \alpha_k(t)w_k(x), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0]. \tag{3.19}$$

Очевидно, що

$$\max_{t\in[-\tau_0,0]} ||u_0(\cdot,t) - u_{0,m}(\cdot,t)||_{L^2(\Omega)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.20}$$

Згідно з методом Гальоркіна для кожного $m \in \mathbb{N}$ покладемо

$$u_m(x,t) := \sum_{k=1}^m c_{m,k}(t)w_k(x), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\tau_0, T], \tag{3.21}$$

де $c_{m,1}, \ldots, c_{m,m}$ – неперервні на $[-\tau_0, T]$ та абсолютно неперервні на $[0, T]$ функції, які є розв'язком задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь із запізненням

$$\int\limits_\Omega u_{m,t}w_j\, dx + \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n (a_i(u_m) - f_i)w_{j,x_i} + (a_0(u_m) - f_0)w_j +$$

$$+w_j(x)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)(x,t,s)ds\Big\}\,dx=0,\quad t\in[0,T],\quad j=\overline{1,m}, \tag{3.22}$$

$$c_{m,k}(t)=\alpha_k(t),\quad t\in[-\tau_0,0],\ k=\overline{1,m}. \tag{3.23}$$

Зауважимо, що з (3.19), (3.21) та (3.23) випливає, що

$$u_m(x,t)=u_{0,m}(x,t)\quad \text{для майже всіх } (x,t)\in\overline{\Omega}\times[-\tau_0,0]. \tag{3.24}$$

З лінійної незалежності функцій $w_1,\ldots,w_m$ випливає, що матриця $\Big(\int\limits_{\Omega} w_k w_j dx\Big)_{k,j=1}^{m}$ – оборотна. Отож, система звичайних диференціальних рівнянь із запізненням (3.22) може бути записана в нормальній формі. Згідно з теоремою існування і продовження розв'язку задачі Коші для нормальної системи звичайних диверенціальних рівнянь (див. [9, с. 31], [48, с. 54]) отримуємо глобальний розв'язок $c_{1,m},\ldots.,c_{m,m}$ задачі (3.22), (3.23). Цей розв'якок визначений на інтервалі $[-\tau_0,T_m\rangle$, де $0<T_m\le T$. Тут "$\rangle$" означає або "$)$", або "$]$". Далі здобудемо оцінку, з якої випливає рівність $[-\tau_0,T_m\rangle=[-\tau_0,T]$.

Тепер отримаємо оцінки u_m для кожного $m\in\mathbb{N}$. Домножимо рівняння з номером $j\in\{1,\ldots,m\}$ системи (3.22) на $c_{m,j}e^{-\lambda t}$, де $\lambda>0$ – додатне число, та підсумуємо по $j\in\{1,\ldots,m\}$. Проінтегрувавши отриману рівність по $t\in[0,\sigma]$, де $\sigma\in[0,T_m\rangle$, та використавши формулу інтегрування частинами і рівність (3.24), отримаємо

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda\sigma}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\sigma)|^2\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_{0,m}(x,0)|^2\,dx+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\sigma}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt+$$

$$+\int\limits_0^{\sigma}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n}a_i(u_m)u_{m,x_i}+a_0(u_m)u_m+u_m(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u_m)(x,t,s)ds\Big\}e^{-\lambda t}dxdt=$$

$$=\int\limits_0^{\sigma}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n}f_iu_{m,x_i}+f_0u_m\Big\}e^{-\lambda t}dxdt. \tag{3.25}$$

Далі нам буде потрібна нерівність Коші у вигляді

$$2ab\le\varepsilon|a|^2+(4\varepsilon)^{-1}|b|^2,\quad a,b\in\mathbb{R},\quad \varepsilon>0. \tag{3.26}$$

Поклавши $u_m(x,t)=0$ для всіх $(x,t)\in\Omega\times((-\infty,-\tau_0)\cup(T_m,+\infty))$. і використовуючи (3.6) та нерівність Коші-Буняковського, одержуємо

$$\Big|\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega u_m(x,t)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^t c(u_m)(x,t,s)\,ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\Big|\le$$

$$\le\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega |u_m(x,t)|\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^t |c(u_m)(x,t,s)|\,ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\le$$

$$\le L\int\limits_\Omega dx\int\limits_0^\sigma |u_m(x,t)|e^{-\lambda t}\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^t |u_m(x,s)|ds\Big)dt\le$$

$$\le L\int\limits_\Omega dx\int\limits_0^\sigma |u_m(x,t)|e^{-\frac{\lambda t}{2}}\Big(e^{-\frac{\lambda t}{2}}\int\limits_{t-\tau^+}^t |u_m(x,s)|\,ds\Big)dt\le$$

$$\le L\sqrt{\tau^+}\int\limits_\Omega\left[\Big(\int\limits_0^\sigma |u_m(x,t)|^2e^{-\lambda t}dt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^\sigma e^{-\lambda t}dt\int\limits_{t-\tau^+}^t |u_m(x,s)|^2ds\Big)^{1/2}\right]dx. \tag{3.27}$$

Оцінимо другий інтеграл правої частини нерівності (3.27). Для майже всіх $x\in\Omega$ маємо

$$\int\limits_0^\sigma e^{-\lambda t}dt\int\limits_{t-\tau^+}^t |u_m(x,s)|^2ds\le\int\limits_{-\tau^+}^\sigma |u_m(x,s)|^2ds\int\limits_s^{s+\tau^+}e^{-\lambda t}dt=$$

$$=\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})\int\limits_{-\tau_0}^\sigma |u_m(x,s)|^2e^{-\lambda s}ds=$$

$$=\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})\Big(\int\limits_0^\sigma |u_m(x,t)|^2e^{-\lambda t}dt+\int\limits_{-\tau_0}^0 |u_{0,m}(x,t)|^2e^{-\lambda t}dt\Big).$$

Тут ми змінили порядок інтегрування та використали (3.24).

Підставляючи у праву частину (3.27) останній елемент з отриманого вище ланцюжка перетворень замість першого, та використовуючи нерівність Коші-

Буняковського, отримаємо

$$\Big|\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega u_m(x,t)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^t c(u_m)(x,t,s)ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\Big| \le$$

$$\le L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\Big(2\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega |u_m(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt+\int\limits_{-\tau_0}^0\int\limits_\Omega |u_{0,m}(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt\Big). \tag{3.28}$$

З умови $(\mathcal{A}_4)$ маємо

$$\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n a_i(u_m)u_{m,x_i}+a_0(u_m)u_m\Big\}dxdt \ge \int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega \Big\{K_1\sum_{i=1}^n |u_{m,x_i}|^2-$$

$$-K_2|u_m|^2-g(x,t)\Big\}dxdt. \tag{3.29}$$

Застосувавши нерівність (3.26), одержимо

$$\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n f_iu_{m,x_i}+f_0u_m\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt \le \varepsilon\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n |u_{m,x_i}(x,t)|^2+$$

$$+|u_m(x,t)|^2\Big\}e^{-\lambda t}dxdt+\frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega\sum_{i=0}^n |f_i(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt, \tag{3.30}$$

де $\varepsilon>0$ – довільне число.

З (3.25), використовуючи (3.28) – (3.30), для довільного $\sigma\in(0,T_m\rangle$ одержуємо

$$e^{-\lambda\sigma}\int\limits_\Omega |u_m(x,\sigma)|^2\,dx+2(K_1-\varepsilon)\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n |u_{m,x_i}(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt+$$

$$+\Big(\lambda-2K_2-2\varepsilon-4L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\Big)\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega |u_m(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt \le$$

$$\le(2\varepsilon)^{-1}\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega\sum_{i=0}^n |f_i(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt+2\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega g(x,t)e^{-\lambda t}dxdt+$$

$$+2L\tau_0\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\max_{t\in[-\tau_0,0]}\int\limits_\Omega |u_{0,m}(x,t)|^2dx. \tag{3.31}$$

Беручи $\varepsilon = K_1/2$, $\lambda = \lambda_0$, де λ_0 розв'язок нерівності

$$\lambda - 2K_2 - K_1 - 4L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})} > 0, \tag{3.32}$$

з (3.31) отримуємо

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2\,dx + C_3\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}|u_{m,x_i}(x,t)|^2 + |u_m(x,t)|^2\Big\}dxdt \le$$

$$\le C_4\iint\limits_{Q}\Big(\sum_{i=0}^{n}|f_i(x,t)|^2 + g(x,t)\Big)dxdt + C_5\max_{t\in[-\tau_0,0]}\int\limits_{\Omega}|u_{0,m}(x,t)|^2dx, \tag{3.33}$$

де C_3, C_4, C_5 – додатні сталі, що залежать тільки від K, L, τ_0, τ^+, T.

З (3.20) випливає, що послідовність $\{\max\limits_{t\in[-\tau_0,0]}\int\limits_{\Omega}|u_{0,m}(x,t)|^2dx\}_{m=1}^{\infty}$ обмежена. Отже, з (3.33) для всіх $\sigma\in(0,T_m\rangle$ отримуємо оцінки

$$\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\sigma)|^2\,dx \le C_6, \tag{3.34}$$

$$\int\limits_0^{\sigma}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n}|u_{m,x_i}(x,t)|^2 + |u_m(x,t)|^2\Big\}\,dxdt \le C_7, \tag{3.35}$$

де C_6, $C_7 > 0$ – сталі, що не залежать від m, T_m, σ.

З оцінки (3.34) випливає, що існує незалежна від T_m стала, що обмежує функції $c_{m,1}, \ldots, c_{m,m}$ на $[-\tau_0, T_m\rangle$. Отже, маємо $[-\tau_0, T_m\rangle = [-\tau_0, T]$.

З умови $(\mathcal{A}_2)$ та з (3.35) випливає

$$\iint\limits_{Q}|a_i(u_m)(x,t)|^2\,dxdt \le C_8, \quad i=\overline{0,n}, \tag{3.36}$$

де $C_8 > 0$ – стала, що не залежить від m.

Використовуючи (3.6), нерівність Коші-Буняковського, (3.20) та (3.34) отримуємо

$$\iint\limits_{Q}\Big|\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u_m)(x,t,s)\,ds\Big|^2dxdt \le L^2(T+\tau_0)\iint\limits_{Q}\Big(\int\limits_{-\tau_0}^{T}|u_m(x,s)|^2\,ds\Big)dxdt \le$$

$$\le L^2T(T+\tau_0)\Big(\iint\limits_{Q}|u_m(x,t)|^2\,dxdt + \tau_0\max_{t\in[-\tau_0,0]}\int\limits_{\Omega}|u_{0,m}(x,t)|^2dx\Big) \le C_9, \tag{3.37}$$

де $C_9 > 0$ – стала, що не залежить від m.

З рефлексивності простору $L^2(Q)$ та оцінок (3.34)–(3.37), випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ (позначатимемо її також $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$), функцій $v_* \in L^2(\Omega)$, $u \in L^2(0,T;\widetilde{H}^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $\chi_i \in L^2(Q)$ ($i=\overline{0,n}$) та $\zeta \in L^2(Q)$ таких, що

$$u_m(\cdot,T) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v_*(\cdot) \quad \text{слабко в} \quad L^2(\Omega), \tag{3.38}$$

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *-\text{слабко в} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.39}$$

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T;\widetilde{H}^1(\Omega)), \tag{3.40}$$

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \ \text{ слабко в } \ L^2(Q) \quad (i=\overline{0,n}), \tag{3.41}$$

$$\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)ds \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \zeta \ \text{ слабко в } \ L^2(Q). \tag{3.42}$$

Доведемо, що u – узагальнений розв'язок задачі (3.1)–(3.3). Для цього зафіксуємо числа $j,m \in \mathbb{N}$ такі, що $m \geq j$. Домноживши рівність з номером j системи (3.22) на функцію $\theta \in C^1([0,T])$, проінтегруємо отриману рівність по $t \in [0,T]$. Спрямувавши $m \to \infty$, та враховуючи (3.20), (3.24), (3.38)–(3.42), одержуємо

$$\theta(T)\int\limits_{\Omega} v_*(x)w_j(x)\,dx - \theta(0)\int\limits_{\Omega} u_0(x,0)w_j(x)\,dx-$$

$$-\iint\limits_{Q} uw_j\theta'\,dxdt+\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-f_i)w_{j,x_i}+(\chi_0+\zeta-f_0)w_j\Big\}\theta\,dxdt=0. \tag{3.43}$$

З цієї рівності маємо, що для кожного $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ і $\theta \in C^1([0,T])$ виконується рівність

$$\theta(T)\int\limits_{\Omega} v_*(x)v(x)\,dx - \theta(0)\int\limits_{\Omega} u_0(x,0)v(x)\,dx-$$

$$-\iint\limits_{Q} uv\theta'\,dxdt+\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-f_i)v_{x_i}+(\chi_0-f_0+\zeta)v\Big\}\theta\,dxdt=0. \tag{3.44}$$

Зауважимо, що якщо в (3.44) взяти $\theta = \varphi \in C_0^1(0,T)$, то отримаємо тотожність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n (\chi_i - f_i) v_{x_i} \varphi + (\chi_0 - f_0 + \zeta) v\varphi - uv\varphi' \Big\}\, dxdt = 0 \tag{3.45}$$

для кожних $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, $\varphi \in C_c^1(0,T)$.

Згідно з лемою 3.1 (див., (3.11)), з (3.45) випливає

$$u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \tag{3.46}$$

та для кожного $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ і $\theta \in C^1([0,T])$ виконується рівність

$$\theta(T) \int\limits_\Omega u(x,T) v(x)\, dx - \theta(0) \int\limits_\Omega u(x,0) v(x)\, dx -$$

$$- \iint\limits_Q uv\theta'\, dxdt + \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n (\chi_i - f_i) v_{x_i} + (\chi_0 + \zeta - f_0) v \Big\} \theta\, dxdt = 0. \tag{3.47}$$

З (3.44) та (3.47) маємо

$$u(x,0) = u_0(x,0), \quad u(x,T) = v_*(x) \quad \text{для майже всіх} \quad x \in \Omega. \tag{3.48}$$

Продовжимо u нулем на $\overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0)$. Покажемо, що так продовжена функція належить простору $C([-\tau_0, T]; L^2(\Omega))$. Дійсно, в силу (3.46), маємо, що звуження u на $\overline{\Omega} \times [0,T]$ належить до $C([0,T]; L^2(\Omega))$. З умов теореми маємо $u_0 \in C([-\tau_0, 0]; L^2(\Omega))$. Також, $u(x,0) = u_0(x,0)$ (див. (3.48)). Звідси випливає (3.7). Отже, $u \in C([-\tau_0, T]; L^2(\Omega))$.

Згідно з (3.45) для доведення (3.8) достатньо показати, що правильна рівність

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n \chi_i v_{x_i} + (\chi_0 + \zeta) v \Big\} dx = \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(u) v_{x_i} + \Big(a_0(u) + \int\limits_{t-\tau(t)}^t c(u)\, ds \Big) v \Big\} dx \tag{3.49}$$

для всіх $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ та майже всіх $t \in (0,T)$. Використаємо для цього метод монотонності (див. [72]).

Нехай функція $w_m \in L^2(0,T; \widetilde{H}^1(\Omega)) \cap L^2(-\tau_0, T; L^2(\Omega))$ така, що $w_m(x,t) = u_{0,m}(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in \Omega \times (-\tau_0, 0)$ та $w(x,t) =$

$\widetilde{w}(x,t)$ для майже всіх $(x,t)\in Q$, де $\widetilde{w}\in L^2(0,T;\widetilde{H}^1(\Omega))$ – довільна функція. Для кожного $m\in\mathbb{N}$ позначимо

$$W_m := \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n (a_i(u_m)-a_i(w_m))(u_{m,x_i}-w_{m,x_i})+(a_0(u_m)-a_0(w_m))(u_m-w_m)+$$

$$+\frac{\lambda}{2}|u_m-w_m|^2+(u_m-w_m)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}[c(u_m)-c(w_m)]\,ds\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt,$$

де $\lambda>0$ – число таке, що виконується нерівність

$$\lambda/2-K_0-L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}>0. \tag{3.50}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{A}_3)$, для кожного $m\in\mathbb{N}$ маємо

$$W_m\geq \iint\limits_Q \Big\{(\frac{\lambda}{2}-K_0)|u_m-w_m|^2+(u_m-w_m)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}(c(u_m)-c(w_m))\,ds\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt.$$

З нерівності

$$\Big|\iint\limits_Q (u_m-w_m)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}[c(u_m)-c(w_m)]\,ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\Big|\leq$$

$$\leq L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\iint\limits_Q |u_m-w_m|^2e^{-\lambda t}dxdt$$

(див. (3.16)), та з умови (3.50) отримуємо $W_m\geq 0$.

Маємо

$$W_m=\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n a_i(u_m)u_{m,x_i}+a_0(u_m)u_m+\frac{\lambda}{2}|u_m|^2+u_m\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u_m)\,ds\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt-$$

$$-\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n \big[a_i(u_m)w_{m,x_i}+a_i(w_m)(u_{m,x_i}-w_{m,x_i})\big]+a_0(u_m)w_m+a_0(w_m)(u_m-w_m)+$$

$$+\lambda u_mw_m-\frac{\lambda}{2}|w_m|^2+w_m\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u_m)\,ds+(u_m-w_m)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(w_m)ds\Big\}e^{-\lambda t}dxdt\geq 0,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{3.51}$$

З (3.51), використовуючи (3.25) з $\sigma = T$, отримуємо

$$W_m = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n f_i u_{m,x_i} + f_0 u_m \Big\} e^{-\lambda t}\, dxdt - \frac{1}{2} e^{-\lambda T} \int\limits_\Omega |u_m(x,T)|^2\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u_{0,m}(x,0)|^2\, dx - \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n \big[a_i(u_m) w_{m,x_i} + a_i(w_m)(u_{m,x_i} - w_{m,x_i}) \big] +$$

$$+ a_0(u_m) w_m + a_0(w)(u_m - w_m) + \lambda u_m w - \frac{\lambda}{2} |w_m|^2 +$$

$$+ w_m \int\limits_{t-\tau(t)}^t c(u_m)\, ds + (u_m - w_m) \int\limits_{t-\tau(t)}^t c(w_m)\, ds \Big\} e^{-\lambda t}\, dxdt \geq 0 \tag{3.52}$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$.

Беручи до уваги (3.38) та другу рівність з (3.48), маємо

$$\varliminf_{m\to\infty} ||u_m(\cdot,T)||_{L^2(\Omega)} \geq ||u(\cdot,T)||_{L^2(\Omega)}. \tag{3.53}$$

Визначимо $w(x,t) := u_0(x,t)$ для $(x,t) \in \Omega \times (-\tau_0, 0)$, і $w(x,t) := \widetilde{w}(x,t)$ для $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$. Тоді,

$$w_m \to w \text{ сильно в } L^2(\Omega \times (-\tau_0, T)). \tag{3.54}$$

Покажемо, що

$$\Big| \int\limits_{t-\tau(t)}^t c(w_m) ds - \int\limits_{t-\tau(t)}^t c(w) ds \Big| \to 0 \quad \text{в} \quad L^2(Q). \tag{3.55}$$

Продовжимо функції w, w_m нулем на $\Omega \times \{(-\infty, -\tau_0) \cup (T, +\infty)\}$. Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$, нерівність Коші-Буняковського та змінюючи порядок інтегрування, одержуємо

$$\iint\limits_Q \Big| \int\limits_{t-\tau(t)}^t c(w_m) ds - \int\limits_{t-\tau(t)}^t c(w) ds \Big|^2 dxdt \leq \tau^+ \iint\limits_Q \Big(\int\limits_{t-\tau^+}^t |c(w_m) - c(w)|^2 ds \Big) dxdt \leq$$

$$\leq L^2 \tau^+ \iint\limits_Q \Big(\int\limits_{t-\tau^+}^t |w_m(x,s) - w(x,s)|^2 ds \Big) dxdt \leq$$

$$\leq L^2\tau^+ \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{-\tau^+}^{T} |w_m(x,s) - w(x,s)|^2 ds \int\limits_{s}^{s+\tau^+} dt =$$

$$= L^2(\tau^+)^2 \int\limits_{\Omega} \int\limits_{-\tau^+}^{0} |u_{0,m}(x,t) - u_0(x,t)|^2 dxdt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

З (3.20), (3.40), (3.41), (3.42), (3.53), (3.54) врахувавши (3.52), одержимо

$$0 \leq \overline{\lim_{m\to\infty}} W_m \leq \iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} f_i u_{x_i} + f_0 u \Big\} e^{-\lambda t}\, dxdt - \frac{1}{2} e^{-\lambda T} \int\limits_{\Omega} |u(x,T)|^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |u_0(x,0)|^2 dx - \iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \big[\chi_i w_{x_i} + a_i(w)(u_{x_i} - w_{x_i}) \big] +$$

$$+ \chi_0 w + a_0(w)(u-w) + \lambda uw - \frac{\lambda}{2}|w|^2 + w\zeta + (u-w) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(w)\, ds \Big\} e^{-\lambda t} dxdt. \quad (3.56)$$

Використовуючи лему 3.1 з $\theta \equiv e^{-\lambda t}$ та першу рівність (3.48), з (3.45) одержуємо

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \chi_i u_{x_i} + (\chi_0 + \zeta) u + \frac{\lambda}{2}|u|^2 \Big\} e^{-\lambda t} dxdt = \iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} f_i u_{x_i} + f_0 u \Big\} e^{-\lambda t} dxdt -$$

$$- \frac{1}{2} e^{-\lambda T} \int\limits_{\Omega} |u(x,T)|^2\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |u_0(x,0)|^2\, dx. \quad (3.57)$$

Отже, з (3.56) та (3.57) випливає, що

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (\chi_i - a_i(w))(u_{x_i} - w_{x_i}) + (\chi_0 - a_0(w))(u-w) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}|u-w|^2 + (u-w)\Big(\zeta - \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(w)\, ds \Big) \Big\} e^{-\lambda t}\, dxdt \geq 0. \quad (3.58)$$

Вибираючи в нерівності вище $w = u - \mu v\varphi$, де $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, $\mu > 0$, $\varphi \in C_c^1(-\tau_0, T)$ така, що $\operatorname{supp}\varphi \subset (0,T)$, та поділивши отриману нерівність на μ, отримуємо

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (\chi_i - a_i(u - \mu v\varphi)) v_{x_i}\varphi + (\chi_0 - a_0(u - \mu v\varphi)) v\varphi +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\mu|v\varphi|^2+\Big(\zeta-\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u-\mu v\varphi)\,ds\Big)v\varphi\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt\geq 0. \qquad (3.59)$$

Спрямувавши $\mu\to 0+$ в (3.59) і використавши умову $(\mathcal{A}_3)$ та теорему Лебега про мажоровану збіжність (див. [56, с. 648]), отримаємо

$$\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-a_i(u))v_{x_i}\varphi+(\chi_0-a_0(u))v\varphi+v\varphi\Big(\zeta-\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u)\,ds\Big)\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt=0,$$

де $v\in\widetilde{H}^1(\Omega)$, $\varphi\in C_c^1(0,T)$ – довільні функції, звідси легко випливає (3.49). Отже, ми показали, що u – узагальнений розв'язок задачі (3.1)–(3.3).

Третій крок. Згідно з лемою 3.1 при $w=u$, $t_1=0$, $t_2=\sigma$, $\theta=e^{-\lambda t}$, $\lambda=\lambda_0$, де λ_0 розв'язок нерівності (3.32), одержуємо

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda\sigma}\int\limits_{\Omega}|u(x,\sigma)|^2\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_0(x,0)|^2\,dx+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{\sigma}\int\limits_{\Omega}|u(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt+$$

$$+\int\limits_{0}^{\sigma}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n}a_i(u)u_{x_i}+a_0(u)u+u(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u)(x,t,s)ds\Big\}e^{-\lambda t}dxdt=$$

$$=\int\limits_{0}^{\sigma}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n}f_iu_{x_i}+f_0u\Big\}e^{-\lambda t}dxdt. \qquad (3.60)$$

Міркуючи аналогічно, як при отримані (3.33) з нерівності (3.25) замінивши при цьому u_m на u, здобудемо нерівність

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega}|u(x,t)|^2\,dx+C_3\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}(x,t)|^2+|u(x,t)|^2\Big\}dxdt\leq$$

$$\leq C_4\iint\limits_{Q}\Big(\sum_{i=0}^{n}|f_i(x,t)|^2+g(x,t)\Big)dxdt+C_5\max_{t\in[-\tau_0,0]}\int\limits_{\Omega}|u_0(x,t)|^2dx, \qquad (3.61)$$

з якої легко випливає нерівність (3.9). ∎

3.2 Задача Фур'є для параболічних рівнянь із нелокальним змінним запізненням

3.2.1 Позначення та допоміжні факти

Нехай $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\overline{Q} := \overline{\Omega} \times S$, $\Sigma := \partial\Omega \times S$.

Нагадаємо нерівність Фрідріхса

$$\int\limits_{\Omega} |v|^2\, dx \le K_0 \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.62}$$

де K_0 – додатна стала, що від v не залежить. Відомо, що $1/K_0$ – перше власне значення задачі: $-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$.

З нерівності Фрідріхса випливає, що норма в просторі $H_0^1(\Omega)$ може бути визначена функціоналом $||v||_{H_0^1(\Omega)} := \Big(\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 dx\Big)^{1/2}$, що ми далі і будемо вважати.

Для довільного банахового простору X через $L^2(a,b;X)$, де $-\infty \le a < b \le +\infty$, позначаємо простір (класів) вимірних функцій $w : [a,b] \to X$ таких, що $||w(\cdot)||_X \in L^2(a,b)$. Під $L^2_{\rm loc}(S;X)$ розуміємо лінійний простір (класів) вимірних функцій, визначених на S зі значеннями в X, таких, що їхнє звуження на будь-який відрізок $[a,b] \subset S$ належить до $L^2(a,b;X)$. Позначимо через $L^p_{\rm loc}(\overline{Q})$ $(1 \le p \le \infty)$ лінійний простір (класів) визначених на Q вимірних функцій таких, що їхнє звуження на будь-яку обмежену вимірну множину $Q' \subset Q$ належить до $L^p(Q')$.

Під $C_c^1(I)$, де I – числовий інтервал, розуміємо лінійний простір визначених на I неперервно диференційовних фінітних функцій, причому, якщо $I = (t_1, t_2)$, то писатимемо $C_c^1(t_1,t_2)$ замість $C_c^1((t_1,t_2))$.

Позначимо через $F_{2,\rm loc}(Q)$ простір вектор-функцій $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ таких, що $f_i \in L^2_{\rm loc}(Q)$ для кожного $i \in \{0, 1, ..., n\}$.

Нехай $\omega \in \mathbb{R}$, X – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і відповідною нормою $\|\cdot\|_X$. Позначимо

$$L^2_\omega(S;X) := \Big\{ f \in L^2_{\rm loc}(S;X) \;\Big|\; \int_S e^{2\omega t} \|f(t)\|_X^2 dt < \infty \Big\}.$$

$L^2_\omega(S;X)$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком і нормою

$$(f,g)_{L^2_\omega(S;X)} = \int_S e^{2\omega t} (f(t), g(t))_X\, dt, \quad \|f\|_{L^2_\omega(S;X)} := \Big(\int_S e^{2\omega t} \|f(t)\|_X^2\, dt \Big)^{1/2}.$$

3.2.2 Формулювання задачі та основного результату підрозділу

Розглянемо ***задачу***: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (у певному сенсі) рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,u,\nabla u) + a_0(x,t,u,\nabla u) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x,t,s,u(x,s))ds =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \big(f_i(x,t)\big)_{x_i} + f_0(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{3.63}$$

крайову умову

$$u\Big|_{\Sigma} = 0, \tag{3.64}$$

та аналог початкової умови

$$\lim_{t\to-\infty} e^{2\omega t} \int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2\, dx = 0, \tag{3.65}$$

де $\omega \in \mathbb{R}$ – задане число.

Тут $\tau : S \to \mathbb{R}$ – неперервна обмежена функція така, що $\tau(t) \geq 0$ для всіх $t \in S$, а $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $c : Q \times S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i : Q \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,n})$ – задані дійснозначні функції з відповідних класів вихідних даних.

Введемо класи вихідних даних.

Позначимо через $\mathcal{A}$ множину наборів $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ функцій $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,n})$, які задовольняють такі умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція a_i – каратеодорівська, тобто функція $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ є неперервною для майже всіх $(x,t) \in Q$, а функція $a_i(\cdot,\cdot,\rho,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ – вимірна для всіх $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$); крім того, $a_i(x,t,0,0) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, майже всіх $(x,t) \in Q$ і всіх $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ правильною є оцінка

$$|a_i(x,t,\rho,\xi)| \leq C_1\big(|\rho| + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|\big) + h_i(x,t),$$

де $C_1 > 0$ – стала і $h_i \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$;

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ і всіх (ρ_1, ξ^1), $(\rho_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\xi_i^1 - \xi_i^2) +$$

$$+\big(a_0(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_0(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\rho_1 - \rho_2) \geq K_1 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i^1 - \xi_i^2|^2 + K_2|\rho_1 - \rho_2|^2, \tag{3.66}$$

де $K_1 > 0, K_2 \in \mathbb{R}$ – сталі.

Через $\mathcal{C}$ позначимо множину дійснозначних функцій $c : Q \times S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, що задовольняють умови:

$(\mathcal{C}_1)$ c – каратеодорівська функція, тобто функція $c(x,t,s,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною для майже всіх $(x,t,s) \in Q \times S$, а функція $c(\cdot,\cdot,\cdot,\rho) : Q \times S \to \mathbb{R}$ – вимірна для всіх $\rho \in \mathbb{R}$); крім того, $c(x,t,s,0) = 0$ для майже всіх $(x,t,s) \in Q \times S$;

$(\mathcal{C}_2)$ існує стала $L > 0$ така, що для майже всіх $(x,t,s) \in Q \times S$ і для всіх ρ_1, $\rho_2 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\big|c(x,t,s,\rho_1) - c(x,t,s,\rho_2)\big| \leq L|\rho_1 - \rho_2|. \tag{3.67}$$

Зауваження 3.2. *З умови ($\mathcal{C}_1$) та умови ($\mathcal{C}_2$) випливає, що для майже всіх $(x,t,s) \in Q \times S$ і всіх $\rho \in \mathbb{R}$ виконується така оцінка:*

$$|c(x,t,s,\rho)| \leq L|\rho|. \tag{3.68}$$

Тепер дамо означення узагальненого розв'язку задачі (3.63)–(3.65).

Означення 3.2. *Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}$, $c \in \mathcal{C}$, $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in F_{2,\mathrm{loc}}(Q)$. Узагальненим розв'язком задачі (3.63)–(3.65) називаємо функцію $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H_0^1(\Omega)) \cap C\left(S; L^2(\Omega)\right)$ таку, що виконується умова (3.65) і правильна інтегральна тотожність*

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u,\nabla u) v_{x_i} \varphi + a_0(x,t,u,\nabla u) v\varphi + v\varphi \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x,t,s,u(x,s))\, ds -$$

$$-uv\varphi'\Big\}\,dxdt = \iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n f_i v_{x_i}\varphi + f_0 v\varphi\Big\}\,dxdt \tag{3.69}$$

для кожних $v \in H_0^1(\Omega)$ *і* $\varphi \in C_c^1(-\infty, 0)$.

Позначимо

$$\tau^+ := \sup_{t\in S}\tau(t), \qquad \chi(\omega) := \begin{cases} \tau^+, & \text{якщо } \omega = 0, \\ \frac{1}{2\omega}(e^{2\omega\tau^+} - 1), & \text{якщо } \omega \neq 0. \end{cases} \tag{3.70}$$

Розглянемо нерівність

$$\omega + L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)} < K_1/K_0 + K_2, \tag{3.71}$$

де K_0 – стала з (3.62), K_1, K_2 – сталі з (3.66).

Очевидно, що $\omega + 2L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)} \to -\infty$ при $\omega \to -\infty$, оскільки $\chi(\omega) \to 0$ при $\omega \to -\infty$, а це означає, що нерівність (3.71) має розв'язок.

Теорема 3.2. *Нехай* $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}$, $c \in \mathcal{C}$, $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in F_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ *і* ω *– розв'язок нерівності* (3.71). *Тоді узагальнений розв'язок задачі* (3.63)–(3.65) *єдиний.*

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови теореми 3.2 та* $f_i \in L^2_\omega(S; L^2(\Omega))$ *(*$i = \overline{0,n}$*). Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (3.63)–(3.65) *і для нього є правильні оцінки*

$$e^{2\omega\sigma}\int\limits_\Omega |u(x,\sigma)|^2\,dx \le C_2 \int\limits_{-\infty}^{\sigma} e^{2\omega t}||f(\cdot,t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt, \quad \sigma \in S, \tag{3.72}$$

$$||u||_{L^2_\omega(S;H_0^1(\Omega))} \le C_3\ ||f||_{L^2_\omega(S;L^2(\Omega))}, \tag{3.73}$$

де C_2, C_3 *– додатні сталі, які залежать лише від* $\tau^+, \omega, L, K_0, K_1, K_2$.

3.2.3 Доведення основних результатів підрозділу

Для функції $w : Q \to \mathbb{R}$ введемо позначення:

$$a_j(w)(x,t) := a_j(x,t,w(x,t),\nabla w(x,t)), \quad (x,t) \in Q, \quad j = \overline{0,n},$$

$$c(w)(x,t,s) := c(x,t,s,w(x,s)), \quad (x,t,s) \in Q \times S. \tag{3.74}$$

Доведення теореми 3.2. Припустимо протилежне. Нехай u_1 і u_2 – два різні узагальнені розв'язки нашої задачі. Позначимо $w := u_1 - u_2$ і розглянемо різницю рівності (3.69) при $u = u_2$ та цієї ж рівності при $u = u_1$. У результаті отримаємо

$$-\iint\limits_Q wv\varphi'\,dxdt+\iint\limits_Q\Big[\sum_{i=1}^n(a_i(u_1)-a_i(u_2))v_{x_i}+\big(a_0(u_1)-a_0(u_2)\big)v+$$

$$+v\int\limits_{t-\tau(t)}^t\big(c(u_1)-c(u_2)\big)ds\Big]\varphi\,dxdt=0\quad\forall v\in H_0^1(\Omega),\ \forall\varphi\in C_c^1(-\infty,0).\qquad(3.75)$$

Очевидно, що з (3.65) випливає

$$e^{2\omega t}\int\limits_\Omega|w(x,t)|^2\,dx\underset{t\to-\infty}{\longrightarrow}0.\qquad(3.76)$$

На підставі леми 3.1, взявши $\theta(t)=e^{2\omega t}$, $t\in\mathbb{R}$, з рівності (3.75) для довільних $\sigma_1,\sigma_2\in S$ $(\sigma_1<\sigma_2)$ отримаємо

$$\frac{1}{2}e^{2\omega\sigma_2}\int\limits_\Omega|w(x,\sigma_2)|^2\,dx-\frac{1}{2}e^{2\omega\sigma_1}\int\limits_\Omega|w(x,\sigma_1)|^2\,dx-\omega\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_\Omega e^{2\omega t}|w(x,t)|^2\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_\Omega e^{2\omega t}\Big[\sum_{i=1}^n(a_i(u_1)-a_i(u_2))(u_{1,x_i}-u_{2,x_i})+(a_0(u_1)-a_0(u_2))(u_1-u_2)+$$

$$+w\int\limits_{t-\tau(t)}^t\big(c(u_1)-c(u_2)\big)ds\Big]\,dxdt=0.\qquad(3.77)$$

З умови $(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t)\in Q$ маємо

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_\Omega e^{2\omega t}\Big[\sum_{i=1}^n(a_i(u_1)-a_i(u_2))(u_{1,x_i}-u_{2,x_i})+(a_0(u_1)-a_0(u_2))(u_1-u_2)\Big]\,dxdt\geq$$

$$\geq\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_\Omega e^{2\omega t}\Big[K_1|\nabla w|^2+K_2|w|^2\Big]\,dxdt.\qquad(3.78)$$

Тепер розглянемо останній член з нерівності (3.77). Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$, теорему Фубіні та нерівність Коші-Буняковського, для майже всіх $x \in \Omega$ отримаємо

$$\Big|\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t} w(x,t)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \big(c(u_1)(x,t,s) - c(u_2)(x,t,s)\big)ds\Big)dt\Big| \leq$$

$$\leq L\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t}|w(x,t)|\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|ds\Big)dt \leq$$

$$\leq L\sqrt{\tau^+}\left(\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t}|w(x,t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t}\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|^2ds\Big)dt\right)^{1/2}. \qquad (3.79)$$

Змінивши порядок інтегрування та припустивши, що $w(x,t) = 0$ для $x \in \Omega,\ t > 0$, для майже всіх $x \in \Omega$ отримаємо

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t}\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|^2ds\Big)dt \leq \int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_2}|w(x,s)|^2ds\int\limits_{s}^{s+\tau^+} e^{2\omega t}dt =$$

$$= \chi(\omega)\Big(\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega s}|w(x,s)|^2ds + \int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1} e^{2\omega s}|w(x,s)|^2ds\Big), \qquad (3.80)$$

де $\chi(\omega)$ – визначена в (3.70).

Підставляючи в (3.79) останній член ланцюжка нерівностей (3.80) замість першого і використовуючи нерівності: $\sqrt{ab} \leq \varepsilon a + (4\varepsilon)^{-1}b,\ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ $(a \geq 0, b \geq 0, \varepsilon > 0)$, здобудемо

$$\Big|\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t} w(x,t)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \big(c(u_1)(x,t,s) - c(u_2)(x,t,s)\big)ds\Big)dt\Big| \leq$$

$$\leq L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}\Big((1+\varepsilon)\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{2\omega t}|w(x,t)|^2dt + (4\varepsilon)^{-1}\int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1} e^{2\omega t}|w(x,t)|^2dt\Big). \qquad (3.81)$$

Використовуючи (3.78), (3.81), з (3.77) ми отримуємо

$$\frac{1}{2}e^{2\omega\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_2)|^2\,dx\ -\ \frac{1}{2}e^{2\omega\sigma_1}\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_1)|^2\,dx+$$

$$+K_1\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}|\nabla w(x,t)|^2\,dxdt+(K_2-(1+\varepsilon)L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}-$$

$$-\omega)\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}|w(x,t)|^2\,dxdt-(4\varepsilon)^{-1}L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}\int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}|w(x,t)|^2\,dxdt\le 0.$$

Звідси, використовуючи (3.62), отримаємо

$$\frac{1}{2}e^{2\omega\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_2)|^2\,dx\ -\ \frac{1}{2}e^{2\omega\sigma_1}\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_1)|^2\,dx+$$

$$+\left(K_1/K_0+K_2-(1+\varepsilon)L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}-\omega\right)\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}|w(x,t)|^2\,dxdt+$$

$$-(4\varepsilon)^{-1}L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}\int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}|w(x,t)|^2\,dxdt\le 0.$$

Оскільки, ω – розв'язок нерівності (3.71), то можна вибрати ε таким, щоб виконувалась нерівність $K_1/K_0+K_2-(1+\varepsilon)L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}>0$. У результаті отримаємо

$$e^{2\omega\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_2)|^2dx\le e^{2\omega\sigma_1}\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_1)|^2dx+C_4\int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}|w(x,t)|^2dxdt, \tag{3.82}$$

де $C_4>0$ – стала, яка від σ_1 незалежить.

Зафіксуємо довільним чином вибране σ_2 в (3.82) і спрямуємо σ_1 до $-\infty$. Згідно з умовою (3.76), перший член правої частини нерівності (3.82) прямує до 0. Очевидно, що другий член правої частини цієї ж нерівності також прямує до 0. Справді,

$$0\le\int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}|w(x,t)|^2\,dxdt\le\tau^+\max_{t\in[\sigma_1,\sigma_1-\tau^+]}\left(e^{2\omega t}\int\limits_{\Omega}|w(x,t)|^2\,dx\right)\underset{\sigma_1\to-\infty}{\longrightarrow}0.$$

Отож, отримуємо рівність $e^{2\omega\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_2)|^2\,dx = 0$. З того, що $\sigma_2 \in S$ – довільне, отримуємо, що $w(x,t) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, а це суперечить нашому припущенню. Отож, узагальнений розв'язок задачі (3.63)–(3.65) єдиний. ∎

Доведення теореми 3.3. Для кожного $m \in N$ позначимо $Q_m := \Omega \times (-m, 0]$, $\tau_m := \min\limits_{-m \le t \le 0}(t - \tau(t))$, $f_{i,m}(\cdot,t) := f_i(\cdot,t)$, якщо $-m < t \le 0$, і $f_{i,m}(\cdot,t) := 0$, якщо $t \le -m$. Розглянемо задачу: знайти функцію $u_m \in L^2(-m,0;H_0^1(\Omega)) \cap C([-\tau_m,0];L^2(\Omega))$, яка задовольняє початкову умову

$$u_m(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\tau_m, -m], \tag{3.83}$$

та рівняння (3.63) в Q_m в сенсі інтегральної тотожності, тобто

$$\iint\limits_{Q_m}\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u_m,\nabla u_m)v_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u_m,\nabla u_m)v\varphi + v\varphi\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)(x,t,s)ds -$$
$$-u_m v\varphi'\Big\}dxdt = \iint\limits_{Q_m}\Big\{\sum_{i=1}^{n} f_{i,m}v_{x_i}\varphi + f_{0,m}v\varphi\Big\}dxdt, \quad v \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(-m,0). \tag{3.84}$$

Існування та єдиність узагальненого розв'язку такої задачі випливає з підрозділу 3.1. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ функцію u_m продовжимо нулем на Q і залишимо за цим продовженням позначення u_m.

Тепер отримаємо оцінки u_m $(m \in \mathbb{N})$. Зауважимо, що для кожного $m \in N$ функція u_m належить до $L^2(S;H_0^1(\Omega)) \cap C(S;L^2(\Omega))$ і задовольняє інтегральну рівність (3.69) з $f_{i,m}$ замість f_i $(i = \overline{1,n})$, тобто виконується рівність

$$\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u_m,\nabla u_m)v_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u_m,\nabla u_m)v\varphi + v\varphi\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)(x,t,s)ds -$$
$$-u_m v\varphi'\Big\}dxdt = \iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n} f_{i,m}v_{x_i}\varphi + f_{0,m}v\varphi\Big\}dxdt, \quad v \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(-\infty,0). \tag{3.85}$$

Застосувавши лему 3.1 з $\theta(t) = 2e^{2\omega t}$, $t \in S$, до рівності (3.85), отримаємо

$$e^{2\omega\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\sigma_2)|^2\,dx - e^{2\omega\sigma_1}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\sigma_1)|^2\,dx-$$

$$-2\omega\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}|u_m(x,t)|^2\,dxdt + 2\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}\Big[\sum_{i=1}^{n}a_i(u_m)u_{m,x_i} + a_0(u_m)u_m+$$

$$+u_m\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u_m)(x,t,s)ds\Big]\,dxdt = 2\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}\Big\{\sum_{i=1}^{n}f_{i,m}u_{m,x_i} + f_{0,m}u_m\Big\}\,dxdt. \tag{3.86}$$

Згідно з нерівністю Коші для майже всіх $t \in S$ маємо

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}\Big\{\sum_{i=1}^{n}f_{i,m}u_{m,x_i} + f_{0,m}u_m\Big\}\,dxdt \le$$

$$\le \varepsilon_1\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}\Big\{|\nabla u_m|^2 + |u_m|^2\Big\}dxdt + \frac{1}{4\varepsilon_1}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}\sum_{i=0}^{n}|f_{i,m}|^2dxdt \tag{3.87}$$

для довільного $\varepsilon_1 > 0$.

Подібно до (3.81) з (3.68) для майже всіх $x \in \Omega$ отримуємо

$$\Big|\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}e^{2\omega t}u_m(x,t)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u_m)(x,t,s)ds\Big)dt\Big| \le$$

$$\le L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}\Big((1+\varepsilon_2)\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}e^{2\omega t}|u_m(x,t)|^2dt + \int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}e^{2\omega t}|u_m(x,t)|^2dt\Big), \tag{3.88}$$

де $\varepsilon_2 > 0$ – довільне число.

З $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_3)$ та (3.62) ми отримуємо, що

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}\Big\{\sum_{i=1}^{n}a_i(u_m)u_{m,x_i}+a_0(u_m)u_m\Big\}dxdt \ge \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}\Big\{K_1|\nabla u_m|^2+K_2|u_m|^2\Big\}dxdt =$$

$$= \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega t}\Big\{(\delta+1-\delta)K_1|\nabla u_m|^2 + K_2|u_m|^2\Big\}\,dxdt \ge$$

$$\geq \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\Big\{(1-\delta)K_1|\nabla u_m|^2 + (\delta K_1/K_0 + K_2)\,|u_m|^2\Big\}\,dxdt, \tag{3.89}$$

де $\delta \in (0,1)$ – довільна стала.

З (3.86) використовуючи оцінки (3.87), (3.88) і (3.89), та умову (3.83), взявши $\sigma_1 < -m$, отримуємо

$$e^{2\omega\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\sigma_2)|^2\,dx + 2((1-\delta)K_1-\varepsilon_1)\int\limits_{-m}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}|\nabla u_m(x,t)|^2dxdt+$$

$$+2\Big(\delta K_1/K_0 + K_2 - \omega - (1+\varepsilon_2)L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)} - \varepsilon_1\Big)\int\limits_{-m}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}|u_m(x,t)|^2dxdt \leq$$

$$\leq (2\varepsilon_1)^{-1}\int\limits_{-m}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\sum_{i=0}^{n}|f_{i,m}(x,t)|^2dxdt. \tag{3.90}$$

Виберемо в (3.90) $\delta \in (0,1)$ і $\varepsilon_2 > 0$ такими, щоб

$$\delta K_1/K_0 + K_2 - \omega - (1+\varepsilon_2)L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)} > 0,$$

а тоді візьмемо $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\min\{\delta K_1/K_0 + K_2 - \omega - (1+\varepsilon_2)L\sqrt{\tau^+\chi(\omega)}, (1-\delta)K_1\}$. У результаті матимемо

$$e^{2\omega\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\sigma_2)|^2\,dx + C_5\int\limits_{-m}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}|\nabla u_m|^2\,dxdt \leq C_6\int\limits_{-m}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\sum_{i=0}^{n}|f_{i,m}|^2dxdt, \tag{3.91}$$

де C_5 і C_6 – додатні сталі, які залежать тільки від K_0, K_1, K_2, L, τ^+ та ω.

Зрозуміло, що u_m належить до $L^2_\omega(S; H^1_0(\Omega))$ і на підставі (3.91) маємо

$$e^{2\omega\sigma}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\sigma)|^2\,dx + C_5\int\limits_{-\infty}^{\sigma}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}|\nabla u_m|^2\,dxdt \leq$$

$$\leq C_6\int\limits_{-\infty}^{\sigma}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t}\sum_{i=0}^{n}|f_{i,m}|^2dxdt, \quad \sigma \in S. \tag{3.92}$$

Враховуючи означення $f_{i,m}$, з (3.92) матимемо

$$e^{2\omega\sigma}||u_m(\cdot,\sigma)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_6\int\limits_{-\infty}^{\sigma} e^{2\omega t}\sum_{i=0}^{n}||f_i(\cdot,t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt, \quad \sigma \in S, \tag{3.93}$$

$$\|u_m\|_{L^2_\omega(S;H^1_0(\Omega))} \le C_7 \sum_{i=0}^{n} \|f_i\|_{L^2_\omega(S;L^2(\Omega))}, \tag{3.94}$$

де C_6, C_7 – додатні сталі, які залежать лише від $\omega, \tau^+, K_0, K_1, K_2$ та L .

Покажемо, що $\{u_m\}$ – фундаментальна послідовність. Візьмемо довільні $k, l \in \mathbb{N}$ такі, що $k < l$ і розглянемо різницю між u_k і u_l. Подібно до того, як отримано оцінку (3.92), для будь-якого $\sigma \in S$ такого, що $-k \le \sigma \le 0$, отримаємо

$$e^{2\omega\sigma} \int\limits_{\Omega} |u_k(x,\sigma) - u_l(x,\sigma)|^2\, dx + C_8 \int\limits_{-l}^{\sigma}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t} |\nabla(u_k - u_l)|^2\, dxdt \le$$

$$\le C_9 \int\limits_{-l}^{\sigma}\int\limits_{\Omega} e^{2\omega t} \sum_{i=0}^{n} |f_{i,k} - f_{i,l}|^2\, dxdt, \tag{3.95}$$

де C_8 і C_9 – додатні сталі, які від k, l не залежать. Отже, маємо

$$e^{2\omega\sigma} \|u_k(\cdot,\sigma) - u_l(\cdot,\sigma)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_9 \int\limits_{-l}^{-k} e^{2\omega t} \sum_{i=0}^{n} \|f_i(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt, \quad -k \le \sigma \le 0, \tag{3.96}$$

$$\|u_k - u_l\|_{L^2_\omega(S;H^1_0(\Omega))} \le C_{10} \int\limits_{-l}^{-k} e^{2\omega t} \sum_{i=0}^{n} \|f_i(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt. \tag{3.97}$$

З умови $f_i \in L^2_\omega(S; L^2(\Omega))$ $(i = \overline{0,n})$ випливає, що праві частини нерівностей (3.96) і (3.97) прямують до нуля, коли k та l прямують до $+\infty$. Це означає, що послідовність $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною у просторі $L^2_\omega(S; H^1_0(\Omega)) \cap C(S; L^2(\Omega))$. Отже, отримуємо існування функції $u \in L^2_\omega(S; H^1_0(\Omega)) \cap C(S; L^2(\Omega))$ такої, що

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \qquad \text{сильно в} \quad L^2_\omega(S; H^1_0(\Omega)) \cap C(S; L^2(\Omega)). \tag{3.98}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$, нерівність Коші-Буняковського та (3.98), отримуємо

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} \Big| \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)(x,t,s)\, ds - \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u)(x,t,s) ds \Big|^2 dxdt \le$$

$$\leq \tau^+ \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int\limits_{\Omega} \Bigg(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} |c(u_m)(x,t,s) - c(u)(x,t,s)|^2 ds \Bigg) dxdt \leq$$

$$\leq L^2\tau^+ \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \Bigg(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} |u_m(x,s) - u(x,s)|^2 ds \Bigg) dtdx \leq$$

$$\leq L^2\tau^+ \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_2} \int\limits_{s}^{s+\tau^+} |u_m(x,s) - u(x,s)|^2 \, dtdsdx =$$

$$= (L\tau^+)^2 \int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_2} \int\limits_{\Omega} |u_m(x,t) - u(x,t)|^2 \, dxdt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отже, маємо

$$\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)\, ds \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u)\, ds \quad \text{сильно в} \quad L^2_{\text{loc}}(\overline{Q}). \tag{3.99}$$

З умови $(\mathcal{A}_2)$ та оцінки (3.94) одержимо, що для кожних $i \in \{0, 1, ..., n\}$ та $\sigma_1, \sigma_2 \in S(\sigma_1 < \sigma_2)$ є правильною оцінка

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int\limits_{\Omega} |a_i(u_m)|^2 \, dxdt \leq C_{11} \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int\limits_{\Omega} \left(|u_m|^2 + |\nabla u_m|^2 + |h_i|^2 \right) dxdt \leq C_{12}, \tag{3.100}$$

де C_{11} та C_{12} – додатні сталі, які від m не залежать, тобто функції $a_i(u_m)$ $(i = \overline{0,n})$ є обмеженими в $L^2_{\text{loc}}(\overline{Q})$. З цього та з (3.98) випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ (за якою залишимо позначення $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$) і функцій $\chi_i \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q})$ $(i = \overline{0,n})$ таких, що

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u, \quad u_{m,x_i} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_{x_i} \quad \text{майже всюди на} \quad Q, \quad i = \overline{0,n}, \tag{3.101}$$

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\text{loc}}(\overline{Q}), \quad i = \overline{0,n}, \tag{3.102}$$

З умови $(\mathcal{A}_1)$ та з (3.101) випливає, що

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_i(u) \quad \text{майже всюди на} \quad Q, \quad i = \overline{0,n}. \tag{3.103}$$

Використовуючи [72, лема 1.3], з (3.102) та (3.103) отримуємо

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_i(u) \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\text{loc}}(\overline{Q}), \quad i = \overline{0,n}. \tag{3.104}$$

Покажемо, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (3.63)–(3.65). Для цього в тотожності (3.84) спрямуємо m до $+\infty$, і врахуємо (3.98), (3.99), (3.104) та означення функції $f_{i,m}$. У результаті отримаємо тотожність (3.69). Тепер, врахувавши (3.98), можемо спрямувати $m \to +\infty$ в (3.93). З отриманої нерівності та умови $f \in L^2_\omega(S; L^2(\Omega))$ отримаємо умову (3.65). Отже, ми довели, що u – узагальнений розв'язок задачі (3.63)–(3.65).

Легко показати, що нерівності типу (3.93), (3.94) з u замість u_m є правильними, а це значить, що виконуються оцінки (3.72), (3.73). ∎

Висновки до розділу 3

У розділі 3 досліджено мішані задачі та задачу Фур'є для слабко нелінійних параболічних рівнянь зі змінним інтегральним запізненням. Для цих задач встановлено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків, а також їх апріорні оцінки.

Розділ 4

Узагальнені розв'язки для сильно нелінійних параболічних рівнянь та субдиференціальних включень із нелокальним змінним запізненням

У цьому розділі встановлено коректну розв'язність мішаних задач, задачі Фур'є для сильно нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності і нелокальним запізненням та задачі без початкових умов для еволюційних включень зі сталими показниками нелінійності та змінним інтегральним запізненням. Також отримано апріорні оцінки розв'язків цих задач.

Матеріали розділу викладено в праці [35].

4.1 Мішані задачі для параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності і нелокальним запізненням

4.1.1 Основні позначення та допоміжні факти

Нехай $Q := \Omega \times (0,T]$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0,T]$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0,T]$.

Введемо потрібні нам функційні простори. Нехай або $G = \Omega$, або $G = Q$. Припускаємо, що $r \in L_\infty(\Omega)$, $r(x) \geq 1$ для м.в. $x \in \Omega$. Розглядаємо лінійний простір $L_{r(\cdot)}(G)$ (класів) вимірних функцій $v : G \to \mathbb{R}$ таких, що $\rho_{G,r}(v) < \infty$, де $\rho_{G,r}(v) := \int_\Omega |v(x)|^{r(x)}\,dx$, якщо $G = \Omega$, і $\rho_{G,r}(v) := \int_Q |v(x,t)|^{r(x)}\,dxdt$, якщо $G = Q$. Він є банаховим простором з нормою $||v||_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \leq 1\}$ (див. [68, p. 599]) і його називають

узагальненим простором Лебега. Зауважимо, що якщо $r(x)=r_0=\mathrm{const}\geq 1$ для м.в. $x\in\Omega$, то норма $||\cdot||_{L_{r(\cdot)}(G)}$ співпадає зі стандартною нормою $||\cdot||_{L_{r_0}(G)}$ простору Лебега $L^{r_0}(G)$. Також зауважимо, що множина $C(\overline{G})$ є щільною у $L_{r(\cdot)}(G)$ (див. [68, p. 603]). Згідно з [68, p. 599], якщо $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x)>1$, то простір $L_{r(\cdot)}(G)$ є рефлексивним і спряжений простір $[L_{r(\cdot)}(G)]'$ співпадає з $L_{r'(\cdot)}(G)$, де функція r' визначається такою рівністю $\frac{1}{r(x)}+\frac{1}{r'(x)}=1$ для м.в. $x\in\Omega$. Однак, властивості узагальнених просторів Лебега не є простими наслідками з відповідних властивостей стандартних просторів Лебега та не всі властивості стандартних просторів Лебега мають аналоги у випадку узагальнених просторів Лебега (див., наприклад, згадані вище роботи).

Розглянемо функцію $p=(p_0,\ldots,p_n):\Omega\to\mathbb{R}^{n+1}$, яка задовольняє умову:

$(\mathcal{P})$ для всякого $i\in\{0,1,\ldots,n\}$ $p_i:\Omega\to\mathbb{R}$ – вимірна функція така, що

$$p_i^-:=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_i(x)>1\,,\qquad p_i^+:=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_i(x)<+\infty\,.$$

Позначимо через $p'=(p_0',\ldots,p_n'):\Omega\to\mathbb{R}^{n+1}$ вектор-функцію таку, що $\frac{1}{p_i(x)}+\frac{1}{p_i'(x)}=1$ для м.в. $x\in\Omega$ $(i=\overline{0,n})$.

Нехай $W^1_{p(\cdot)}(\Omega):=\big\{v\in L_{p_0(\cdot)}(\Omega)\mid v_{x_i}\in L_{p_i(\cdot)}(\Omega)\,(i=\overline{1,n})\big\}$ – узагальнений простір Соболєва з нормою $||v||_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)}:=||v||_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega)}+\sum_{i=1}^n||v_{x_i}||_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega)}$. Нехай $\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ – підпростір простору $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$, що є замиканням простору $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega}):=\big\{v\in C^1(\overline{\Omega})\mid v|_{\Gamma_0}=0\big\}$ в просторі $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$. Введемо позначення

$$V_p(\Omega):=\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)\cap L_2(\Omega).$$

Легко переконатись, що $V_p(\Omega)$ є банаховим простором з нормою $||v||_{V_p(\Omega)}:=||v||_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)}+||v||_{L_2(\Omega)}$.

Через $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ позначатимемо простір функцій $w\in L_{p_0(\cdot)}(Q)$ таких, що $w_{x_i}\in L_{p_i(\cdot)}(Q)$ $(i=\overline{1,n})$. Цей простір є банаховим з нормою $||w||_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)}:=||w||_{L_{p_0(\cdot)}(Q)}+\sum_{i=1}^n||w_{x_i}||_{L_{p_i(\cdot)}(Q)}$. Під $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ розумітимемо підпростір простору $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$, що є замиканням простору $\widetilde{C}^{1,0}(\overline{Q}):=\big\{w\in C(\overline{Q})\;\big|\;w_{x_i}\in C(\overline{Q})\;(i=\overline{1,n}),\quad w|_{\Sigma_0}=0\big\}$ в просторі $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$. Легко переконатись, що $w(\cdot,t)\in\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ для м.в. $t\in(0,T]$, якщо $w\in\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$.

Позначимо через $F_{p'}(Q)$ простір вектор-функцій $(f_0,f_1,\ldots,f_n)\in$ таких, що $f_i\in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ і $f_i=0$ майже скрізь у деякому околі поверхні Σ_1 для кожного $i\in\{1,...,n\}$.

Під $C_c^1(0,T)$ розумітимемо підмножину множини $C^1(0,T)$, складену з функцій з компактним носієм.

Далі використовуватимемо такий результат, доведений у [33].

Лема 4.1. *Нехай* $w \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}((0,T)\times\Omega) \cap L_2((0,T)\times\Omega)$ *задовольняє тотожність*

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n g_i v_{x_i}\varphi + g_0 v\varphi - wv\varphi' \right\} dxdt = 0 \quad \forall v \in V_p(\Omega),\ \forall \varphi \in C_c^1(0,T), \tag{4.1}$$

для деяких $g_j \in L_{p_j'(\cdot)}((0,T)\times\Omega)$ $(j=\overline{0,n})$.

Тоді $w \in C([0,T];L_2(\Omega))$ *і для кожних* $\theta \in C^1([0,T])$, $v \in V_p(\Omega)$ *та* $t_1, t_2 \in [0,T]$ $(t_1 < t_2)$ *маємо*

$$\theta(t_2)\int\limits_\Omega w(x,t_2)v(x)\,dx - \theta(t_1)\int\limits_\Omega w(x,t_1)v(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n g_i v_{x_i}\theta + g_0 v\theta - wv\theta' \right\} dxdt = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{2}\theta(t_2)\int\limits_\Omega |w(x,t_2)|^2\,dx - \frac{1}{2}\theta(t_1)\int\limits_\Omega |w(x,t_1)|^2\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega |w|^2\theta'\,dxdt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n g_i w_{x_i} + g_0 w \right\}\theta\,dxdt = 0. \tag{4.3}$$

4.1.2 Формулювання задачі та основного результату підрозділу

Розглянемо задачу: знайти функцію $u : \overline{\Omega}\times[-\tau_0,T] \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (у певному сенсі) рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}\,a_i(x,t,u,\nabla u) + a_0(x,t,u,\nabla u) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x,t,s,u(x,s))ds =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \big(f_i(x,t)\big)_{x_i} + f_0(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{4.4}$$

крайові умови

$$u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i\Big|_{\Sigma_1} = 0 \tag{4.5}$$

та початкову умову

$$u(x,t) = u_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0]. \tag{4.6}$$

Тут $\tau : [0,T] \to \mathbb{R}$ – неперервна функція така, що $\tau(t) \geq 0$ для всіх $t \in [0,T]$, $\tau_0 := -\min\limits_{t\in[0,T]}(t - \tau(t))$, $\tau^+ := \max\limits_{t\in[0,T]} \tau(t)$, а $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $c : Q \times (-\tau_0, T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i : Q \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,n})$, $u_0 : \overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0] \to \mathbb{R}$ – задані дійснозначні функції з відповідних класів вихідних даних.

Введемо класи вихідних даних.

Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P})$. Позначимо через $\mathcal{A}_p$ множину наборів $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ функцій, що задовольняють такі умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ функція $a_i(x,t,\rho,\xi)$, $(x,t,\rho,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$, є каратеодорівською, тобто функція $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ є неперервною для м.в. $(x,t) \in Q$, а функція $a_i(\cdot,\cdot,\rho,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ є вимірною для всіх $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, м.в. $(x,t) \in Q$ і всіх $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ маємо

$$|a_i(x,t,\rho,\xi)| \leq C_1\big(|\rho|^{p_0(x)/p_i'(x)} + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p_i'(x)}\big) + h_i(x,t),$$

де C_1 – додатна стала, $h_i \in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$;

$(\mathcal{A}_3)$ м.в. $(x,t) \in Q$ і для всіх (ρ_1,ξ^1), $(\rho_2,\xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\xi_i^1 - \xi_i^2) + \\ + \big(a_0(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_0(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\rho_1 - \rho_2) \geq 0; \tag{4.7}$$

$(\mathcal{A}_4)$ м.в. $(x,t) \in Q$ і для всіх $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ маємо

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,\rho,\xi)\xi_i + a_0(x,t,\rho,\xi)\rho \geq K\Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{p_i(x)} + |\rho|^{p_0(x)}\Big) - g(x,t),$$

де K – додатна стала, $g \in L_1(Q)$.

Зауважимо, що $g(x,t) \geq 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$. Це випливає з нерівності з умови $(\mathcal{A}_4)$, якщо взяти $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$, $\rho = 0$.

Через $\mathcal{C}$ позначаємо множину функцій $c(x,t,s,\rho)$, $(x,t,s,\rho) \in Q \times (-\tau_0, T) \times \mathbb{R}$ таких, що

$(\mathcal{C}_1)$ c – каратеодорівська функція, тобто фунція $c(x,t,s,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною для м.в. $(x,t,s) \in Q \times (-\tau_0, T)$, а функція $c(\cdot,\cdot,\cdot,\rho) : Q \times (-\tau_0, T) \to \mathbb{R}$ є вимірною для всіх $\rho \in \mathbb{R}$; крім того, $c(x,t,s,0) = 0$ для м.в. $(x,t,s) \in Q \times (-\tau_0, T)$;

$(\mathcal{C}_2)$ для м.в. $(x,t,s) \in Q \times (-\tau_0, T)$ і всіх ρ_1, $\rho_2 \in \mathbb{R}$ правильна нерівність

$$\big|c(x,t,s,\rho_1) - c(x,t,s,\rho_2)\big| \le L|\rho_1 - \rho_2|, \tag{4.8}$$

де L – додатна стала.

Зауваження 4.1. *З умов $c(x,t,s,0) = 0$ та $(\mathcal{C}_2)$ випливає, що для м.в. $(x,t,s) \in Q \times (-\tau_0, T)$ і всіх $\rho \in \mathbb{R}$ правильна така оцінка*

$$|c(x,t,s,\rho)| \le L|\rho|. \tag{4.9}$$

Тепер дамо означення узагальненого розв'язку задачі (4.4)–(4.6).

Означення 4.1. *Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P})$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}_p$, $c \in \mathcal{C}$, $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in F_{p'}(Q)$, $u_0 \in C([-\tau_0, 0]; L_2(\Omega))$. Узагальненим розв'язком задачі (4.4)–(4.6) називають функцію $u \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap C\left([-\tau_0, T]; L_2(\Omega)\right)$, яка задовольняє початкову умову*

$$||u(\cdot,t) - u_0(\cdot,t)||_{L_2(\Omega)} = 0 \qquad \forall t \in [-\tau_0, 0] \tag{4.10}$$

та інтегральну тотожність

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u) v_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u,\nabla u) v\varphi + v\varphi \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x,t,s,u(x,s))\, ds -$$

$$- uv\varphi'\Big\}\, dxdt = \iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n f_i v_{x_i}\varphi + f_0 v\varphi\Big\}\, dxdt \tag{4.11}$$

для кожних $v \in V_p(\Omega)$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$.

Теорема 4.1. *Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P})$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}_p$, $c \in \mathcal{C}$, $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in F_{p'}(Q)$, $u_0 \in C([-\tau_0, 0]; L_2(\Omega))$. Тоді задача (4.4)–(4.6) має єдиний узагальнений розв'язок u і він задовольняє оцінку*

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n \big|u_{x_i}(x,t)\big|^{p_i(x)} + |u(x,t)|^{p_0(x)}\Big\}\, dxdt \le$$

$$\leq C_2\left(\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n \big|f_i(x,t)\big|^{p_i'(x)}+g(x,t)\Big\}\,dxdt+\max_{t\in[-\tau_0,0]}\int\limits_\Omega |u_0(x,t)|^2\,dxdt\right), \tag{4.12}$$

де C_2 *– додатна стала, що залежить лише від* K, L, τ_0, τ^+, T *та* p_i^- $(i=\overline{0,n})$.

4.1.3 Доведення основного результату підрозділу

Далі для функції $w : Q \to \mathbb{R}$ використовуватимемо такі позначення:

$$a_j(w)(x,t) := a_j(x,t,w(x,t),\nabla w(x,t)), \quad (x,t)\in Q, \quad j=\overline{0,n},$$

$$c(w)(x,t,s) := c(x,t,s,w(x,s)), \quad (x,t,s)\in Q\times(-\tau_0,T). \tag{4.13}$$

Проведемо доведення теореми 4.1 у три кроки: спершу доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (4.4)–(4.6), пізніше доведемо його існування, а потім покажемо правильність оцінки (4.12).

Перший крок (єдиність розв'язку). Доведемо від супротивного. Припустимо протилежне і нехай u_1 і u_2 – два різні узагальнені розв'язки задачі (4.4)–(4.6). Розглянемо різницю між тотожністю (4.11) для $u=u_2$ та цією ж тотожністю для $u=u_1$. З леми 4.1 при $w=u_1-u_2$, $\theta(t)=e^{-\lambda t}$ $\forall t\in\mathbb{R}$ ($\lambda=\text{const}>0$), $t_1=0$, $t_2=T$ отримаємо (див. (4.3))

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda T}\int\limits_\Omega |w(x,T)|^2\,dx+\frac{\lambda}{2}\iint\limits_Q |w|^2e^{-\lambda t}dxdt+$$

$$+\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^n(a_i(u_1)-a_i(u_2))(u_{1,x_i}-u_{2,x_i})+(a_0(u_1)-a_0(u_2))(u_1-u_2)+$$

$$+w(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^t[c(u_1)(x,t,s)-c(u_2)(x,t,s)]\,ds\Big\}e^{-\lambda t}dxdt=0. \tag{4.14}$$

З умови $(\mathcal{A}_3)$ м.в. на Q маємо

$$\sum_{i=1}^n(a_i(u_1)-a_i(u_2))(u_{1,x_i}-u_{2,x_i})+(a_0(u_1)-a_0(u_2))(u_1-u_2)\geq 0. \tag{4.15}$$

Продовжимо $w(x,t)$ нулем для всіх $(x,t)\in\Omega\times\{(-\infty,-\tau_0)\cup(T,+\infty)\}$. Відмітимо, що $w(x,t)=0$ для м.в. $(x,t)\in\Omega\times[-\tau_0,0]$. Використовуючи

умову $(\mathcal{C}_2)$, теорему Фубіні і нерівність Гельдера, отримаємо

$$\Big|\iint\limits_Q w(x,t)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}[c(u_1)(x,t,s)-c(u_2)(x,t,s)]\,ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\Big|\le$$

$$\le\iint\limits_Q |w(x,t)|\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}|c(u_1)(x,t,s)-c(u_2)(x,t,s)|\,ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\le$$

$$\le L\int\limits_\Omega dx\int\limits_0^T|w(x,t)|\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}|w(x,s)|ds\Big)e^{-\lambda t}dt\le$$

$$\le L\int\limits_\Omega dx\int\limits_0^T|w(x,t)|e^{-\frac{\lambda t}{2}}\Big(e^{-\frac{\lambda t}{2}}\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|\,ds\Big)dt\le$$

$$\le L\sqrt{\tau^+}\int\limits_\Omega\left[\Big(\int\limits_0^T|w(x,t)|^2e^{-\lambda t}dt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^T e^{-\lambda t}dt\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|^2ds\Big)^{1/2}\right]dx. \quad (4.16)$$

Розглянемо другий інтеграл з правої частини нерівності (4.16). Змінюючи порядок інтегрування, для м.в. $x\in\Omega$ отримаємо

$$\int\limits_0^T e^{-\lambda t}dt\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|^2ds\le\int\limits_{-\tau^+}^{T}|w(x,s)|^2ds\int\limits_s^{s+\tau^+}e^{-\lambda t}dt=$$

$$=\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})\int\limits_0^T|w(x,s)|^2e^{-\lambda s}ds. \quad (4.17)$$

Підставляючи в (4.16) останній член з ланцюжка перетворень (4.17) замість першого, одержимо

$$\Big|\iint\limits_Q w(x,t)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}[c(u_1)(x,t,s)-c(u_2)(x,t,s)]\;ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\Big|\le$$

$$\le L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\iint\limits_Q|w(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt. \quad (4.18)$$

Використовуючи (4.15), (4.18), з (4.14) матимемо

$$\Big(\lambda/2 - L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\Big)\iint\limits_Q |w(x,t)|^2 e^{-\lambda t}dtdx \le 0. \tag{4.19}$$

Вибираючи значення λ таке, щоб виконувалась нерівність $\lambda/2 - L\sqrt{\lambda^{-1}\tau^+(1-e^{-\lambda\tau^+})} > 0$, з (4.19) отримаємо, що $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ для м.в. $(x,t) \in Q$, що суперечить нашому припущенню. Отже, узагальнений розв'язок задачі (4.4)–(4.6) єдиний.

Другий крок (існування розв'язку). Для доведення існування розв'язку задачі (4.4)-(4.6) використаємо метод Гальоркіна. Нехай $\{w_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ – повна лінійно незалежна система функцій з $V_p(\Omega)$, що є ортонормованою базою в $L_2(\Omega)$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$, покладемо

$$\alpha_k(t) := \int\limits_\Omega u_0(x,t)w_k(x)dx, \quad t \in [-\tau_0, 0]. \tag{4.20}$$

Очевидно, що $\alpha_k \in C([-\tau_0,0])$ $(k \in \mathbb{N})$.

Для кожного $m \in \mathbb{N}$ позначимо

$$u_{0,m}(x,t) := \sum_{k=1}^m \alpha_k(t)w_k(x), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0]. \tag{4.21}$$

Очевидно, що

$$\max_{t\in[-\tau_0,0]} ||u_0(\cdot,t) - u_{0,m}(\cdot,t)||_{L_2(\Omega)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.22}$$

Згідно з методом Гальоркіна для кожного $m \in \mathbb{N}$ покладемо

$$u_m(x,t) := \sum_{k=1}^m c_{m,k}(t)w_k(x), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\tau_0, T], \tag{4.23}$$

де $c_{m,1}, \ldots, c_{m,m}$ – неперервні на $[-\tau_0, T]$ та абсолютно неперервні на $[0,T]$ функції, що є розв'язками задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь із запізненням

$$\int\limits_\Omega u_{m,t}w_j\, dx + \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n (a_i(u_m) - f_i)w_{j,x_i} + (a_0(u_m) - f_0)w_j +$$

$$+ w_j(x) \int\limits_{t-\tau(t)}^t c(u_m)(x,t,s)ds \Big\}\, dx = 0, \quad t \in [0,T], \quad j = \overline{1,m}, \tag{4.24}$$

$$c_{m,k}(t) = \alpha_k(t), \quad t \in [-\tau_0, 0], \ k = \overline{1,m}. \tag{4.25}$$

Зауважимо, що з (4.21), (4.23) і (4.25) випливає

$$u_m(x,t) = u_{0,m}(x,t) \quad \text{для м.в. } (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0]. \tag{4.26}$$

З того, що функції $w_1, \ldots, w_m$ – лінійно незалежні, випливає, що матриця $(\int\limits_\Omega w_k w_j dx)_{k,j=1}^m$ є невиродженою. Отож, система (4.24) може бути трансформована до нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь із запізненням. Відповідно до теорем існування та продовження розв'язку цієї задачі (див. [9], [48]) маємо глобальний розв'язок $c_{1,m}, \ldots, c_{m,m}$ задачі (4.24), (4.25). Цей розв'язок визначений на інтервалі $[-\tau_0, T_m\rangle$, де $0 < T_m \leq T$. Тут дужка "$\rangle$" означають або ")", або "]". Далі отримємо оцінки, з яких випливатиме рівність $[-\tau_0, T_m\rangle = [-\tau_0, T]$.

Оцінимо u_m $(m \in \mathbb{N})$. Для цього домножимо рівняння з номером $j \in \{1, \ldots, m\}$ системи (4.24) на $c_{m,j} e^{-\lambda t}$, де $\lambda > 0$ – додатне число, і підсумуємо по $j \in \{1, \ldots, m\}$. Інтегруючи отриману рівність по $t \in [0, \sigma]$, де $\sigma \in [0, T_m\rangle$, і використовуючи формулу інтегрування частинами та тотожність (4.26), отримаємо

$$\frac{1}{2} e^{-\lambda\sigma} \int\limits_\Omega |u_m(x,\sigma)|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u_{0,m}(x,0)|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int\limits_0^\sigma \int\limits_\Omega |u_m(x,t)|^2 e^{-\lambda t} dx dt +$$

$$+ \int\limits_0^\sigma \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(u_m) u_{m,x_i} + a_0(u_m) u_m + u_m(x,t) \int\limits_{t-\tau(t)}^t c(u_m)(x,t,s) ds \Big\} e^{-\lambda t} dx dt =$$

$$= \int\limits_0^\sigma \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n f_i u_{m,x_i} + f_0 u_m \Big\} e^{-\lambda t} dx dt. \tag{4.27}$$

Продовжимо $u_m(x,t)$ нулем для всіх $(x,t) \in \Omega \times ((-\infty, -\tau_0) \cup (T, +\infty))$, і використовуючи (4.9) та нерівність Коші-Буняковського, отримаємо

$$\Big| \int\limits_0^\sigma \int\limits_\Omega u_m(x,t) \Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^t c(u_m)(x,t,s) \, ds \Big) e^{-\lambda t} dx dt \Big| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\sigma \int\limits_\Omega |u_m(x,t)| \Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^t |c(u_m)(x,t,s)| \, ds \Big) e^{-\lambda t} dx dt \leq$$

$$\leq L\int\limits_{\Omega} dx\int\limits_{0}^{\sigma}|u_m(x,t)|e^{-\lambda t}\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}|u_m(x,s)|ds\Big)dt\leq$$

$$\leq L\int\limits_{\Omega} dx\int\limits_{0}^{\sigma}|u_m(x,t)|e^{-\frac{\lambda t}{2}}\Big(e^{-\frac{\lambda t}{2}}\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|u_m(x,s)|\,ds\Big)dt\leq$$

$$\leq L\sqrt{\tau^+}\int\limits_{\Omega}\left[\Big(\int\limits_{0}^{\sigma}|u_m(x,t)|^2e^{-\lambda t}dt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{0}^{\sigma}e^{-\lambda t}dt\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|u_m(x,s)|^2ds\Big)^{1/2}\right]dx. \tag{4.28}$$

Оцінимо другий інтеграл з правої частини отриманої вище нерівності. Для м.в. $x\in\Omega$ маємо

$$\int\limits_{0}^{\sigma}e^{-\lambda t}dt\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|u_m(x,s)|^2ds\leq\int\limits_{-\tau^+}^{\sigma}|u_m(x,s)|^2ds\int\limits_{s}^{s+\tau^+}e^{-\lambda t}dt=$$

$$=\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})\int\limits_{-\tau_0}^{\sigma}|u_m(x,s)|^2e^{-\lambda s}ds=\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})\Big(\int\limits_{0}^{\sigma}|u_m(x,t)|^2e^{-\lambda t}dt+$$

$$+\int\limits_{-\tau_0}^{0}|u_{0,m}(x,t)|^2e^{-\lambda t}dt\Big). \tag{4.29}$$

Тут використали зміну порядку інтегрування та (4.26).

Підставляючи у праву частину нерівності (4.28) останній елемент одержаного вище ланцюжка перетворень замість першого та використовуючи нерівність Коші $ab\leq a^2+b^2$, маємо

$$\Big|\int\limits_{0}^{\sigma}\int\limits_{\Omega}u_m(x,t)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u_m)(x,t,s)ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\Big|\leq$$

$$\leq L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\Big(2\int\limits_{0}^{\sigma}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt+\int\limits_{-\tau_0}^{0}\int\limits_{\Omega}|u_{0,m}(x,t)|^2e^{-\lambda t}dxdt\Big). \tag{4.30}$$

З умови $(\mathcal{A}_4)$ одержуємо

$$\int\limits_{0}^{\sigma}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}a_i(u_m)u_{m,x_i}+a_0(u_m)u_m\}e^{-\lambda t}dxdt\geq$$

$$\geq \int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega \Big\{K\Big(\sum_{i=1}^n |u_{m,x_i}(x,t)|^{p_i(x)} + |u_m(x,t)|^{p_0(x)}\Big) - g(x,t)\Big\}e^{-\lambda t}dxdt. \quad (4.31)$$

Надалі нам знадобиться така нерівність Юнга

$$ab \leq \varepsilon|a|^{r(x)} + \varepsilon^{-\frac{1}{r^- -1}}|b|^{r'(x)}, \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad \text{для м.в. } x \in \Omega, \quad (4.32)$$

де $r \in L^\infty(\Omega)$, $r(x) > 1$, $r^- := \operatorname{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} r(x) > 1$, $r'(x) := r(x)/(r(x)-1)$ для м.в. $x \in \Omega$.

Використовуючи нерівність (4.32), отримуємо таку оцінку

$$\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n f_i u_{m,x_i} + f_0 u_m\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt \leq \varepsilon \int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n |u_{m,x_i}|^{p_i(x)} +$$

$$+|u_m|^{p_0(x)}\Big\}e^{-\lambda t}dxdt + \int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n \varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- -1}}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}e^{-\lambda t}dxdt, \quad (4.33)$$

де $\varepsilon \in (0,1]$ – довільне.

З (4.27), використовуючи (4.30), (4.31), (4.33), для будь-якого $\sigma \in (0, T_m\rangle$ маємо

$$e^{-\lambda\sigma}\int\limits_\Omega |u_m(x,\sigma)|^2\,dx + 2(K-\varepsilon)\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n |u_{m,x_i}(x,t)|^{p_i(x)} +$$

$$+|u_m(x,t)|^{p_0(x)}\Big\}e^{-\lambda t}dxdt + \Big(\lambda - 4L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\Big)\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega |u_m(x,t)|^2 e^{-\lambda t}dxdt \leq$$

$$\leq 2\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n \varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- -1}}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}e^{-\lambda t}dxdt + 2\int\limits_0^\sigma\int\limits_\Omega g(x,t)e^{-\lambda t}dxdt +$$

$$+\big(2L\tau_0\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})} + 1\big)\max_{t\in[-\tau_0,0]}\int\limits_\Omega |u_{0,m}(x,t)|^2 dx. \quad (4.34)$$

Беручи $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{1,K\}$, $\lambda = \lambda_0$, де λ_0 – який-небудь розв'язок нерівності

$$\lambda - 4L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})} > 0, \quad (4.35)$$

з (4.34) отримуємо

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_\Omega |u_m(x,t)|^2\,dx + C_5\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^n |u_{m,x_i}(x,t)|^{p_i(x)} + |u_m(x,t)|^{p_0(x)}\Big\}dxdt \leq$$

$$\leq C_6 \iint\limits_Q \{ \sum_{i=0}^{n} |f_i(x,t)|^{p_i'(x)} + g(x,t) \} dxdt + C_7 \max_{t\in[-\tau_0,0]} \int\limits_\Omega |u_{0,m}(x,t)|^2 dx, \qquad (4.36)$$

де C_5, C_6, C_7 – додатні сталі, що залежать лише від K, L, τ_0, τ^+, T та p_i^- $(i = \overline{0,n})$.

З (4.22) випливає, що послідовність $\{ \max\limits_{t\in[-\tau_0,0]} \int\limits_\Omega |u_{0,m}(x,t)|^2 dx \}_{m=1}^{\infty}$ обмежена. Звідси та з (4.36) отримуємо, що для всіх $\sigma \in (0, T_m\rangle$ правильні оцінки

$$\int\limits_\Omega |u_m(x,\sigma)|^2 \, dx \leq C_8, \qquad (4.37)$$

$$\int\limits_0^\sigma \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} |u_{m,x_i}(x,t)|^{p_i(x)} + |u_m(x,t)|^{p_0(x)} \Big\} \, dxdt \leq C_9, \qquad (4.38)$$

де сталі $C_8, C_9 > 0$ не залежать від m, T_m, σ. З оцінки (4.37) випливає, що існує незалежна від T_m стала, яка обмежує функції $c_{m,1}, \ldots, c_{m,m}$ на $[-\tau_0, T_m\rangle$. Отже, $[-\tau_0, T_m\rangle = [-\tau_0, T]$.

З умови $(\mathcal{A}_2)$ та оцінки (4.38) отримуємо

$$\iint\limits_Q |a_i(u_m)(x,t)|^{p_i'(x)} \, dxdt \leq C_{10}, \quad i = \overline{0,n}, \qquad (4.39)$$

де $C_{10} > 0$ – стала, яка не залежить від m.

Використовуючи (4.9), нерівність Коші-Буняковського, (4.22), (4.26) та (4.37), одержуємо

$$\iint\limits_Q \Big| \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)(x,t,s) \, ds \Big|^2 dxdt \leq L^2(T+\tau_0) \iint\limits_Q \Big(\int\limits_{-\tau_0}^{T} |u_m(x,s)|^2 \, ds \Big) dxdt \leq$$

$$\leq L^2 T(T+\tau_0) \Big(\iint\limits_Q |u_m(x,t)|^2 \, dxdt + \tau_0 \max_{t\in[-\tau_0,0]} \int\limits_\Omega |u_{0,m}(x,t)|^2 dx \Big) \leq C_{11}, \quad (4.40)$$

де $C_{11} > 0$ – стала, яка не залежить від m.

Оскільки простори $L_{p_i(\cdot)}(Q)$, $L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i = \overline{0,n})$ є рефлексивними (див. [68, с. 600]), то з оцінок (4.37)–(4.40), випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ (яку також позначатимемо через $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$) та функцій

$v_* \in L_2(\Omega)$, $u \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $\chi_i \in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i = \overline{0,n})$ і $\zeta \in L_2(Q)$ таких, що

$$u_m(\cdot,T) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v_*(\cdot) \quad \text{слабко в} \quad L_2(\Omega), \tag{4.41}$$

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *-\text{слабко в} \quad L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), \tag{4.42}$$

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q), \tag{4.43}$$

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \ \text{ слабко в } \ L_{p_i'(\cdot)}(Q) \quad (i = \overline{0,n}). \tag{4.44}$$

$$\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)ds \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \zeta \ \text{ слабко в } \ L_2(Q). \tag{4.45}$$

Тепер доведемо, що u – узагальнений розв'язок задачі (4.4)–(4.6).

Виберемо і зафіксуємо числа $j, m \in \mathbb{N}$ такі, що $m \geq j$. Домножимо рівняння системи (4.24) з номером j на функцію $\theta \in C^1([0,T])$ та проінтегруємо одержану рівність по $t \in [0,T]$. Звідси, спрямувавши m до ∞ та врахувавши (4.22), (4.26), (4.41)–(4.45), отримаємо

$$\theta(T)\int\limits_{\Omega} v_*(x)w_j(x)\,dx - \theta(0)\int\limits_{\Omega} u_0(x,0)w_j(x)\,dx-$$

$$-\iint\limits_{Q} uw_j\theta'\,dxdt+\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-f_i)w_{j,x_i}+(\chi_0+\zeta-f_0)w_j\Big\}\theta\,dxdt=0. \tag{4.46}$$

З цієї рівності випливає, що для довільних $v \in V_p(\Omega)$ та $\theta \in C^1([0,T])$ виконується рівність

$$\theta(T)\int\limits_{\Omega} v_*(x)v(x)\,dx - \theta(0)\int\limits_{\Omega} u_0(x,0)v(x)\,dx-$$

$$-\iint\limits_{Q} uv\theta'\,dxdt+\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-f_i)v_{x_i}+(\chi_0+\zeta-f_0)v\Big\}\theta\,dxdt=0. \tag{4.47}$$

Зауважимо, що якщо взяти $\theta = \varphi \in C_c^1(0,T)$ в (4.47), то отримаємо тотожність

$$\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-f_i)v_{x_i}\varphi+(\chi_0+\zeta-f_0)v\varphi-uv\varphi'\Big\}dxdt=0 \ \ \forall\, v \in V_p(\Omega),\ \forall\varphi \in C_c^1(0,T). \tag{4.48}$$

Згідно з лемою 4.1 з (4.48) маємо

$$u \in C([0,T]; L_2(\Omega)) \tag{4.49}$$

та для будь-яких $v \in V_p(\Omega)$ і $\theta \in C^1([0,T])$ виконується рівність

$$\theta(T) \int\limits_{\Omega} u(x,T)v(x)\,dx - \theta(0) \int\limits_{\Omega} u(x,0)v(x)\,dx -$$

$$- \iint\limits_{Q} uv\theta'\,dxdt + \iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (\chi_i - f_i)v_{x_i} + (\chi_0 + \zeta - f_0)v \Big\}\theta\,dxdt = 0. \tag{4.50}$$

Порівнюючи (4.47) та (4.50), отримуємо

$$u(x,0) = u_0(x,0), \quad u(x,T) = v_*(x) \quad \text{для м.в.} \quad x \in \Omega. \tag{4.51}$$

Покладемо $u(x,t) = u_0(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0)$. Покажемо, що так продовжена функція належить до простору $C([-\tau_0,T]; L_2(\Omega))$. Справді, з огляду на (4.49) приходимо до висновку, що звуження u на $\overline{\Omega} \times [0,T]$ належить до $C([0,T]; L_2(\Omega))$. З умов теореми маємо, що $u_0 \in C([-\tau_0,0]; L_2(\Omega))$. Також, $u(x,0) = u_0(x,0)$ (див. (4.51)). Звідси випливає, що $u \in C([-\tau_0,T]; L_2(\Omega))$. Очевидно, що виконується (4.10).

Відповідно до (4.48), щоб довести рівність (4.11) досить показати правильність рівності

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \chi_i v_{x_i} + (\chi_0 + \zeta)v \Big\} dx = \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(u)v_{x_i} + \Big(a_0(u) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u)\,ds \Big) v \Big\} dx \tag{4.52}$$

для для м.в. $t \in (0,T)$ і будь-яких $v \in V_p(\Omega)$. Для цього використаємо метод монотонності (див. [72]).

Нехай функція $w_m \in W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(-\tau_0, T; L_2(\Omega))$ така, що $w_m(x,t) = u_{0,m}(x,t)$ для м.в. $(x,t) \in \Omega \times (-\tau_0, 0)$ і $w(x,t) = \widetilde{w}(x,t)$ для м.в. $(x,t) \in Q$, де $\widetilde{w} \in W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q)$ – довільна. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ введемо позначення

$$W_m := \iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (a_i(u_m) - a_i(w_m))(u_{m,x_i} - w_{m,x_i}) + (a_0(u_m) - a_0(w_m))(u_m - w_m) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}|u_m - w_m|^2 + (u_m - w_m) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} (c(u_m) - c(w_m))\,ds \Big\} e^{-\lambda t}\,dxdt,$$

де $\lambda > 0$ – таке, що виконується нерівність $\lambda/2 - L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})} > 0$.

Використовуючи умову $(\mathcal{A}_3)$, для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$W_m \geq \iint\limits_Q \Big\{\frac{\lambda}{2}|u_m - w_m|^2 + (u_m - w_m)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}(c(u_m) - c(w_m))\,ds\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt.$$

З того, що

$$\Big|\iint\limits_Q (u_m - w_m)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}[c(u_m) - c(w_m)]\,ds\Big)e^{-\lambda t}dxdt\Big| \leq$$

$$\leq L\sqrt{\tau^+\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda\tau^+})}\iint\limits_Q |u_m - w_m|^2 e^{-\lambda t}dxdt$$

(див. (4.18)), і вибору λ, випливає нерівність $W_m \geq 0$.

Маємо

$$W_m = \iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(u_m)u_{m,x_i} + a_0(u_m)u_m + \frac{\lambda}{2}|u_m|^2 + u_m\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u_m)\,ds\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt-$$

$$-\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big[a_i(u_m)w_{m,x_i}+a_i(w_m)(u_{m,x_i}-w_{m,x_i})\big]+a_0(u_m)w_m+a_0(w_m)(u_m-w_m)+$$

$$+\lambda u_m w_m-\frac{\lambda}{2}|w_m|^2+w_m\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u_m)ds+(u_m-w_m)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(w_m)ds\Big\}e^{-\lambda t}dxdt \geq 0,\ \ m \in \mathbb{N}. \tag{4.53}$$

З (4.53), використовуючи (4.27) з $\sigma = T$, матимемо

$$W_m = \iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^{n} f_i u_{m,x_i} + f_0 u_m\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt - \frac{1}{2}e^{-\lambda T}\int\limits_\Omega |u_m(x,T)|^2\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_{0,m}(x,0)|^2\,dx - \iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big[a_i(u_m)w_{m,x_i} + a_i(w_m)(u_{m,x_i} - w_{m,x_i})\big]+$$

$$+a_0(w_m)(u_m - w_m) + \lambda u_m w - \frac{\lambda}{2}|w_m|^2 + a_0(u_m)w_m + w_m\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u_m)ds+$$

$$+(u_m - w_m)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(w_m)\,ds\Big\}e^{-\lambda t}dxdt \geq 0 \tag{4.54}$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$.

Враховуючи (4.41) і другу рівність з (4.51), маємо

$$\varliminf_{m\to\infty} ||u_m(\cdot,T)||_{L_2(\Omega)} \geq ||u(\cdot,T)||_{L_2(\Omega)}. \tag{4.55}$$

Визначимо $w(x,t) := u_0(x,t)$ для $(x,t) \in \Omega \times (-\tau_0, 0)$, і $w(x,t) := \widetilde{w}(x,t)$ для $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$. Тоді,

$$w_m \to w \text{ сильно в } L_2(\Omega \times (-\tau_0, T)). \tag{4.56}$$

Тепер покажемо, що

$$\Big|\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(w_m)ds - \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(w)ds\Big| \to 0 \quad \text{в} \quad L_2(Q). \tag{4.57}$$

Продовжимо функції w, w_m нулем на $\Omega \times \{(-\infty, -\tau_0) \cup (T, +\infty)\}$. Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$, нерівність Коші-Буняковського, (4.22) та означення функцій w_m, w, одержимо

$$\iint\limits_{Q}\Big|\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(w_m)ds - \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(w)ds\Big|^2 dxdt \leq \iint\limits_{Q}\Big|\int\limits_{-\tau_0}^{T}(c(w_m)-c(w))ds\Big|^2 dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q}\Big|\int\limits_{-\tau_0}^{0}(c(w_m)-c(w))ds\Big|^2 dxdt \leq \tau_0 \iint\limits_{Q}\Big(\int\limits_{-\tau_0}^{0}|c(w_m)-c(w)|^2 ds\Big)dxdt \leq$$

$$\leq L^2\tau_0 \iint\limits_{Q}\int\limits_{-\tau_0}^{0}|w_m(x,s)-w(x,s)|^2 ds \leq L^2 T\tau_0 \int\limits_{-\tau_0}^{0}\int\limits_{\Omega}|u_{0,m}(x,t)-u_0(x,t)|^2 dxdt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.58}$$

Враховуючи (4.22), (4.43)–(4.45), (4.55), (4.57), з (4.54) матимемо

$$0 \leq \varlimsup_{m\to\infty} W_m \leq \iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n} f_i u_{x_i} + f_0 u\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda T}\int\limits_{\Omega}|u(x,T)|^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_0(x,0)|^2\,dx-\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big[\chi_i w_{x_i}+a_i(w)(u_{x_i}-w_{x_i})\big]+$$

$$+\chi_0 w+a_0(w)(u-w)+\lambda uw-\frac{\lambda}{2}|w|^2+w\zeta+(u-w)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(w)\,ds\Big\}e^{-\lambda t}dxdt. \quad (4.59)$$

Використовуючи лему 4.1 з $\theta\equiv e^{-\lambda t}$ і першу рівність з (4.51), з (4.48) отримуємо

$$\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\chi_i u_{x_i}+(\chi_0+\zeta)u+\frac{\lambda}{2}|u|^2\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt=\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}f_i u_{x_i}+f_0 u\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda T}\int\limits_{\Omega}|u(x,T)|^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_0(x,0)|^2\,dx. \quad (4.60)$$

Таким чином, з (4.59) і (4.60) випливає

$$\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-a_i(w))(u_{x_i}-w_{x_i})+(\chi_0-a_0(w))(u-w)+$$

$$+\frac{\lambda}{2}|u-w|^2+(u-w)\Big(\zeta-\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(w)\,ds\Big)\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt\geq 0. \quad (4.61)$$

Підставивши у нерівність (4.61) $w=u-\mu v\varphi$, де $v\in V_p(\Omega)$, $\mu>0$, $\varphi\in C_c^1(-\tau_0,T)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset(0,T)$, і поділивши одержану нерівність на μ, отримаємо

$$\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-a_i(u-\mu v\varphi))v_{x_i}\varphi+(\chi_0-a_0(u-\mu v\varphi))v\varphi+$$

$$+\lambda\mu|v\varphi|^2+\Big(\zeta-\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u-\mu v\varphi)\,ds\Big)v\varphi\Big\}e^{-\lambda t}\,dxdt\geq 0. \quad (4.62)$$

Спрямувавши в (4.62) μ до 0 і використавши умову $(\mathcal{A}_3)$ та теорему Лебега про мажоруючу збіжність, одержимо

$$\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-a_i(u))v_{x_i}+(\chi_0-a_0(u))v+v\Big(\zeta-\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u)\,ds\Big)\Big\}\varphi e^{-\lambda t}\,dxdt=0,$$

де $v \in V_p(\Omega)$, $\varphi \in C_c^1(0,T)$ – довільні функції. Звідси легко випливає (4.52). Отож, ми показали, що u – узагальнений розв'язок задачі (4.4)–(4.6).

Третій крок. На підставі леми 4.1, взявши $w = u$, $t_1 = 0$, $t_2 = T$, $\theta = e^{-\lambda t}$, $\lambda = \lambda_0$, де λ_0 – який-небудь розв'язок нерівності (4.35), одержимо

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda T}\int\limits_{\Omega}|u(x,T)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_0(x,0)|^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\iint\limits_{Q}|u(x,t)|^2 e^{-\lambda t}dxdt+$$

$$+\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}a_i(u)u_{x_i} + a_0(u)u + u\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(u)ds\Big\}e^{-\lambda t}dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}f_i u_{x_i} + f_0 u\Big\}e^{-\lambda t}dxdt. \tag{4.63}$$

Міркуючи аналогічно, як при отримані (4.36) з нерівності (4.27) замінивши при цьому u_m на u, здобудемо нерівність

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega}|u(x,t)|^2\,dx + C_5\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}(x,t)|^{p_i(x)} + |u(x,t)|^{p_0(x)}\Big\}dxdt \le$$

$$\le C_6\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)} + g(x,t)\Big\}dxdt + C_7\max_{t\in[-\tau_0,0]}\int\limits_{\Omega}|u_0(x,t)|^2dx.$$

з якої легко випливає нерівність (4.12). ■

4.2 Задача Фур'є для параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності

4.2.1 Основні позначення та допоміжні факти

Позначимо $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times S$, $Q_{t_1,t_2} := \Omega \times (t_1, t_2)$ для довільних дійсних t_1 і t_2 $(t_1 < t_2)$.

Введемо потрібні нам фукційні простори. Нехай $G = \Omega$, або $G = Q_{t_1,t_2}$ $(-\infty < t_1 < t_2 < +\infty)$, або $G = Q$. Припустимо, що $r \in L_\infty(\Omega)$, $r(x) \ge 1$ для м.в. $x \in \Omega$. Розглянемо лінійний простір $L_{r(\cdot)}(G)$ вимірних функцій $v : G \to \mathbb{R}$ таких, що $\rho_{G,r}(v) < \infty$, де $\rho_{G,r}(v) := \int_\Omega |v(x)|^{r(x)}\,dx$, якщо $G = \Omega$, $\rho_{G,r}(v) := \iint_{Q_{t_1,t_2}} |v(x,t)|^{r(x)}\,dxdt$, якщо $G = Q_{t_1,t_2}$ $(-\infty < t_1 < t_2 < +\infty)$, і

$\rho_{G,r}(v) := \iint_Q |v(x,t)|^{r(x)}\,dxdt$, якщо $G = Q$. Цей простір є банаховим щодо норми $||v||_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \le 1\}$ (див. [68, с. 599]) і називається *узагальненим простором Лебега.*

Через $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ позначимо простір вимірних функцій $g\colon Q \to \mathbb{R}$ таких, що звуження g на Q_{t_1,t_2} належить до $L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ для всіх $t_1, t_2 \in S$. Цей простір є повним локально опуклим простором щодо сім'ї півнорм $\left\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} \,\middle|\, t_1, t_2 \in S\ (t_1 < t_2)\right\}$. Послідовність $\{g_m\}$ збігається сильно (відповідно, слабко) в $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, якщо послідовність $\{g_m|_{Q_{t_1,t_2}}\}$ збігається сильно (відповідно, слабко) в $L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$. Аналогічним чином визначаємо простір $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Розглянемо вектор-функцію $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$, яка задовольняє умову:

$(\mathcal{P})$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ функція $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$ — вимірна і така, що

$$p_i^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_i(x) \ge 2\,, \qquad p_i^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_i(x) < +\infty\,.$$

Під $p' = (p'_0, \ldots, p'_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ розумітимемо вектор-функцію таку, що $\frac{1}{p_i(x)} + \frac{1}{p'_i(x)} = 1$ для кожного $i \in \{0, 1, ..., n\}$ і м.в. $x \in \Omega$.

Через $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ позначатимемо узагальнений простір Соболєва, складений із функцій $v \in L_{p_0(\cdot)}(\Omega)$ таких, що $v_{x_i} \in L_{p_i(\cdot)}(\Omega)$ $(i = \overline{1,n})$. Він є банаховим простором з нормою $||v||_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)} := ||v||_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n ||v_{x_i}||_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega)}$. Під $\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ розумітимемо підпростір простору $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$, який є замиканням простору $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega}) := \left\{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\right\}$ в $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$. Позначимо $V_p(\Omega) := \widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$.

Для довільних $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, під $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ розумітимемо лінійний простір функцій $w \in L_{p_0(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ таких, що $w_{x_i} \in L_{p_i(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$, з нормою $\|w\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} := \|w\|_{L_{p_0(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} + \sum_{i=1}^n \|w_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})}$. Через $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ позначаємо підпростір простору $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$, складений із функцій v таких, що $v(\cdot,t) \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ для м.в. $t \in [t_1, t_2]$.

Під $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ розуміємо лінійний простір визначених і вимірних на Q функцій таких, що їх звуження на Q_{t_1,t_2} належить простору $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ для всіх $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$. Цей простір є повним локально опуклим простором щодо сім'ї півнорм $\left\{\|\cdot\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} \,\middle|\, t_1, t_2 \in S\ (t_1 < t_2)\right\}$.

Через $F_{p',\mathrm{loc}}(Q)$ позначимо простір вектор-функцій $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ таких,

що $f_i \in L_{p_i'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і $f_i = 0$ майже всюди в деякому околі поверхні Σ_1 для кожного $i \in \{0, ..., n\}$.

Під $C_c^1(I)$, де I – числовий проміжок, розумітимемо лінійний простір визначених на I неперервно диференційовних фінітних функцій, причому, якщо $I = (t_1, t_2)$, то замість $C_c^1((t_1, t_2))$ писатимемо $C_c^1(t_1, t_2)$.

Зауваження 4.2. *Зазначимо, що з того, що $w \in L_2(Q)$ випливає*

$$\lim_{\sigma \to -\infty} \int\limits_{\sigma-1}^{\sigma} \int\limits_{\Omega} |w|^2 dxdt = 0. \tag{4.64}$$

Якщо $w \in L_2(Q) \cap C(S, L_2(\Omega))$, то звідси випливає існування послідовності $\{t_k\}_{k=0}^{\infty} \subset S$ такої, що $t_k \to -\infty$ при $k \to +\infty$ і

$$\lim_{k \to +\infty} \int\limits_{\Omega} |w(x, t_k)|^2 dx = 0. \tag{4.65}$$

4.2.2 Формулювання задачі та основного результату підрозділу

В даному підрозділі розглядаємо задачу: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка (в певному сенсі) задовольняє рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x, t, s, u(x, s)) ds =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \big(f_i(x, t)\big)_{x_i} + f_0(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{4.66}$$

крайові умови

$$u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t, u, \nabla u)\, \nu_i \Big|_{\Sigma_1} = 0 \tag{4.67}$$

та аналог початкової умови

$$\iint\limits_{Q} |u(x, t)|^2 dxdt < \infty. \tag{4.68}$$

Тут $\tau : S \to \mathbb{R}$ — неперервна обмежена функція така, що $\tau(t) \geq 0$ для всіх $t \in S$, $\tau^+ := \sup\limits_{t \in S} \tau(t)$, а $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $c : Q \times S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i : Q \to \mathbb{R}$ ($i = \overline{0, n}$) — задані дійснозначні функції.

Введемо класи вихідних даних.

Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P})$. Через $\mathcal{A}_p$ позначимо множину наборів $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ дійснозначних функцій $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,n})$, які задовольняють умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ функція a_i є каратеодорівською, тобто фунція $a_i(x, t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ є неперервною для м.в. $(x, t) \in Q$, а фунція $a_i(\cdot, \cdot, \rho, \xi) : Q \to \mathbb{R}$ є вимірною для будь-яких $(\rho, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$; $a_i(x, t, 0, 0) = 0$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ та м.в. $(x, t) \in Q$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, м.в. $(x, t) \in Q$ і будь-яких $(\rho, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ маємо

$$|a_i(x, t, \rho, \xi)| \le C_1\Big(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p_i'(x)} + |\rho|^{p_0(x)/p_i'(x)}\Big) + h_i(x, t),$$

де $C_1 = \mathrm{const} > 0$, $h_i \in L_{p_i'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$;

$(\mathcal{A}_3)$ для м.в. $(x, t) \in Q$ і всіх (ρ_1, ξ^1), $(\rho_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x, t, \rho_1, \xi^1) - a_i(x, t, \rho_2, \xi^2)\big)(\xi_i^1 - \xi_i^2) + \\ &+ \big(a_0(x, t, \rho_1, \xi^1) - a_0(x, t, \rho_2, \xi^2)\big)(\rho_1 - \rho_2) \ge \\ \ge K_1\Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i^1 - \xi_i^2|^{p_i(x)} &+ |\rho_1 - \rho_2|^{p_0(x)}\Big) + K_2|\rho_1 - \rho_2|^2, \end{aligned} \tag{4.69}$$

де K_1, K_2 – додатні сталі.

Через $\mathcal{C}$ позначимо множину функцій $c(x, t, s, \rho)$, $(x, t, s, \rho) \in Q \times S \times \mathbb{R}$ таких, що

$(\mathcal{C}_1)$ функція c є каратеодорівською, тобто фунція $c(x, t, s, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною функцією для м.в. $(x, t, s) \in Q \times S$, а фунція $c(\cdot, \cdot, \cdot, \rho) : Q \times S \to \mathbb{R}$ є вимірною для всіх $\rho \in \mathbb{R}$; крім того, $c(x, t, s, 0) = 0$ для м.в. $(x, t, s) \in Q \times S$;

$(\mathcal{C}_2)$ існує стала $L > 0$ (залежна від c) така, що для м.в. $(x, t, s) \in Q \times S$ і будь-яких ρ_1, $\rho_2 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\big|c(x, t, s, \rho_1) - c(x, t, s, \rho_2)\big| \le L|\rho_1 - \rho_2|. \tag{4.70}$$

Зауваження 4.3. *З умови* $c(x,t,s,0)=0$ *(див.* $(\mathcal{C}_1)$ *) і* $(\mathcal{C}_2)$ *випливає, що для м.в.* $(x,t,s)\in Q\times S$ *і всіх* $\rho\in\mathbb{R}$ *правильна оцінка:*

$$|c(x,t,s,\rho)|\le L|\rho|. \tag{4.71}$$

Тепер дамо означення узагальненого розв'язку задачі (4.66), (4.67).

Означення 4.2. *Нехай* p *задовольняє умову* $(\mathcal{P})$, $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{A}_p$, $c\in\mathcal{C}$, $(f_0,f_1,\dots,f_n)\in F_{p',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$. *Узагальненим розв'язком задачі (4.66)–(4.68) називаємо функцію* $u\in\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})\cap L_2(Q)\cap C\left(S;L_2(\Omega)\right)$ *таку, що виконується інтегральна тотожність*

$$\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u)v_{x_i}\varphi+a_0(x,t,u,\nabla u)v\varphi+v\varphi\int\limits_{t-\tau(t)}^t c(x,t,s,u(x,s))\,ds-$$
$$-uv\varphi'\Big\}\,dxdt=\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^n f_iv_{x_i}\varphi+f_0v\varphi\Big\}\,dxdt \tag{4.72}$$

для кожних $v\in V_p(\Omega)$ *і* $\varphi\in C_c^1(-\infty,0)$.

Основним результатом цього підрозділу є таке твердження.

Теорема 4.2. *Нехай* p *задовольняє умову* $(\mathcal{P})$, $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{A}_p$, $c\in\mathcal{C}$, $(f_0,f_1,\dots,f_n)\in F_{p',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *і, крім того,* $f_i\in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i=\overline{0,n})$, *та*

$$K_2-L\tau^+>0. \tag{4.73}$$

Тоді задача (4.66)–(4.68) *має єдиний узагальнений розв'язок, він належить простору* $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ *і для нього правильна оцінка*

$$\sup_{t\in S}\int\limits_\Omega|u(x,t)|^2\,dx+\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^n\big|u_{x_i}(x,t)\big|^{p_i(x)}+|u(x,t)|^{p_0(x)}+|u(x,t)|^2\Big\}\,dxdt\le$$
$$\le C_2\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^n\big|f_i(x,t)\big|^{p_i'(x)}\Big\}\,dxdt, \tag{4.74}$$

де $C_2>0$ *— стала, яка залежить лише від* $K_1,K_2,\ L,\ \tau^+$ *і* p_i^- $(i=\overline{0,n})$.

4.2.3 Доведення основного результату підрозділу

Для функції $w : Q \to \mathbb{R}$ позначимо

$$a_j(w)(x,t) := a_j(x,t,w(x,t),\nabla w(x,t)), \quad (x,t) \in Q, \quad j = \overline{0,n},$$
$$c(w)(x,t,s) := c(x,t,s,w(x,s)), \quad (x,t,s) \in Q \times S,$$
$$\partial_i w = w_{x_i} \ (i = \overline{1,n}), \quad \partial_0 w = w.$$

Проведемо доведення теореми 4.2 в три етапи: спершу доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (4.66)–(4.68), пізніше його існування і, а потім – правильність оцінки (4.74).

1-й етап (єдиність розв'язку). Доведемо від супротивного. Нехай u_1 і u_2 — два різні узагальнені розв'язки даної задачі. Позначимо $w := u_1 - u_2$. Розглянувши різницю між (4.72) з $u = u_2$ і (4.72) з $u = u_1$ отримаємо

$$-\iint\limits_Q wv\varphi'\,dxdt + \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_1) - a_i(u_2))\partial_i v +$$
$$+ v\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\big(c(u_1) - c(u_2)\big)ds\Big]\varphi\,dxdt = 0 \quad \forall v \in V_p(\Omega), \quad \forall \varphi \in C_c^1(-\infty,0). \quad (4.75)$$

На підставі леми 4.1 при $\theta(t) = 1,\ t \in \mathbb{R}$, з рівності (4.75) отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |w(x,\sigma_2)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |w(x,\sigma_1)|^2\,dx + \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_\Omega \Big[\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_1) - a_i(u_2))(\partial_i u_1 - \partial_i u_2) +$$
$$+ w\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\big(c(u_1) - c(u_2)\big)ds\Big]\,dxdt = 0, \quad (4.76)$$

де $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ $(\sigma_1 < \sigma_2)$ — довільні числа.

З умови $(\mathcal{A}_3)$ для м.в. $(x,t) \in Q$ матимемо

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_1) - a_i(u_2))(\partial_i u_1 - \partial_i u_2) \geq K_1\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_1 - \partial_i u_2|^{p_i(x)} + K_2|u_1 - u_2|^2. \quad (4.77)$$

Розглянемо останній доданок рівності (4.76). Використавши умову $(\mathcal{C}_2)$,

теорему Фубіні і нерівність Коші-Буняковського, для м.в. $x \in \Omega$ матимемо

$$\Big|\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} w(x,t)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\big[c(u_1)(x,t,s)-c(u_2)(x,t,s)\big]ds\Big)dt\Big| \le$$

$$\le L\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}|w(x,t)|\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|ds\Big)dt \le$$

$$\le L\sqrt{\tau^+}\left(\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}|w(x,t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|^2ds\Big)dt\right)^{1/2}. \tag{4.78}$$

Тепер розглянемо другий інтеграл у правій частині нерівності (4.78). Змінивши порядок інтегрування і припустивши, що $w(x,t)=0$ для $x\in\Omega,\ t>0$, для м.в. $x\in\Omega$ матимемо

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|w(x,s)|^2ds\Big)dt \le \int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_2}|w(x,s)|^2ds\int\limits_{s}^{s+\tau^+}dt =$$

$$=\tau^+\Big(\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}|w(x,s)|^2ds+\int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}|w(x,s)|^2ds\Big). \tag{4.79}$$

Підставляючи в (4.78) останній член ланцюжка нерівностей (4.79) замість першого і використовуючи нерівності: $\sqrt{ab}\le\varepsilon a+(4\varepsilon)^{-1}b,\ \sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}$ $(a\ge 0, b\ge 0, \varepsilon>0)$, матимемо

$$\Big|\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} w(x,t)\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}(c(u_1)(x,t,s)-c(u_1)(x,t,s))ds\Big)dt\Big| \le$$

$$\le L\tau^+\Big((1+\varepsilon_1)\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}|w(x,t)|^2dt+(4\varepsilon_1)^{-1}\int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}|w(x,t)|^2dt\Big), \tag{4.80}$$

де $\varepsilon_1>0$ – довільне число.

Використавши (4.77), (4.80), з (4.76) отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_2)|^2\,dx\ +K_1\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}\big(\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_1-\partial_i u_2|^{p_i(x)}\big)dxdt+$$

$$+\ (K_2-(1+\varepsilon_1)L\tau^+)\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}|w(x,t)|^2\,dxdt\le$$

$$\le\ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_1)|^2\,dx\ +(4\varepsilon_1)^{-1}L\tau^+\int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}\int\limits_{\Omega}|w(x,t)|^2\,dxdt.$$

Вибираючи значення $\varepsilon_1>0$ таким, щоб виконувалась нерівність $K_2-(1+\varepsilon_1)L\tau^+>0$, та враховуючи (4.73), матимемо

$$\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_2)|^2\,dx\le\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_1)|^2\,dx+C_3\int\limits_{\sigma_1-\tau^+}^{\sigma_1}\int\limits_{\Omega}|w(x,t)|^2\,dxdt,\qquad(4.81)$$

де C_3 – стала, яка від σ_1 незалежить.

Оскільки $w\in L_2(Q)\cap C(S,L_2(\Omega))$, то згідно із зауваженням 4.2, існує послідовність $\{\sigma_{1,k}\}_{k=0}^{\infty}\subset S$ така, що $\sigma_{1,k}\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$ і

$$\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_{1,k})|^2\,dx+C_3\int\limits_{\sigma_{1,k}-\tau^+}^{\sigma_{1,k}}\int\limits_{\Omega}|w(x,t)|^2\,dxdt\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Зафіксуємо в нерівності (4.81) довільним чином вибране σ_2, і замість σ_1 візьмемо $\sigma_{1,k}$ таке, що $\sigma_{1,k}<\sigma_2$ для $k\in\mathbb{N}$. Спрямувавши k до $+\infty$, отримаємо рівність $\int\limits_{\Omega}|w(x,\sigma_2)|^2\,dx=0$. Оскільки $\sigma_2\in S$ — довільне, то $w(x,t)=0$ для м.в. $(x,t)\in Q$, що суперечить нашому припущенню. Отже, узагальнений розв'язок задачі (4.66)–(4.68) єдиний.

2-й етап (існування розв'язку). Для кожного $m\in N$ покладемо $Q_m=\Omega\times(-m,0]$, $\tau_m=\min\limits_{-m\le t\le 0}\{t-\tau(t)\}$. Очевидно, що $\tau_m\le -m$. Введемо позначення

$$f_{i,m}(\cdot,t):=\begin{cases}f_i(\cdot,t), & -m<t\le 0,\\ 0, & t\le -m,\end{cases}$$

і розглянемо задачу: знайти функцію $u_m \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_m) \cap C([-\tau_m, 0]; L_2(\Omega))$, яка задовольняє початкову умову

$$u_m(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [\tau_m, -m] \tag{4.82}$$

(якщо $\tau_m = -m$, то $[\tau_m, -m] := \{-m\}$) і рівняння (4.66) в Q_m у сенсі інтегральної тотожності

$$\iint\limits_{Q_m} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u_m,\nabla u_m) v_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u_m,\nabla u_m) v\varphi + v\varphi \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x,t,s,u_m(x,s))ds -$$
$$-u_m v\varphi' \Big\} dxdt = \iint\limits_{Q_m} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} f_{i,m} v_{x_i}\varphi + f_{0,m} v\varphi \Big\} dxdt, \quad v \in V_p, \ \varphi \in C^1_c(-m,0). \tag{4.83}$$

Існування і єдиність розв'язку цієї задачі випливає з результатів підрозділу 4.1. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ продовжимо u_m нулем на $\Omega \times \mathbb{R}$ і позначимо це продовження також через u_m.

Тепер нам потрібно отримати оцінки u_m для кожного $m \in \mathbb{N}$. Зазначимо, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ функція u_m належить до простору $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q) \cap C(S; L_2(\Omega))$ і задовольняє інтегральну тотожність (4.72), в якій замість f_i стоїть $f_{i,m}$, тобто правильною є тотожність

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u_m,\nabla u_m) v_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u_m,\nabla u_m) v\varphi + v\varphi \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(x,t,s,u_m(x,s))ds -$$
$$-u_m v\varphi' \Big\} dxdt = \iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} f_{i,m} v_{x_i}\varphi + f_{0,m} v\varphi \Big\} dxdt, \quad v \in V_p(\Omega), \ \varphi \in C^1_c(-\infty,0). \tag{4.84}$$

Застосувавши лему 4.1, при $\theta(t) = 2$, $\sigma_1, \sigma_2 \subset S$, $(\sigma_1 < \sigma_2)$ до рівності (4.84), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} |u_m(x,\sigma_2)|^2 dx - \int\limits_{\Omega} |u_m(x,\sigma_1)|^2 dx + 2 \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i=0}^{n} a_i(u_m) \partial_i u_m \Big] dxdt +$$
$$+2 \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int\limits_{\Omega} u_m \Big[\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)(x,t,s)ds \Big] dxdt = 2 \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} f_{i,m} \partial_i u_m \Big\} dxdt. \tag{4.85}$$

Далі нам буде потрібна нерівність Юнга, записана у такій формі

$$ab \le \varepsilon |a|^{r(x)} + \varepsilon^{-\frac{1}{r^- - 1}} |b|^{r'(x)} \quad \text{для м. в. } x \in \Omega, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1, \tag{4.86}$$

де $r \in L^\infty(\Omega)$, $r(x) > 1$, $r'(x) := r(x)/(r(x)-1)$ для м.в. $x \in \Omega$, $r^- := \operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x) > 1$.

Використавши нерівність (4.86), отримаємо оцінку

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} f_{i,m} \partial_i u_m \Big\} dxdt \le \varepsilon_2 \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)} \Big\} dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_2^{-\frac{1}{p_i^- - 1}} |f_i(x,t)|^{p_i'(x)} \Big\} dxdt, \tag{4.87}$$

де $\varepsilon_2 > 0$ – довільне число.

Аналогічно, як була отримана нерівність (4.80) (використовуючи (4.71) замість умови $(\mathcal{C}_2)$), можна одержати нерівність

$$\Big| \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} u_m(x,t) \Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)(x,t,s) ds \Big) dt \Big| \le L\tau^+ \Big((1+\varepsilon_3) \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} |u_m(x,t)|^2 dt +$$

$$+ (4\varepsilon_3)^{-1} \int\limits_{\sigma_1 - \tau^+}^{\sigma_1} |u_m(x,t)|^2 dt \Big), \tag{4.88}$$

де $\varepsilon_3 > 0$ – довільне число.

З умов $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_3)$ матимемо

$$\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i=0}^{n} a_i(u_m) \partial_i u_m \Big] dxdt \ge \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} \Big[K_1 \sum_{i=0}^{n} |\partial_i u|^{p_i(x)} + K_2 |u|^2 \Big] dxdt. \tag{4.89}$$

З нерівності (4.85), використавши оцінки (4.87)–(4.89) і взявши $\sigma_1 < -m$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} |u_m(x,\sigma_2)|^2 \, dx + 2(K_1 - \varepsilon_2) \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)} \Big\} dxdt +$$

$$+ 2\big(K_2 - (1+\varepsilon_3) L\tau^+ \big) \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega} |u_m(x,t)|^2 dxdt \le$$

$$\leq 2\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_2^{-\frac{1}{p_i^- -1}}|f_{i,m}(x,t)|^{p_i'(x)}\Big\}dxdt. \tag{4.90}$$

Вибравши значення $\varepsilon_3>0$ таким, щоб виконувалась нерівність $K_2-(1+\varepsilon_3)L\tau^+>0$, та поклавши $\varepsilon_2=\frac{1}{2}\min\{K_1,1\}$ і використавши (4.73), з (4.90) матимемо

$$\sup_{\sigma\in S}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\sigma)|^2\,dx+C_4\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}+|u_m(x,t)|^2\Big\}dxdt\leq$$

$$\leq C_5\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|f_{i,m}(x,t)|^{p_i'(x)}\Big\}dxdt, \tag{4.91}$$

де C_4, C_5 — додатні сталі, що залежать тільки від K_1, K_2, L, τ^+ і p_i^- $(i=\overline{0,n})$.

Врахувавши означення $f_{i,m}$, з (4.91) матимемо

$$\sup_{\sigma\in S}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,\sigma)|^2\,dx+\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}+|u_m(x,t)|^2\Big\}dxdt\leq$$

$$\leq C_6\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}\Big\}dxdt, \tag{4.92}$$

де C_6 – додатна стала, яка залежить тільки від τ^+, K_1, K_2, L і p_i $(i=\overline{0,n})$.

Покажемо, що $\{u_m\}$ – фундаментальна послідовність. Виберемо довільні $k,l\in\mathbb{N}$ такі, що $k<l$, і розглянемо різницю між u_k та u_l. Для довільного $\sigma\in S$ такого, що $-k\leq\sigma\leq 0$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega}|u_k(x,\sigma)-u_l(x,\sigma)|^2\,dx+\int\limits_{-l}^{\sigma}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_k-\partial_i u_l|^{p_i(x)}+|u_k-u_l|^2\Big\}dxdt\leq$$

$$\leq C_7\int\limits_{-l}^{-k}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=0}^{n}|f_{i,k}(x,t)-f_{i,l}(x,t)|^{p_i'(x)}dxdt, \tag{4.93}$$

де C_7 — додатна стала, яка не залежить від k,l.

Умова $f_i\in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i=\overline{0,n})$ означає, що права частина нерівності (4.93) прямує до нуля, коли k і l прямують до $+\infty$. Це означає, що послідовність $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ – фундаментальна у просторі $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)\cap L_2(Q)\cap C(S;L_2(\Omega))$.

Отже, існує функція $u \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q) \cap C(S; L_2(\Omega))$ така, що

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \qquad \text{сильно в} \quad \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q) \cap C(S; L_2(\Omega)). \tag{4.94}$$

З умови $(\mathcal{C}_2)$, теореми Фубіні, нерівності Коші-Буняковського та (4.94) матимемо

$$\iint\limits_Q \Big| \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)(x,t,s)ds - \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u)(x,t,s)ds \Big|^2 dxdt \le$$

$$\le \tau^+ \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{\Omega} \Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} |c(u_m)(x,t,s) - c(u)(x,t,s)|^2 ds \Big) dxdt \le$$

$$\le L^2 \tau^+ \int\limits_{\Omega} \Big(\int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{t-\tau^+}^{t} |u_m(x,s) - u(x,s)|^2 ds\, dt \Big) dx \le$$

$$\le L^2 \tau^+ \int\limits_{\Omega} \int\limits_{-\infty}^{0} \Big(\int\limits_{s}^{s+\tau^+} |u_m(x,s) - u(x,s)|^2 dt\, ds \Big) dx =$$

$$= L^2 \tau^{+2} \iint\limits_Q |u_m(x,t) - u(x,t)|^2 dxdt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отже,

$$\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u_m)ds \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(u)ds \quad \text{сильно в} \quad L_2(Q). \tag{4.95}$$

З умови $(\mathcal{A}_2)$ та (4.92) для кожного $i \in \{0, 1, ..., n\}$ маємо оцінку

$$\iint\limits_Q |a_i(u_m)|^{p_i'(x)} dxdt \le C_{10} \iint\limits_Q \Big(\sum_{i=0}^{n} |\partial_i u_m|^{p_i(x)} + |h_i|^{p_i'(x)} \Big) dxdt \le C_{11}, \tag{4.96}$$

де C_{10} і C_{11} – додатні сталі, які не залежать від m.

З (4.96) отримуємо, що послідовність $\{a_i(u_m)\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою в $L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Звідси і з (4.94) матимемо, що існують підпослідовність послідовності $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ (яку позначатимемо так само, як і саму послідовність $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$) і функції $\chi_i \in L_{p_i(\cdot)}(Q)$ $(i = \overline{0,n})$ такі, що

$$\partial_i u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \partial_i u \quad \text{м.в. на} \quad Q, \quad i = \overline{0,n}, \tag{4.97}$$

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \quad \text{слабко в} \quad L_{p_i'(\cdot)}(Q), \quad i=\overline{0,n}. \tag{4.98}$$

На підставі умови $(\mathcal{A}_1)$ і (4.97) матимемо

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_i(u) \quad \text{м.в.} \quad Q, \quad i=\overline{0,n}. \tag{4.99}$$

Згідно з [72, лема 1.3] та збіжностей (4.98), (4.99) отримаємо

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_i(u) \quad \text{слабко в} \quad L_{p_i'(\cdot)}(Q), \quad i=\overline{0,n}. \tag{4.100}$$

Покажемо, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (4.66)–(4.68). Справді, спрямувавши у рівності (4.84) m до $+\infty$ та взявши до уваги збіжності (4.94), (4.100), (4.95) і означення функцій $f_{i,m}$ $(i=\overline{0,n})$, отримаємо виконання тотожності (4.72). Отже, ми довели, що u є узагальненим розв'язком задачі (4.66), (4.67).

3-й етап (правильність оцінки). З (4.92) та (4.94) випливає правильність оцінки (4.74). Отже, теорема 4.2 доведена.

4.3 Задача без початкових умов для сильно нелінійних еволюційних включень із нелокальним змінним запізненням

4.3.1 Основні позначення та допоміжні факти

Нехай V – сепарабельний рефлексивний банахів простір над полем дійсних чисел з нормою $\|\cdot\|$, а H – гільбертів простір над полем дійсних чисел зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $|\cdot|$. Припускаємо, що простір V вкладається щільно, неперервно і компактно в H, тобто V є підмножиною H, замикання V в H збігається з H, існує стала $\lambda>0$ така, що

$$\lambda|v|^2 \le \|v\|^2 \quad \forall v\in V, \tag{4.101}$$

та для будь-якої послідовності $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, обмеженої в V, існує елемент $v\in V$ та підпослідовність $\{v_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ такі, що $v_{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} v$ сильно в H.

Нехай V' і H' – спряжені до V та H відповідно простори і вважатимемо (провівши відповідне ототожнення функціоналів), що простір H' є підпростором простору V'. Ототожнивши (на підставі теореми Рісса) простори H

та H', отримаємо неперервні та щільні вкладення

$$V \subset H \subset V'. \tag{4.102}$$

Зауважимо, що в даному випадку $\langle g, v\rangle = (g, v)$ для будь-яких $v \in V, g \in H$, де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означає дію елемента з V' на елемент з V (канонічний добуток на $V \times V'$). Тому далі вживатимемо позначення $(\cdot, \cdot)$ замість $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Нехай $S := (-\infty, 0]$. Через $C(S; X)$, де X — довільний банахів простір, позначатимемо простір визначених і неперервних на S зі значеннями в X функцій. Скажемо, що послідовність $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до w в $C(S; X)$, якщо для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ послідовність звужень членів послідовності $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ на відрізок $[t_1, t_2]$ збігається до звуження w на цей відрізок в $C([t_1, t_2]; X)$.

Нехай $q \in [1, \infty]$, q' – спряжене до q, тобто, $1/q + 1/q' = 1$. Під $L^q_{\mathrm{loc}}(S; X)$ розумітимемо лінійний простір визначених і вимірних на S зі значеннями в банаховому просторі X функцій таких, що для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ їх звуження на відрізок $[t_1, t_2]$ належать простору $L^q(t_1, t_2; X)$. Скажемо, що послідовність $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ обмежена (відповідно, збігається до w сильно (відповідно, слабко чи $*$-слабко)) в $L^q_{\mathrm{loc}}(S; X)$, якщо для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ послідовність звужень членів послідовності $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ на відрізок $[t_1, t_2]$ обмежена (відповідно, збігається до звуження w на цей відрізок сильно (відповідно, слабко чи $*$-слабко)) в $L^q(t_1, t_2; X)$.

Під $D'(-\infty, 0; V'_w)$ розумітимемо простір лінійних неперервних функціоналів на $D(-\infty, 0)$ зі значеннями в V'_w (тут і далі $D(-\infty, 0)$ – простір визначених на $(-\infty, 0)$ нескінченно диференційовних і фінітних на функцій, V'_w – лінійний простір V' зі слабкою топологією). Легко переконатися, враховуючи (4.102), що простори $L^q_{\mathrm{loc}}(S; V)$, $L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$, $L^{q'}_{\mathrm{loc}}(S; V')$ можна ототожнити з відповідними підпросторами простору розподілів $D'(-\infty, 0; V'_w)$. Це, зокрема, дозволяє говорити про похідні w' функцій w з $L^q_{\mathrm{loc}}(S; V)$ і $L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ в сенсі розподілів $D'(-\infty, 0; V'_w)$ і про належність таких похідних до $L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ чи $L^{q'}_{\mathrm{loc}}(S; V')$.

Введемо ще простори

$$H^1(S; H) := \big\{ w \in L^2(S; H) \mid w' \in L^2(S; H) \big\},$$

$$W_{q,\mathrm{loc}}(S;V) := \{w \in L^q_{\mathrm{loc}}(S;V) \,\big|\, w' \in L^{q'}_{\mathrm{loc}}(S;V')\}, \quad q > 1.$$

З відомих результатів (див., наприклад, [8, с. 177-179]) легко випливає, що $H^1(S;H) \subset C(S;H)$, $W_{q,\mathrm{loc}}(S;V) \subset C(S;H)$ і для довільної функції w з $H^1(S;H)$ або $W_{q,\mathrm{loc}}(S;V)$ функція $t \mapsto |w(t)|^2$ є абсолютно неперервною на будь-якому відрізку променя S та виконується рівність

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 = 2(w'(t), w(t)) \quad \text{для м.в.} \quad t \in S. \tag{4.103}$$

Зауваження 4.4. *З включення $w \in L^2(S;H)$ випливає, що*

$$\lim_{\sigma \to -\infty} \int\limits_{\sigma-1}^{\sigma} |w(t)|^2 dt = 0.$$

Якщо ж $w \in L^2(S;H) \cap C(S;H)$, то існує послідовність $\{t_k\}_{k=0}^{\infty} \subset S$ така, що $t_k \to -\infty$ при $k \to +\infty$ і

$$\lim_{k \to +\infty} |w(t_k)|^2 = 0.$$

У цьому підрозділі використовуватимемо такі відомі факти.

Твердження 4.5 (нерівність Гельдера [8, ст. 158]). *Нехай $q \in [1, \infty]$, $1/q + 1/q' = 1$, t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$, X — банахів простір, X' — спряжений до X простір, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ — дія елемента з X' на елемент з X. Тоді, якщо $v \in L^q(t_1, t_2; X)$ і $w \in L^{q'}(t_1, t_2; X')$, то $\langle w(\cdot), v(\cdot) \rangle_X \in L^1\big(t_1, t_2\big)$ і*

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle w(t), v(t) \rangle_X \, dt \leqslant \|w\|_{L^{q'}(t_1,t_2;X')} \|v\|_{L^q(t_1,t_2;X)}.$$

При $q = 2$ цю нерівність називають нерівністю Коші-Буняковського.

Твердження 4.6 ([103, ст. 173,179]). *Нехай X — банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$, а $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ – послідовність елементів простору X, яка слабко або $*$-слабко збіжна до v в X. Тоді $\varliminf\limits_{k \to \infty} \|v_k\|_X \geqslant \|v\|_X$.*

Твердження 4.7 ([20, теорема Обена], [27, ст. 393]). *Нехай $q > 1, r > 1$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$ і $\mathcal{W}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$ – банахові простори такі, що $\mathcal{W} \overset{c}{\subset} \mathcal{L} \circlearrowleft \mathcal{B}$ (тут $\overset{c}{\subset}$ означає компактне, а $\circlearrowleft$ – неперервне вкладення). Тоді*

$$\{w \in L^q(t_1, t_2; \mathcal{W}) \mid w' \in L^r(t_1, t_2; \mathcal{B})\} \overset{c}{\subset}$$

$$\overset{c}{\subset} \Big(L^q(t_1, t_2; \mathcal{L}) \cap C([t_1, t_2]; \mathcal{B}) \Big). \tag{4.104}$$

Зауваження 4.5. *Вкладення (4.104) розуміється так: якщо послідовність* $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ *є обмеженою у просторі* $L^q(t_1, t_2; \mathcal{W})$ *і послідовність* $\{w'_m\}_{m=1}^{\infty}$ *є обмеженою у просторі* $L^r(t_1, t_2; \mathcal{B})$, *то існують функція* $w \in L^q(t_1, t_2; \mathcal{L}) \cap C([t_1, t_2]; \mathcal{B})$, *а підпослідовність* $\{w_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ *послідовності* $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ *такі, що* $w_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w$ *в* $C([t_1, t_2]; \mathcal{B})$ *і сильно в* $L^q(t_1, t_2; \mathcal{L})$.

Твердження 4.8. *Якщо послідовність* $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ *є обмеженою у просторі* $L^p_{\mathrm{loc}}(S; V)$, *де* $p > 1$, *і послідовність* $\{w'_m\}$ *є обмеженою у просторі* $L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$, *то існують функція* $w \in L^p_{\mathrm{loc}}(S; V)$, $w' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ *і підпослідовність* $\{w_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ *послідовності* $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ *такі, що* $w_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w$ *в* $C(S; H)$ *і слабко в* $L^p_{\mathrm{loc}}(S; V)$, *а також,* $w'_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w'$ *слабко в* $L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$.

Доведення. З твердження 4.7 при $q = p$, $r = 2$, $\mathcal{W} = V$, $\mathcal{L} = \mathcal{B} = H$ випливає, що для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ з послідовності звужень членів послідовності $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ на відрізок $[t_1, t_2]$ можна вибрати підпослідовність, яка збігається в $C([t_1, t_2]; H)$ і слабко в $L^p(t_1, t_2; V)$, а послідовність похідних членів цієї підпослідовності слабко збігається в $L^2(t_1, t_2; H)$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ виберемо підпослідовність $\{w_{m_{k,j}}\}_{j=1}^{\infty}$ даної послідовності, яка збігається в $C([-k, 0]; H)$ і слабко в $L^p(-k, 0; V)$ до деякої функції $\widehat{w}_k \in C([-k, 0]; H) \cap L^p(-k, 0; V)$, а послідовність $\{w'_{m_{k,j}}\}_{j=1}^{\infty}$ слабко збігається до її похідної $\widehat{w}'_k$ в $L^2(-k, 0; H)$. При цьому виборі слідкуємо за тим, щоби послідовність $\{w_{m_{k+1,j}}\}_{j=1}^{\infty}$ була підпослідовністю послідовності $\{w_{m_{k,j}}\}_{j=1}^{\infty}$. Тепер згідно з діагональним процесом вибираємо потрібну нам підпослідовність у вигляді $\{w_{m_{j,j}}\}_{j=1}^{\infty}$, а функцію w визначимо за правилом: для кожного $k \in \mathbb{N}$ приймаємо $w(t) := \widehat{w}_k(t)$ для $t \in (-k, -k+1]$. ∎

Далі використовуватимемо нерівність Коші у вигляді:

$$ab \le \varepsilon a^2 + (4\varepsilon)^{-1} b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0. \tag{4.105}$$

4.3.2 Формулювання задачі та основних результатів підрозділу

Нехай $\Phi : V \to \mathbb{R}_\infty := (-\infty, +\infty]$ – власний функціонал, тобто $\mathrm{dom}(\Phi) := \{v \in V : \ \Phi(v) < +\infty\} \neq \emptyset$, який задовольняє такі умови:

$(\mathcal{A}_1)$ $\quad \Phi\big(\alpha v + (1-\alpha)w\big) \leqslant \alpha\Phi(v) + (1-\alpha)\Phi(w) \quad \forall\, v, w \in V,\ \forall\, \alpha \in [0,1],$

тобто, Φ є *опуклим*,

$(\mathcal{A}_2)$ $\quad v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$ в $V \quad \Longrightarrow \quad \varliminf\limits_{k\to\infty} \Phi(v_k) \geq \Phi(v),$

тобто, Φ є *напівнеперервним знизу.*

Позначимо через $\mathrm{dom}(\Phi) := \{v \in V : \ \Phi(v) < +\infty\}$ *ефективну область визначення* функціоналу Φ.

Нагадаємо, що *субдиференціалом* функціоналу Φ називають відображення $\partial\Phi : V \to 2^{V'}$, визначене за правилом

$$\partial\Phi(v) := \{v^* \in V' \mid \Phi(w) \geqslant \Phi(v) + (v^*, w - v) \quad \forall\, w \in V\},$$

для довільного $v \in V$, а *областю визначення* субдиференціалу $\partial\Phi$ – множину $D(\partial\Phi) := \{v \in V \,|\, \partial\Phi(v) \neq \emptyset\}$. Ми ототожнюватимемо субдиференціал $\partial\Phi$ з його графіком, вважаючи, що $[v, v^*] \in \partial\Phi$ тоді і лише тоді, коли $v^* \in \partial\Phi(v)$, тобто $\partial\Phi = \{[v, v^*] \mid v \in D(\partial\Phi),\ v^* \in \partial\Phi(v)\}$. Р. Рокафеллар у роботі [92, теорема A] довів, що субдиференціал $\partial\Phi$ є *максимальним монотонним оператором*, тобто

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant 0 \quad \forall\, [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi$$

і для будь-якого елемента $[v_1, v_1^*] \in V \times V'$ правильна імплікація

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant 0 \quad \forall\, [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi \Longrightarrow [v_1, v_1^*] \in \partial\Phi.$$

Додатково припустимо, що виконуються ще такі умови:

$(\mathcal{A}_3)$ існують сталі $p > 2,\ K_1 > 0$ такі, що

$$\Phi(v) \geqslant K_1\|v\|^p \quad \forall\, v \in \mathrm{dom}(\Phi);$$

крім того, $\Phi(0) = 0$;

$(\mathcal{A}_4)$ існує стала $K_2 > 0$ така, що для довільних $[v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi$:

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant K_2|v_1 - v_2|^2.$$

Зауваження 4.6. *З умови* $(\mathcal{A}_3)$ *випливає, що* $\Phi(v) \geq \Phi(0) + (0, v - 0)$ $\forall v \in V$, *тобто* $[0,0] \in \partial\Phi$. *З цього і умови* $(\mathcal{A}_4)$ *маємо*

$$(v^*, v) \geq K_2|v|^2 \quad \forall\, [v, v^*] \in \partial\Phi. \tag{4.106}$$

Нехай $c : S \times S \times H \to H$ – функція, яка задовольняє умову:

$(\mathcal{C})$ для будь-якого $v \in H$ відображення $c(\cdot,\cdot,v) : S \times S \to H$ є вимірним, та існує стала $L > 0$ така, що правильна нерівність

$$|c(t,s,v_1) - c(t,s,v_2)| \leq L|v_1 - v_2|$$

для м.в. $(t,s) \in S \times S$ і всіх $v_1, v_2 \in H$; крім того, $c(t,s,0) = 0$ для м.в. $(t,s) \in S \times S$.

Зауваження 4.7. *З умови* $(\mathcal{C})$ *випливає, що*

$$|c(t,s,v)| \leq L|v| \tag{4.107}$$

для м.в. $(t,s) \in S \times S$ *і всіх* $v \in H$.

Розглянемо еволюційну варіаційну нерівність

$$u'(t) + \partial\Phi\big(u(t)\big) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u(s))\,ds \ni f(t), \quad t \in S, \tag{4.108}$$

де $f : S \to V'$ – задана функція, $\tau : S \to \mathbb{R}$ – задана неперервна функція така, що $\tau(t) \geq 0$ для всіх $t \in S$, $\tau^+ := \sup\limits_{t\in S} \tau(t) < \infty$, $u : S \to V$ – шукана функція.

Зауваження 4.8. *З умови* $(\mathcal{C})$ *і зауваження 4.4 випливає, що для будь-якої функції* $w \in L^2(S;H)$ *функція* $t \mapsto \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,w(s))\,ds$ *належить до* $L^2(S;H)$.

Справді, з (4.107), припустивши, що $w(t) = 0$ *для всіх* $t > 0$, *і використавши нерівність Коші-Буняковського та змінивши порядок інтегрування отримаємо*

$$\int\limits_{\sigma}^{0} \Big| \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,w(s))\,ds \Big|^2 dt \leq L^2\tau^+ \int\limits_{\sigma}^{0} \int\limits_{t-\tau^+}^{t} |w(s)|^2\,dsdt \leq$$

$$\leq L^2\tau^+ \int\limits_{\sigma-\tau^+}^{0} |w(s)|^2 ds \int\limits_{s}^{s+\tau^+} dt = (L\tau^+)^2 \int\limits_{\sigma-\tau^+}^{0} |w(s)|^2 ds \leq$$

$$\leq (L\tau^+)^2 ||w||_{L^2(S;H)} \tag{4.109}$$

для будь-якого $\sigma \in S$. *Отже,* $t \mapsto \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,w(s))\,ds$ *належить до* $L^2(S;H)$.

Означення 4.3. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)-(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{C})$ *і* $f \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S;V')$. *Функцію* u *називатимемо* розв'язком *варіаційної нерівності (4.108), якщо вона задовольняє такі умови:*

1) $u \in W_{p,\mathrm{loc}}(S;H) \cap L^2(S;H)$;

2) $u(t) \in D(\partial\Phi)$ *для м.в.* $t \in S$;

3) *існує функція* $g \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S;V')$ *така, що для м.в.* $t \in S$ *маємо* $g(t) \in \partial\Phi\big(u(t)\big)$ *і*

$$u'(t) + g(t) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u(s))\,ds = f(t) \quad \text{в } V'.$$

Задачу на знаходження розв'язку варіаційної нерівності (4.108) при заданих Φ, c, τ і f називатимемо задачею без початкових умов для еволюційної варіаційної нерівності (4.108) або, коротко, задачею $\mathbf{P}(\Phi,c,\tau,f)$, а функцію u – її розв'язком.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_4)$, $(\mathcal{C})$. *Припустимо, що* $f \in L^2(S;H)$ *і*

$$K_2 - L\tau^+ > 0. \tag{4.110}$$

Тоді задача $\boldsymbol{P}(\Phi,c,\tau,f)$ *має єдиний розв'язок і він належить простору* $L^\infty(S;V) \cap L^p(S;V) \cap H^1(S;H)$ *та задовольняє оцінки:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in S} \|u(t))\| \leqslant C_1 \Big(\int_S |f(t)|^2\,dt\Big)^{1/p},$$

$$\int_S \big(\|u(t)\|^p + |u(t)|^2 + |u'(t)|^2\big)\,dt \leqslant C_2 \int_S |f(t)|^2\,dt, \tag{4.111}$$

де C_1, C_2 *– додатні сталі, що залежать лише від* K_1, K_2, L, τ^+.

Зауваження 4.9. *Замість задачі* $\boldsymbol{P}(\Phi, c, \tau, f)$ *можна розглядати таку задачу. Нехай* K *– опукла і замкнена множина в* V, $A : V \to V'$ *– монотонний, обмежений і семінеперервний оператор такий, що* $(A(v), v) \geq \widetilde{K}_1 \|v\|^p \quad \forall v \in V$, *де* $\widetilde{K}_1 = \mathrm{const} > 0$. *Задача полягає у знаходженні функції* $u \in W_{p,\mathrm{loc}}(S)$ *такої, що для м.в.* $t \in S$ *маємо* $u(t) \in K$ *і*

$$(u'(t) + A(u(t)) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t, s, u(s))\, ds, v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t)) \quad \forall\, v \in K.$$

4.3.3 Обґрунтування основних результатів підрозділу

Визначимо функціонал $\Phi_H : H \to \mathbb{R}_\infty$ за правилом: $\Phi_H(v) := \Phi(v)$, якщо $v \in V$, і $\Phi_H(v) := +\infty$ в іншому випадку. Відзначимо, що з умов $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, леми IV.5.2 та твердження IV.5.2 монографії [96] випливає, що Φ_H є власним, опуклим і напівнеперервним знизу функціоналом на просторі H, $\mathrm{dom}(\Phi_H) = \mathrm{dom}(\Phi) \subset V$ і $\partial\Phi_H = \partial\Phi \cap (V \times H)$, де $\partial\Phi_H : H \to 2^H$ – субдиференціал функціоналу Φ_H. Крім того, з умови $(\mathcal{A}_3)$ випливає, що $0 \in \partial\Phi_H(0)$.

Далі використовуватимемо такі твердження.

Твердження 4.9 ([96, лема IV.4.3]). *Нехай* $w \in H^1(a, b; H)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ *та* $g \in L^2(a, b; H)$ *такі, що* $w(t) \in D(\partial\Phi_H)$ *і* $g(t) \in \partial\Phi_H\big(w(t)\big)$ *для м.в.* $t \in (a, b)$. *Тоді функція* $\Phi_H\big(w(\cdot)\big)$ *є абсолютно неперервною на відрізку* $[a, b]$ *і для будь-якої функції* $h : [a, b] \to H$ *такої, що* $h(t) \in \partial\Phi_H\big(w(t)\big)$ *для м.в.* $t \in (a, b)$, *виконується рівність*

$$\frac{d}{dt}\Phi_H\big(w(t)\big) = (h(t), w'(t)) \quad \text{для м.в. } t \in (a, b).$$

Твердження 4.10 ([44, твердження 3.12], [96, твердження IV.5.2]). *Нехай* $T > 0$, $\widetilde{f} \in L^2(0, T; H)$ *і* $w_0 \in \mathrm{dom}(\Phi)$. *Тоді існує єдина функція* $w \in H^1(0, T; H)$ *така, що* $w(0) = w_0$ *і для м.в.* $t \in (0, T)$ *правильними є включення* $w(t) \in D(\partial\Phi_H)$ *та*

$$w'(t) + \partial\Phi_H\big(w(t)\big) \ni \widetilde{f}(t) \quad \text{в } H, \tag{4.112}$$

тобто, існує функція $\widetilde{g} \in L^2(0, T; H)$ *така, що для м.в.* $t \in (0, T)$ *маємо* $\widetilde{g}(t) \in \partial\Phi_H(w(t))$ *та*

$$w'(t) + \widetilde{g}(t) = \widetilde{f}(t) \quad \text{в } H. \tag{4.113}$$

Твердження 4.11. *Нехай* $t_0 < 0$ *– будь-яке фіксоване число, а* $\tau_0 := \min\limits_{t\in[t_0,0]}(t-\tau(t))$. *Припустимо, що* $\widetilde{f} \in L^2(t_0,0;H)$, $w_0 \in C([\tau_0,t_0];H)$ *(якщо* $\tau_0 = t_0$, *то* $[\tau_0,t_0] = \{t_0\}$ *),* $w_0(t) \in \mathrm{dom}(\Phi)$ *для всіх* $t \in [\tau_0,t_0]$. *Тоді існує і єдина функція* $w \in C([\tau_0,0];H) \cap H^1(t_0,0;H)$ *така, що* $w(t) = w_0(t)$ *для кожного* $t \in [\tau_0,t_0]$ *і для м.в.* $t \in [t_0,0]$ *правильними є включення* $w(t) \in D(\partial\Phi_H)$ *та*

$$w'(t) + \partial\Phi_H\big(w(t)\big) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,w(s))\,ds \ni \widetilde{f}(t) \quad \text{в } H, \tag{4.114}$$

а точніше, існує функція $\widetilde{g} \in L^2(t_0,0;H)$ *така, що для м.в.* $t \in [t_0,0]$ *маємо* $\widetilde{g}(t) \in \partial\Phi_H(w(t))$ *і*

$$w'(t) + \widetilde{g}(t) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,w(s))\,ds = \widetilde{f}(t) \quad \text{в } H, \tag{4.115}$$

Доведення. Нехай $M := \{w \in C([\tau_0,0];H) \mid w(t) = w_0(t)\ \forall t \in [\tau_0,t_0]\}$. Розглянемо на множині M метрику

$$\rho(w_1,w_2) = \max_{t\in[t_0,0]}\left[e^{-\alpha(t-t_0)}|w_1(t)-w_2(t)|\right],\ w_1,w_2 \in M,$$

де $\alpha > 0$ – стала, значення якої уточнимо пізніше. Очевидно, що пара (M,ρ) є повним метричним простором. Визначимо оператор $A : M \to M$ за правилом: функції $\widetilde{w} \in M$ ставиться у відповідність функція $\widehat{w} \in M \cap H^1(t_0,0;H)$ така, що для м.в. $t \in [t_0,0]$ правильні включення $\widehat{w}(t) \in D(\partial\Phi_H)$ та

$$\widehat{w}'(t) + \partial\Phi_H(\widehat{w}(t)) \ni \widetilde{f}(t) - \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,\widetilde{w}(s))\,ds \quad \text{в} \quad H. \tag{4.116}$$

Очевидно, що варіаційна нерівність (4.116) співпадає із варіаційною нерівністю (4.112) після заміни $[0,T]$ на $[t_0,0]$, w на $\widetilde{w}$, $\widetilde{f}$ на $\widehat{f} - \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,\widetilde{w}(s))ds$, умови $w(0) = w_0$ на умову $\widehat{w}(t_0) = w_0(t_0)$. Отож, використовуючи твердження 4.10 отримуємо, що оператор A є коректно визначеним. Покажемо, що оператор A є оператором стиску при відповідному значенні $\alpha > 0$. Справді, нехай $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2$ – довільні функції з M і $\widehat{w}_1 := A\widetilde{w}_1$, $\widehat{w}_2 = A\widetilde{w}_2$. Згідно

з (4.116) (див. (4.113)) існують функції $\widetilde{g}_1$ і $\widetilde{g}_2$ з $L^2(t_0,0;H)$ такі, що для кожного $k\in\{1,2\}$ і м.в. $t\in(t_0,0)$ маємо $\widetilde{g}_k(t)\in\partial\Phi_H(\widehat{w}_k(t))$ та

$$\widehat{w}_k'(t)+\widetilde{g}_k(t)=\widetilde{f}(t)-\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}c(t,s,\widetilde{w}_k(s))\,ds \ \text{ в } H, \tag{4.117}$$

причому $\widehat{w}_k(t)=w_0(t)$ для м.в. $t\in[\tau_0,t_0]$.

Віднімаючи тотожність (4.117) при $k=2$ від тотожності (4.117) при $k=1$ і домножуючи одержану рівність на $\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t)$, після простих перетворень для м.в. $t\in(t_0,0)$ отримаємо

$$\big((\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t))',\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t)\big)+(\widetilde{g}_1(t)-\widetilde{g}_2(t),\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t))=$$

$$=-\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\big(c(t,s,\widetilde{w}_1(s))-c(t,s,\widetilde{w}_2(s))\big)\,ds,\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t)\Big), \tag{4.118}$$

$$\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t)=0 \quad \text{для м.в.} \quad t\in[\tau_0,t_0]. \tag{4.119}$$

Проінтегруємо рівність (4.118) по t від t_0 до $\sigma\in(t_0,0]$, врахувавши, що для м.в. $t\in(t_0,0)$ правильною є рівність

$$\big((\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t))',\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t)\big)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t)|^2.$$

У результаті отримуємо рівність

$$\frac{1}{2}|\widehat{w}_1(\sigma)-\widehat{w}_2(\sigma)|^2+\int_{t_0}^{\sigma}(\widetilde{g}_1(t)-\widetilde{g}_2(t),\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t))\,dt=$$

$$=-\int\limits_{t_0}^{\sigma}\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}(c(t,s,\widetilde{w}_1(s))-c(t,s,\widetilde{w}_2(s)))\,ds,\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t)\Big)dt. \tag{4.120}$$

Врахувавши умову $(\mathcal{A}_4)$, для м.в. $t\in(t_0,0)$ отримуємо нерівність

$$(\widetilde{g}_1(t)-\widetilde{g}_2(t),\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t))\geqslant K_2|\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t))|^2. \tag{4.121}$$

Звідси, використовуючи умову $(\mathcal{C})$, нерівності Коші-Буняковського і (4.105), для м.в. $t\in(t_0,0)$ маємо

$$\Big|\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}[c(t,s,\widetilde{w}_1(s))-c(t,s,\widetilde{w}_2(s))]\,ds,\widehat{w}_1(t)-\widehat{w}_2(t)\Big)\Big|\leq$$

$$\leq \Big| \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} [c(t,s,\widetilde{w}_1(s)) - c(t,s,\widetilde{w}_2(s))]\, ds \Big| \, |\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)| \leq$$

$$\leq L\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} |\widetilde{w}_1(s) - \widetilde{w}_2(s)|\, ds \Big) |\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)| \leq$$

$$\leq \varepsilon |\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)|^2 + \frac{L^2}{4\varepsilon}\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} |\widetilde{w}_1(s) - \widetilde{w}_2(s)|\, ds \Big)^2 \leq$$

$$\leq \varepsilon |\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)|^2 + \frac{L^2\tau^+}{4\varepsilon} \int\limits_{t-\tau^+}^{t} |\widetilde{w}_1(s) - \widetilde{w}_2(s)|^2\, ds, \tag{4.122}$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число, $\tau^+ := \sup\limits_{t\in S} \tau(t)$, $\widetilde{w}_1(s) - \widetilde{w}_2(s) := 0 \ \ \forall s \leq \tau_0$.

З (4.120), згідно з (4.121) і (4.122), маємо

$$|\widehat{w}_1(\sigma) - \widehat{w}_2(\sigma)|^2 + 2(K_2 - \varepsilon)\int_{t_0}^{\sigma} |\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)|^2\, dt \leq$$

$$\leq (2\varepsilon)^{-1} L^2 \tau^+ \int\limits_{t_0}^{\sigma} \Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} |\widetilde{w}_1(s) - \widetilde{w}_2(s)|^2\, ds \Big) dt. \tag{4.123}$$

Розглянемо праву частину нерівності (4.123). Використовуючи нерівність Коші-Буняковського і змінюючи порядок інтегрування, з врахуванням (4.119) одержимо

$$\int\limits_{t_0}^{\sigma} \Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} |\widetilde{w}_1(s) - \widetilde{w}_2(s)|^2\, ds \Big) dt = \int\limits_{t_0}^{\sigma} \Big(\int\limits_{s}^{s+\tau^+} |\widetilde{w}_1(s) - \widetilde{w}_2(s)|^2 dt \Big) ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0-\tau^+}^{t_0} \Big(\int\limits_{s-\tau^+}^{s} |\widetilde{w}_1(s) - \widetilde{w}_2(s)|^2 dt \Big) ds = \tau^+ \int\limits_{t_0}^{\sigma} |\widetilde{w}_1(t) - \widetilde{w}_2(t)|^2 dt. \tag{4.124}$$

З (4.123), врахувавши (4.124), отримуємо

$$|\widehat{w}_1(\sigma) - \widehat{w}_2(\sigma)|^2 + 2(K_2 - \varepsilon) \int_{t_0}^{\sigma} |\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)|^2\, dt \leq$$

$$\leq (2\varepsilon)^{-1} L^2 (\tau^+)^2 \int_{t_0}^{\sigma} |\widetilde{w}_1(t) - \widetilde{w}_2(t)|^2 dt. \tag{4.125}$$

Вибравши $\varepsilon > 0$ таке, що $K_2 - \varepsilon \geqslant 0$, з (4.125) матимемо

$$|\widehat{w}_1(\sigma) - \widehat{w}_2(\sigma)|^2 \leqslant C_3 \int_{t_0}^{\sigma} |\widetilde{w}_1(t) - \widetilde{w}_2(t)|^2 \, dt, \quad \sigma \in (t_0, 0], \tag{4.126}$$

де $C_3 > 0$ – стала.

Домноживши (4.126) на $e^{-2\alpha(\sigma - t_0)}$, отримуємо

$$e^{-2\alpha(\sigma-t_0)}|\widehat{w}_1(\sigma) - \widehat{w}_2(\sigma)|^2 \leq$$

$$\leqslant C_3 e^{-2\alpha(\sigma-t_0)} \int\limits_{t_0}^{\sigma} e^{2\alpha(t-t_0)} e^{-2\alpha(t-t_0)} |\widetilde{w}_1(t) - \widetilde{w}_2(t)|^2 \, dt \leq$$

$$\leqslant C_3 e^{-2\alpha(\sigma-t_0)} \max_{t\in[t_0,0]} \left[e^{-2\alpha(t-t_0)} |\widetilde{w}_1(t) - \widetilde{w}_2(t)|^2 \right] \times$$

$$\times \int\limits_{t_0}^{\sigma} e^{2\alpha(t-t_0)} \, dt = \frac{C_3}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha(\sigma-t_0)}) \big(\rho(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2)\big)^2 \leq$$

$$\leqslant \frac{C_3}{2\alpha} \big(\rho(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2)\big)^2, \quad \sigma \in [t_0, 0]. \tag{4.127}$$

З (4.127) випливає нерівність

$$\rho(\widehat{w}_1, \widehat{w}_2) \leqslant \sqrt{C_3/(2\alpha)} \rho(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2).$$

Вибираючи значення $\alpha > 0$ таким, щоб виконувалась нерівність $C_2/(2\alpha) < 1$, звідси отримуємо, що оператор A є оператором стиску. Використовуючи теорему Банаха про нерухому точку – принцип стискуючих відображень [43, теорема 5.7], приходимо до висновку про існування і єдиність функції $w \in M$ такої, що $Aw = w$, тобто твердження 4.11 є правильним. ∎

Доведення теореми 4.3. Спершу доведемо єдиність розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi, c, \tau, f)$, далі – його існування та правильність оцінки (4.111).

Єдиність розв'язку. Припустимо, що задача $\mathbf{P}(\Phi, c, \tau, f)$ має більше одного розв'язку і нехай u_1, u_2 – два (різні) розв'язки цієї задачі. Згідно з означенням розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi, c, \tau, f)$ для кожного $i \in \{1, 2\}$ існують функції $g_i \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S; V')$ такі, що для м.в. $t \in S$ маємо $g_i(t) \in \partial\Phi\big(u_i(t)\big)$ і

$$u_i'(t) + g_i(t) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t, s, u_i(s)) \, ds = f(t) \quad \text{в } V', \ i = 1, 2. \tag{4.128}$$

Покладемо $w := u_1 - u_2$. З рівностей (4.128) для м.в. $t \in S$ отримаємо

$$w'(t) + g_1(t) - g_2(t) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \big(c(t,s,u_1(s)) - c(t,s,u_2(s))\big) ds = 0 \text{ в } V'. \qquad (4.129)$$

Нехай $t_1, t_2 \in S$ – довільні числа і $t_1 < t_2$. Помножимо рівність (4.129) скалярно на $w(t)$ та проінтегруємо отриману рівність за t від t_1 до t_2. У результаті одержимо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} (w'(t), w(t))\, dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} (g_1(t) - g_2(t), u_1(t) - u_2(t)) dt +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} [c(t,s,u_1(s)) - c(t,s,u_2(s))]\, ds, w(t) \Big) dt = 0. \qquad (4.130)$$

Розглянемо третій доданок лівої частини цієї рівності. Використовуючи умову $(\mathcal{C})$, теорему Фубіні та нерівність Коші-Буняковського, отримаємо

$$\Big| \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \big[c(t,s,u_1(s)) - c(t,s,u_2(s))\big]\, ds, w(t) \Big) dt \Big| \le$$

$$\le \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} \big| c(t,s,u_1(s)) - c(t,s,u_2(s)) \big| ds \Big) |w(t)|\, dt \le$$

$$\le L \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} |w(s)|\, ds \Big) |w(t)|\, dt \le$$

$$\le L\sqrt{\tau^+} \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} |w(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} |w(s)|^2\, ds \Big)\, dt \right)^{1/2}. \qquad (4.131)$$

Припустивши, що $w(t) = 0$ для всіх $t > 0$, та змінивши порядок інтегрування, матимемо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} |w(s)|^2 ds \Big)\, dt \le \int\limits_{t_1-\tau^+}^{t_2} |w(s)|^2\, ds \int\limits_{s}^{s+\tau^+} dt =$$

$$= \tau^+\Big(\int\limits_{t_1}^{t_2} |w(s)|^2\,ds + \int\limits_{t_1-\tau^+}^{t_1} |w(s)|^2\,ds\Big). \tag{4.132}$$

Підставивши у (4.131) останній член замість першого з наведеного вище ланцюжка нерівностей і використавши нерівності: $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a}\sqrt{b} \le \varepsilon a + (4\varepsilon)^{-1} b$ $(a \ge 0, b \ge 0,\ \varepsilon > 0)$, отримаємо

$$\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\big[c(t,s,u_1(s)) - c(t,s,u_2(s))\big]\,ds, w(t)\Big)\,dt\Big| \le$$

$$\le L\tau^+\Big((1+\varepsilon)\int\limits_{t_1}^{t_2}|w(t)|^2\,dt + (4\varepsilon)^{-1}\int\limits_{t_1-\tau^+}^{t_1}|w(t)|^2\,dt\Big), \tag{4.133}$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число.

З (4.130) на підставі рівності (4.103), нерівності (4.133), умови $(\mathcal{A}_4)$ та того, що $g_i(t) \in \partial\Phi(u_i(t))$ $(i = 1, 2)$ для м.в. $t \in S$, отримуємо таку нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{d|w(t)|^2}{dt}\,dt + \big(K_2 - (1+\varepsilon)L\tau^+\big)\int\limits_{t_1}^{t_2}|w(t)|^2dt - (4\varepsilon)^{-1}L\tau^+\int\limits_{t_1-\tau^+}^{t_1}|w(t)|^2dt \le 0. \tag{4.134}$$

Звідси, застосувавши до першого члена лівої частини формулу інтегрування частинами, здобудемо

$$|w(t)|^2\Big|_{t_1}^{t_2} + 2\big(K_2 - (1+\varepsilon)L\tau^+\big)\int\limits_{t_1}^{t_2}|w(t)|^2\,dt - (2\varepsilon)^{-1}L\tau^+\int\limits_{t_1-\tau^+}^{t_1}|w(t)|^2dt \le 0. \tag{4.135}$$

З (4.135), врахувавши нерівність (4.110) і взявши $\varepsilon > 0$ таке, що $K_2 - (1+\varepsilon)L\tau^+ > 0$, отримаємо

$$|w(t_2)|^2 \le |w(t_1)|^2 + C_4\int\limits_{t_1-\tau^+}^{t_1}|w(t)|^2dt, \tag{4.136}$$

де $C_4 > 0$ – стала, яка не залежить від t_1 .

Оскільки $w \in L^2(S;H) \cap C(S;H)$, то згідно із зауваженням 4.4 існує

послідовність $\{t_{1,k}\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ така, що $t_{1,k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ і

$$|w(t_{1,k})|^2 + C_3 \int\limits_{t_{1,k}-\tau^+}^{t_{1,k}} |w(t)|^2\, dt \underset{k\to+\infty}{\to} 0.$$

У (4.136) зафіксуємо довільним чином вибране t_2, а замість t_1 візьмемо $t_{1,k}$ таке, що $t_{1,k} < t_2$, де $k \in \mathbb{N}$. Спрямовуючи k до $+\infty$, отримаємо рівність $|w(x,t_2)|^2 = 0$. Оскільки t_2 – довільне число з S, то маємо $w(t) = 0$ для м.в. $t \in S$, що протирічить нашому припущенню. Отже, розв'язок задачі $\mathbf{P}(\Phi, c, \tau, f)$ єдиний.

Існування розв'язку. Доведення існування розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi, c, \tau, f)$ проведемо у три кроки.

Крок 1 (*апроксимація розв'язку*). Побудуємо послідовність функцій, що в певному сенсі апроксимують розв'язок задачі $\mathbf{P}(\Phi, c, \tau, f)$.

Нехай $\widehat{f}_k(t) := f(t)$ для $t \in S_k := [\kappa_k, 0]$, де $\{\kappa_k\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонно спадна послідовність чисел з S така, що $\kappa_1 < 0$ і $\lim\limits_{k\to\infty} \kappa_k = -\infty$. Позначимо $\tau_k := \min\limits_{t\in[\kappa,0]} (t - \tau(t))$, $k \in \mathbb{N}$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розглянемо задачу: знайти функцію $\widehat{u}_k \in C([\tau_k, 0]; H) \cap H^1(S_k; H)$ таку, що для м.в. $t \in S_k$ маємо $\widehat{u}_k(t) \in D(\partial\Phi_H)$ та

$$\widehat{u}_k'(t) + \partial\Phi_H\big(\widehat{u}_k(t)\big) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t, s, \widehat{u}_k(s))\, ds \ni \widehat{f}_k(t) \quad \text{в } H, \tag{4.137}$$

$$\widehat{u}_k(t) = 0, \quad t \in [\tau_k, \kappa_k]. \tag{4.138}$$

Варіаційна нерівність (4.137) означає, що існує функція $\widehat{g}_k \in L^2(S_k; H)$ така, що для м.в. $t \in S_k$ маємо $\widehat{g}_k(t) \in \partial\Phi_H(\widehat{u}_k(t))$ і

$$\widehat{u}_k'(t) + \widehat{g}_k(t) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t, s, \widehat{u}_k(s))\, ds = \widehat{f}_k(t) \quad \text{в } H. \tag{4.139}$$

З твердження 4.113 випливає існування єдиного розв'язку задачі (4.137), (4.138). Оскільки $D(\partial\Phi_H) \subset \mathrm{dom}(\Phi_H)$, то $\widehat{u}_k(t) \in V$ для м.в. $t \in S_k$. Згідно з означенням субдиференціалу функціоналу і того, що $\widehat{g}_k(t) \in \partial\Phi_H(\widehat{u}(t))$ для м.в. $t \in S_k$, маємо

$$\Phi_H(0) \geq \Phi_H(\widehat{u}_k(t)) + (\widehat{g}_k(t), 0 - \widehat{u}_k(t)) \text{ для м.в. } t \in S_k.$$

Звідси та з умови $(\mathcal{A}_3)$ для м.в. $t \in S_k$ маємо

$$(\widehat{g}_k(t), \widehat{u}_k(t)) \geq \Phi(\widehat{u}_k(t)) \geq K_1 \|\widehat{u}_k(t)\|^p. \tag{4.140}$$

Оскільки ліва частина цього ланцюжка нерівностей належить до $L^1(S_k)$, то $\widehat{u}_k$ належить до $L^p(S_k; V)$.

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ продовжимо функції $\widehat{f}_k, \widehat{u}_k$ і $\widehat{g}_k$ на весь проміжок S, поклавши їх рівними 0 на $(-\infty, \kappa_k]$, і позначимо ці продовження, відповідно, через f_k, u_k та g_k. Зі сказаного вище випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція u_k належить до $L^p(S; V)$, її похідна u_k' належить до $L^2(S; H)$ і для м.в. $t \in S$ правильними є включення $g_k(t) \in \partial\Phi_H\big(u_k(t)\big)$ і рівність (див. (4.139))

$$u_k'(t) + g_k(t) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t, s, u_k(s))\, ds = f_k(t) \quad \text{в} \quad H. \tag{4.141}$$

Для того, щоб показати збіжність послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ до розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi, c, \tau, f)$ нам будуть потрібні деякі оцінки функцій u_k $(k \in \mathbb{N})$.

Крок 2 (*оцінки апроксимуючих розв'язків*).

Нехай t_1, $t_2 \in S$ – довільні фіксовані числа такі, що $t_1 < t_2$. Домножимо (4.141) скалярно на u_k та проінтегруємо за t від t_1 до t_2. У результаті отримаємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} (u_k'(t), u_k(t))\, dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} (g_k(t), u_k(t))\, dt +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t, s, u_k(s))\, ds, u_k(t) \Big) dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} (f_k(t), u_k(t))\, dt.$$

Звідси, використавши рівність (4.103), матимемо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} |u_k(t)|^2\, dt + 2 \int\limits_{t_1}^{t_2} (g_k(t), u_k(t))\, dt +$$

$$+ 2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t, s, u_k(s))\, ds, u_k(t) \Big) dt = 2 \int\limits_{t_1}^{t_2} (f_k(t), u_k(t))\, dt. \tag{4.142}$$

Інтегруючи перший доданок лівої частини рівності (4.142), після певних перетворень одержимо

$$|u_k(t_2)|^2 - |u_k(t_1)|^2 + 2\int\limits_{t_1}^{t_2} (g_k(t), u_k(t))\, dt =$$

$$= 2\int\limits_{t_1}^{t_2} (f_k(t), u_k(t))\, dt - 2\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t, s, u_k(s))\, ds, u_k(t)\Big) dt. \tag{4.143}$$

Із зауваження 4.61 випливає, що

$$(g_k(t), u_k(t)) \geq K_2 |u_k(t)|^2 \text{ для м.в. } t \in S. \tag{4.144}$$

Враховуючи нерівності (4.140) та (4.144), отримаємо, що для м. в. $t \in S$

$$(g_k(t), u_k(t)) \geq \delta(g_k(t), u_k(t)) + (1-\delta)(g_k(t), u_k(t)) \geq$$

$$\geq \delta K_2 |u_k(t)|^2 + \frac{1}{2}(1-\delta) K_1 \|u_k(t)\|^p + \frac{1}{2}(1-\delta)\Phi(u_k(t)), \tag{4.145}$$

де $\delta \in (0,1)$ – довільне число.

Використовуючи (4.145), оцінимо другий доданок лівої частини рівності (4.143) так

$$2\int\limits_{t_1}^{t_2} (g_k(t), u_k(t))\, dt \geq \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big((1-\delta)\Phi\big(u_k(t)\big) +$$

$$+ (1-\delta) K_1 \|u_k(t)\|^p + 2\delta K_2 |u_k|^2 \Big)\, dt. \tag{4.146}$$

Оцінимо перший член правої частини рівності (4.143), застосовуючи нерівність Коші-Буняковського. У результаті отримаємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} (f_k(t), u_k(t))\, dt \leqslant \varepsilon \int\limits_{t_1}^{t_2} |u_k(t)|^2\, dt + (4\varepsilon)^{-1} \int\limits_{t_1}^{t_2} |f_k(t)|^2\, dt, \tag{4.147}$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число.

Оцінимо тепер другий член правої частини рівності (4.143), використовуючи нерівність Коші-Буняковського та (4.107), в такий спосіб

$$\Big| \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t, s, u_k(s))\, ds, u_k(t)\Big)\, dt \Big| \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big| \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u_k(s))\,ds \Big| |u_k(t)|\,dt \leq$$

$$\leq L \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} |u_k(s)|\,ds \Big) |u_k(t)|\,dt \leq$$

$$\leq L\sqrt{\tau^+} \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} |u_k(t)|^2\,dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} |u_k(s)|^2\,ds \Big)\,dt \right)^{1/2}. \tag{4.148}$$

Розглянемо останній елемент з наведеного вище ланцюжка нерівностей. Змінюючи порядок інтегрування, отримаємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t} |u_k(s)|^2 ds \Big) dt \leq \int\limits_{t_1-\tau^+}^{t_2} |u_k(s)|^2 ds \int\limits_{s}^{s+\tau^+} dt = \tau^+ \int\limits_{t_1-\tau^+}^{t_2} |u_k(t)|^2 dt. \tag{4.149}$$

При умові, що $t_1 < \kappa_k$, з (4.148), (4.149) і означення u_k, випливає

$$\Big| \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u_k(s))\,ds, u_k(t) \Big) dt \Big| \leq L\tau^+ \int\limits_{t_1}^{t_2} |u_k|^2 dt. \tag{4.150}$$

З (4.143), використовуючи (4.146), (4.147), (4.150), для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ таких, що $t_1 < \min\{\kappa_k, t_2\}$, одержимо

$$|u_k(t_2)|^2 + (1-\delta) \int\limits_{t_1}^{t_2} \Phi\big(u_k(t)\big) dt + (1-\delta) K_1 \int\limits_{t_1}^{t_2} \|u_k(t)\|^p\,dt +$$

$$+ 2[\delta K_2 - L\tau^+ - \varepsilon] \int\limits_{t_1}^{t_2} |u_k(t)|^2\,dt \leq (2\varepsilon)^{-1} \int\limits_{t_1}^{t_2} |f_k(t)|^2\,dt.$$

Спершу виберемо $\delta \in (0,1)$ таке, що $\delta K_2 - L\tau^+ > 0$, а потім візьмемо $\varepsilon = (\delta K_2 - L\tau^+)/2 > 0$. У результаті отримаємо

$$|u_k(t_2)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} \Phi\big(u_k(t)\big) dt + \int_{t_1}^{t_2} \Big(\|u_k(t)\|^p + |u_k(t)|^2 \Big) dt \leq$$

$$\leq C_4 \int_{t_1}^{t_2} |f_k(t)|^2\,dt,$$

де C_4 – додатна стала, що залежать лише від K_1, K_2, L, τ^+.

Звідси, в силу довільності $t_2 \in S$ та означення f_k, отримаємо

$$\sup_{t\in S} |u_k(t)|^2 + \int_S \Phi\big(u_k(t)\big)dt + \int_S \Big(\|u_k(t)\|^p + |u_k(t)|^2\Big)\,dt \leq$$
$$\leqslant C_5 \int_S |f(t)|^2\,dt, \tag{4.151}$$

де $C_5 > 0$ – додатна стала, що залежить лише від K_1, K_2, L, τ^+.

З (4.151) випливає, що

$$\{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^\infty(S;H) \cap L^p(S;V) \cap L^2(S;H). \tag{4.152}$$

Тепер знайдемо оцінки функцій u_k' $(k \in \mathbb{N})$. Нехай t_1, t_2 – довільні дійсні числа такі, що t_1, $t_2 \in S$, $t_1 < t_2$. Для м.в. $t \in [t_1, t_2]$ домножимо (4.141) скалярно на функцію $u_k'(t)$ (нагадаємо, що $u_k' \in L^2(S;H)$) та проінтегруємо отриману рівність за t від t_1 до t_2. У результаті після простих перетворень отримаємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} |u_k'(t)|^2\,dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} (g_k(t), u_k'(t))\,dt =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} (f_k(t), u_k'(t))\,dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u_k(s))\,ds, u_k'(t)\Big)dt. \tag{4.153}$$

Врахувавши, що $g_k \in L^2(S_k;H)$ і $g_k(t) \in \partial\Phi(u_k(t))$ для м.в. $t \in S$, з твердження 4.91 випливає, що функція $\Phi_H\big(u_k(\cdot)\big)$ є абсолютно неперервною на $[t_1, t_2]$ і

$$\frac{d}{dt}\Phi_H\big(u_k(t)\big) = (g_k(t), u_k'(t)) \quad \text{для м.в. } t \in (t_1, t_2). \tag{4.154}$$

Використовуючи (4.154), перетворимо другий член лівої частини рівності (4.153) так:

$$\int_{t_1}^{t_2} (g_k(t), u_k'(t))\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\Phi_H\big(u_k(t)\big)\,dt =$$
$$= \Phi_H\big(u_k(t)\big)\Big|_{t_1}^{t_2} = \Phi\big(u_k(t)\big)\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{4.155}$$

Використовуючи нерівність Коші і (4.107), отримаємо

$$\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u_k(s))\,ds, u_k'(t)\Big)\,dt\Big| \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big| \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u_k(s))\,ds\Big| |u_k'(t)|\,dt \leq$$

$$\leq L\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}|u_k(s)|\,ds\Big)|u_k'(t)|\,dt\leq$$

$$\leq L^2\tau^+\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(\int\limits_{t-\tau^+}^{t}|u_k(s)|^2\,ds\Big)\,dt+\frac{1}{4}\int\limits_{t_1}^{t_2}|u_k'(t)|^2\,dt\leq$$

$$\leq (L\tau^+)^2\int\limits_{t_1-\tau^+}^{t_2}|u_k(t)|^2dt+\frac{1}{4}\int\limits_{t_1}^{t_2}|u_k'(t)|^2\,dt, \tag{4.156}$$

$$\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2}(f_k(t),u_k'(t))\,dt\Big|\leq\int\limits_{t_1}^{t_2}|f_k(t)||u_k'(t)|\,dt\leq$$

$$\leq\int\limits_{t_1}^{t_2}|f_k(t)|^2\,dt+\frac{1}{4}\int\limits_{t_1}^{t_2}|u_k'(t)|^2\,dt. \tag{4.157}$$

З (4.153), врахувавши (4.155), (4.156), (4.157), здобудемо нерівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}|u_k'(t)|^2\,dt+\Phi_H\big(u_k(t)\big)\Big|_{t_1}^{t_2}\leq L^2(\tau^+)^2\int\limits_{t_1-\tau^+}^{t_2}|u_k(t)|^2dt+\int\limits_{t_1}^{t_2}|f_k(t)|^2\,dt. \tag{4.158}$$

Враховуючи означення u_k і f_k, умову $(\mathcal{A}_3)$ і оцінки (4.151), перейдемо в (4.158) до границі при $t_1\to-\infty$. У результаті, поклавши $t_2=\sigma\in S$, отримаємо

$$\Phi\big(u_k(\sigma)\big)+\int_{-\infty}^{\sigma}|u_k'(t)|^2\,dt\leqslant C_6\int_S|f(t)|^2\,dt, \tag{4.159}$$

де C_6 – деяка додатна стала, що залежать лише від K_1,K_2,L,τ^+.

На підставі означення функціоналу Φ_H і умови $(\mathcal{A}_3)$ (нагадаємо, що $u_k(t)\in V$ для м.в. $t\in S$) з (4.159) отримаємо

$$\sup_{\sigma\in S}||u_k(\sigma)||^p+\int_S|u_k'(t)|^2\,dt\leqslant C_7\int_S|f(t)|^2\,dt. \tag{4.160}$$

де $C_7>0$ – стала, яка залежить лише від K_1,K_2,L,τ^+.

З оцінки (4.160) випливає, що

$$\text{послідовність } \big\{u_k\big\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^\infty(S;V), \tag{4.161}$$

$$\text{послідовність } \big\{u_k'\big\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^2(S;H). \tag{4.162}$$

Із зауваження 4.7, (4.141), (4.151), (4.162), означень функцій u_k, f_k отримуємо, що

$$\text{послідовність } \{g_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^2(S;H). \tag{4.163}$$

Крок 3 (*граничний перехід*). Оскільки V — рефлексивний банахів простір, а H — гільбертів простір, причому V вкладено в H компактно, то з (4.152), (4.161)–(4.163) і твердження 4.8 випливає існування функцій $u \in L^\infty(S;V) \cap L^p(S;V) \cap H^1(S;H)$, $g \in L^2(S;H)$ та підпослідовності підпослідовності $\{u_k, g_k\}_{k=1}^{+\infty}$ (за якою ми збережемо позначення $\{u_k, g_k\}_{k=1}^{+\infty}$) таких, що

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *\text{-слабко в } L^\infty(S;V), \text{ слабко в } L^p(S;V),$$

$$\text{слабко в } H^1(S;H), \tag{4.164}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в } C(S;H), \tag{4.165}$$

$$g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{слабко в } L^2(S;H). \tag{4.166}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C})$, (4.165), нерівність Коші-Буняковського та змінюючи порядок інтегрування для довільних $t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$, отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big| \int_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u_k(s))\,ds - \int_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u(s))\,ds \Big|^2 dt \le$$

$$\le L^2\tau^+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{t-\tau^+}^{t} |u_k(s)-u(s)|^2 ds\,dt \le$$

$$\le (L\tau^+)^2 \int_{t_1-\tau^+}^{t_2} |u_k(t)-u(t)|^2 dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.167}$$

Отже, ми маємо

$$\int_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u_k(s))\,ds \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u(s))\,ds \text{ сильно в } L^2_{\text{loc}}(S;H). \tag{4.168}$$

Нехай $v \in H, \varphi \in D(-\infty,0)$ – довільні. Для м.в. $t \in S$ помножимо рівність (4.141) на v, а потім отриману рівність помножимо на φ і проінтегруємо

за t по S. У результаті отримаємо рівність

$$\int\limits_S (u_k'(t), v\varphi(t))\,dt + \int\limits_S (g_k(t), v\varphi(t))\,dt +$$

$$+\int\limits_S \Big(\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u_k(s))\,ds, v\varphi(t)\Big)dt = \int\limits_S (f_k(t), v\varphi(t))dt,\ \ k\in\mathbb{N}. \qquad (4.169)$$

Перейдемо в (4.169) до границі при $k\to\infty$, врахувавши при цьому (4.164), (4.166), (4.168) і збіжність послідовності $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ до f в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$. У результаті, маючи на увазі довільність $v\in H, \varphi\in D(-\infty,0)$, отримаємо для м.в. $t\in S$ рівність

$$u'(t) + g(t) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u(s))\,ds = f(t) \quad \text{в } H.$$

Для завершення доведення теореми залишилося показати, що $u(t)\in D(\partial\Phi)$ і $g(t)\in\partial\Phi\big(u(t)\big)$ для м.в. $t\in S$.

Нехай $k\in\mathbb{N}$ – яке-небудь число. Оскільки $g_k(t)\in\partial\Phi_H\big(u_k(t)\big)$ для кожного $t\in S\setminus\tilde{S}_k$, де $\tilde{S}_k\subset S$ – множина нульової міри, то з монотонності субдиференціалу $\partial\Phi_H$ випливає, що для всіх $t\in S\setminus\tilde{S}_k$ виконується нерівність

$$(g_k(t)-v^*, u_k(t)-v)\geqslant 0 \quad \forall\,[v,v^*]\in\partial\Phi_H. \qquad (4.170)$$

Нехай $\sigma\in S$, $h>0$ — довільні числа. Проінтегруємо (4.170) за t від $\sigma-h$ до σ:

$$\int_{\sigma-h}^{\sigma} (g_k(t)-v^*, u_k(t)-v)\,dt \geqslant 0 \quad \forall\,[v,v^*]\in\partial\Phi_H. \qquad (4.171)$$

Перейдемо тепер в (4.171) до границі при $k\to\infty$, використовуючи при цьому (4.165) і (4.166). У результаті отримаємо

$$\int_{\sigma-h}^{\sigma} (g(t)-v^*, u(t)-v)\,dt \geq 0 \quad \forall\,[v,v^*]\in\partial\Phi_H. \qquad (4.172)$$

З монографії [28, теорема 2, с. 192] і (4.172) випливає, що для кожного $[v,v^*]\in\partial\Phi_H$ існує множина $R_{[v,v_*]}\subset S$ нульової міри така, що

$$0\leq \lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_{\sigma-h}^{\sigma}\big(g(t)-v^*, u(t)-v\big)\,dt =$$

$$= \big(g(\sigma) - v^*, u(\sigma) - v\big) \quad \forall \sigma \in S \setminus R_{[v,v_*]}. \tag{4.173}$$

Покажемо, що існує множина нульової міри $R \subset S$ така, що для будь-якого $\sigma \in S \setminus R$ правильна нерівність

$$\big(g(\sigma) - v^*, u(\sigma) - v\big) \geq 0 \quad \forall [v, v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{4.174}$$

Оскільки V та V' – сепарабельні простори, то існує зліченна множина $F \subset \partial\Phi_H$, яка є щільною в $\partial\Phi_H$. Позначимо $R := \bigcup\limits_{[v,v^*]\in F} R_{[v,v_*]}$. Оскільки множина F зліченна, а зліченне об'єднання множин міри нуль є множиною міри нуль, то R має нульову міру. Отож, на підставі (4.173) нерівність (4.174) виконується для будь-якого $\sigma \in S \setminus R$ і всіх $[v, v^*] \in F$. Нехай $[v, v^*]$ – довільний елемент з $\partial\Phi_H$. Тоді зі щільності F у $\partial\Phi_H$ маємо існування послідовності $\{[v_l, v_l^*]\}_{l=1}^{\infty}$ такої, що $v_l \to v$ у V, $v_l^* \to v^*$ у H та

$$\forall \sigma \in S \setminus R: \qquad (g(\sigma) - v_l^*, u(\sigma) - v_l) \geqslant 0 \quad \forall l \in \mathbb{N}. \tag{4.175}$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $l \to \infty$, отримаємо (4.174), що треба було показати. Отож, для м.в. $t \in S$ маємо

$$(g(t) - v^*, u(t) - v) \geqslant 0 \quad \forall\, [v, v^*] \in \partial\Phi_H.$$

Звідси, в силу максимальної монотонності $\partial\Phi_H$, випливає, що $[u(t), g(t)] \in \partial\Phi_H$ для м.в. $t \in S$.

Оцінка (4.111) розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi, c, \tau, f)$ безпосередньо випливає з оцінок (4.151) і (4.160), збіжностей (4.164) і (4.165) та твердження 4.6. ∎

Висновки до розділу 4

У розділі 4 досліджено мішану задачу, задачу Фур'є для сильно нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності та задачу без початкових умов для еволюційних включень зі сталими показниками нелінійності та змінним інтегральним запізненням. Для цих задач встановлено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків. Також отримано апріорні оцінки розв'язків цих задач.

Висновки

Дисертаційна робота присвячена вивченню задач для параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь зі змінним запізненням. Задачі для таких систем описують різноманітні математичні моделі природознавства, техніки, економіки, теорії популяцій тощо.

У роботі одержано такі основні результати:

- Вивчено задачі для параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем з локальним змінним запізненням. Знайдено умови існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних класичних розв'язків таких задач:

  – мішаних задач для півлінійних параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь із запізненням;

  – крайових задач без початкових умов для півлінійних параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем рівнянь із запізненням та сильним виродженням у початковий момент часу;

  – задачі Фур'є для півлінійних параболічних рівнянь із запізненням з обмеженнями на поведінку розв'язків при $t \to -\infty$.

- Досліджено задачі для слабко нелінійних параболічних рівнянь зі змінним запізненням. Встановлено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків таких задач:

  – мішаних задач для таких рівнянь;

  – задачі Фур'є для таких рівнянь з обмеженнями на поведінку розв'язків при $t \to -\infty$.

- Вивчено задачі для сильно нелінійних параболічних рівнянь зі змінним запізненням. Отримано умови існування та єдиності узагальнених

розв'язків таких задач:

– мішаних задач для параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності;

– задачі Фур'є для для параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності з обмеженнями на поведінку розв'язків при $t \to -\infty$;

– задачі Фур'є для еволюційних включень зі сталим показником нелінійності з обмеженнями на поведінку розв'язків при $t \to -\infty$.

Результати дисертації є новими щодо задач без початкових умов для параболічних рівнянь та різнокомпонентних систем зі змінним запізненням. Ці результати мають теоретичний характер і їх можна використати в теорії задач для параболічних рівнянь із запізненням, а також при дослідженні практичних проблем, які моделюються такими рівняннями.

Бібліоґрафія

[1] Агаев, Г. Н. (1976). О первой краевой задаче для линейных вырождающихся параболических уравнений. *Изв. АН Азербайджанской ССР, Серия физ.-тех. и мат. наук, 2,* 10–16.

[2] Бокало, Н. М. (1984). О единственности решения задачи Фурье для квазилинейных уравнений типа нестационарной фильтрации. *Успехи мат. наук, 39(2),* 139-140.

[3] Бокало, Н. М. (1986). О единственности решения задачи без начальных условий для нелинейных параболических уравнений. *Успехи мат. наук, 41(5),* 163-164.

[4] Бокало, М., Дмитрів, В. (2002). Задача Фур'є для різнокомпонентної еволюційної системи рівнянь із інтегральним запізненням. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 60,* 32-49.

[5] Бокало, М., Ільницька, О. (2015). Мішані задачі для параболічних рівнянь зі змінним запізненням. *Буковинський математичний журнал, 3(1),* 16–24.

[6] Бугрій, О.М. (1998). Деякі параболічні варіаційні нерівності без початкових умов. *Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична, 49,* 113–121.

[7] Бугрій, О.М. (2008). Про задачі з однорідними граничними умовами для нелінійних рівнянь з виродженням. *Укр. мат. вісник., 5,* 435-–469.

[8] Гаевский, Х., Грёгер, К., Захариас, К. (1978). *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* Москва: Мир.

[9] Эльсгольц, Л.Э., Норкин, С.Б. (1971). *Введение в теорию диференциальних уравнений с отклоняющимся аргументом.* Москва: Наука.

[10] Ладыженская, О.А., Уральцева, Н.Н., Солонников В.А. (1967) *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Москва: Наука.

[11] Мышкис, А.Д. (1972). *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* Москва: Наука.

[12] Пукальський, І. Д. (1999). Нелокальна задача неймана для параболічного рівняння з виродженням. *Укр. мат. журн., 51(9),* 1232-1243.

[13] Слюсарчук, В.Ю.(2003). *Абсолютна стійкість динамічних систем з післядією.* Рівне: УДУВГ.

[14] Фридман, А. (1968). *Уравнения в часных производных параболического типа.* Москва: Мир.

[15] Alkhutov, Y., Antontsev, S., Zhikov, V. (2009). Parabolic equations with variable order of nonlinearity. *Collection of works of Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 6*, 23–50.

[16] Antontsev, S., Shmarev, S.(2008). Extinction of solutions of parabolic equations with variable anisotropic nonlinearities. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 261*, 11–21.

[17] Antontsev, S., Shmarev, S. (2015). Evolution PDEs with nonstandard growth conditions. Existence, uniqueness, localization, blow-up. *Atlantis Studies in Differential Equations, 4*. Paris: Atlantis Press.

[18] Akimenko, V., Anguelov, R. (2017). Steady states and outbreaks of two-phase nonlinear age-structured model of population dynamics with discrete time delay. *Journal of Biological Dynamics, 11(1),* 75-101. DOI: 10.1080/17513758.2016.1236988

[19] Arnold, V.I. (1978). *Ordinary Differential Equations.* Cambridge: MIT Press.

[20] Aubin, J.-P. (1963). Un theoreme de compacite. *Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences, 256(24),* 5042–5044.

[21] Babak, P.P. (1999), Coupled diffusion systems with functional systems in unbounded domains. *Matem. Studii, 12(1)*, 85-89.

[22] Bainov, D., Petrov, V. (1995). Asymptotic Properties of the Nonoscillatory Solutions of Second-Order Neutral Equations with a Deviating Argument. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 190*, 645–653.

[23] Bátkai, A., Schnaubelt, R. (2004). Asymptotic behaviour of parabolic problems with delays in the highest order derivatives. *Semigroup Forum, 69(3)*,369-399.

[24] Bátkai, A., Piazzera, S. (2005). Semigroups for delay equations. *Resarch Notes in Mathematics, 10,* Wellesley MA: A.K. Peters.

[25] Berezansky, L., Braverman, E., Domoshnitsky, A. (2011). On nonoscillation of systems of delay equations. *Funkcial. Ekvac., 54 (2),* 275—296.

[26] Berezansky, L., Bastinec, J., Diblik, J., Smarda, Z. (2012). On a delay population model with quadratic nonlinearity. *Adv. Difference Equ., 2012(230),* DOI: 10.1186/1687-1847-2012-230.

[27] Bernis, F. (1988). Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains. *Math. Ann., 279*, 373–394.

[28] Bocharov, G. A., Rihan, F. A. (2000). Numerical modelling in biosciences using delay differential equations. *J. Comput. Appl. Math., 125*, 183—199.

[29] Bokalo, N. M. (1990). Problem without initial conditions for some classes of nonlinear parabolic equations. *J. Sov. Math., 51(3)*, 2291–2322.

[30] Bokalo, M. (1998). Well-posedness of problems without initial conditions for nonlinear parabolic variational inequalities. *Nonlinear boundary problem, 8*, 58–63.

[31] Bokalo, M. (2010). Dynamical problems without initial conditions for elliptic-parabolic equations in spatial unbounded domains. *Electronic Journal of Differential Equations, 178*, 1–24.

[32] Bokalo, M. (2011). The unique solvability of a problem without initial conditions for linear and nonlinear elliptic-parabolic equations. *Journal of Mathematical Sciences., 178(1)*, 41–64. (Translated from Ukrains'kyi Matematychnyi Visnyk, 8(1) (2011), 55–86).

[33] Bokalo, M.M., Buhrii, O.M., Mashiyev, R. A. (2014). Unique solvability of initial boundary value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. *Journal of nonlinear evolution equations and applications, 2013(6)*, 67-–87.

[34] Bokalo, M. M., Dmytriv, V. M. (2001). Fourier Problem for a Coupled Diffusion System with Functionals, *Ukrainian Mathematical Journal, 53(11)*, 1468–1481.

[35] Bokalo, M., Ilnytska, O. (2017). Problems for parabolic equations with variable exponents of nonlinearity and time delay. *Applicable Analysis, 96(7)*, 1240–1254.

[36] Bokalo, M.M., Il'nyts'ka, O.V.,(2017). Boundary-value problems for nonlinear parabolic equations with delay and degeneration at the initial time *Ukr. Math. J., 68(9),* 1323–1339. doi:10.1007/s11253-017-1298-6

[37] Bokalo, M., Ilnytska, O. (2016). Unique solvability of initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations with time dependent delay. *Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична, 81*, 23-—38.

[38] Bokalo, M., Ilnytska, O. (2016). Initial-boundary value problems for coupled systems with variable time delay. *International Journal of Evolution Equations, 10(1),* 1–19.

[39] Bokalo, M., Lorenzi, A. (2009). Linear evolution first-order problems without initial conditions, *Milan Journal of Mathematics, 77*, 437–494.

[40] Bokalo, M. M., Pauchok, I. B. (2006). On the well-posedness of the Fourier problem for higher-order nonlinear parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. *Mat. Stud. 26(1)*, 25–48.

[41] Bokalo, M. M., Sikorskyy, V. M. (1998). About properties of solutions of problem without initial conditions for equations generalized politropic filtration equation. *Visnyk of the Lviv University. Serija meh.-mat., 51*, 85–98.

[42] Boukrouche, M., Tarzia, D. A. (2013). On existence, uniqueness, and convergence of optimal control problems associated with parabolic variational inequalities of the second kind. In D.Hömberg, F.Tröltzsch (Eds.), *System Modeling and Optimization. CSMO 2011. IFIP Advances in Information and Communication Technology, vol 391* (pp. 76-84). Berlin, Heidelberg: Springer.

[43] Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* New York, Dordrecht, Heidelberg, London:Springer.

[44] Brézis, H. (1973). *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Amsterdam, London: North-Holland Publishing Comp.

[45] Burger, R., Evje, S., Karlsenc, K. H. (2000). On strongly degenerate convections diffusion problems modeling sedimentations consolidation processes. *J. Appl. Math. Anal. Appl., 247*, 517–556.

[46] Burton, T. A., Haddrock, J. R. (1976). On the Delay-Differential Equations $x'(t)+a(t)f(x(t-r(t)))=0$ and $x''(t)+a(t)f(x(t-r(t)))=0$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 54*, 37–48.

[47] Chen, G. Q. (2010) *On Degenerate Partial Differential Equations.* Oxford Centre for Nonlinear PDE, 10/16. DOI: 10.1090/conm/526/10377

[48] Coddington, E. A., Levinson, N. (1955) *Theory of ordinary differential equations.* New York, Toronto, London: McGraw-Hill book company.

[49] Chueshov, I., Rezounenko, A. (2015). Finite-dimensional global attractors for parabolic nonlinear equations with state-dependent delay. *Commun. Pure Appl. Anal., 14*, 1685–1704.

[50] Culshaw, R. V., Shigui, R. (2000). A delay-diferential equation model of HIV infection of CD4+ T-cells. *Mathematical Biosciences, 165*, 27–39.

[51] Di Blasio, G., Kunisch, K., Sinestrari, E.(1984). L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delay in the highest-order derivatives. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 102*, 38–57.

[52] Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P., Růžička, M. (2011). *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents.* Lecture Notes in Mathematics, 2017. Heidelberg:Springer.

[53] Dmytriv, V.M. (2001). On a Fourier problem for coupled evolution system of equations with time delays. *Mat. Studii., 16*, 141—156.

[54] Dumrongpokaphan, T., Lenbury, Y., Ouncharoen, R., Xu, Y. (2007). An Intracellular Delay-Differential Equation Model of the HIV Infection and Immune Control, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2*, 75—99.

[55] El'sool'ts, L.E., Norkin, S.B. (1973). *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments.* New York: Academic Press.

[56] Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations* Graduate Studies in Mathematics. 2nd ed. Vol. 19. Providence (RI): Amer. Math. Soc.

[57] Ezzinbi, K., Liu, J. H. (2002). Periodic solutions of non-densely defined delay evolution equations. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 15(2)*, 105–114.

[58] Fan, X., Zhao, D. (2001). On the space $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 263*, 424–446.

[59] Feng, W., Pao, C. V., Lu, X. (2011). Global Attrators of Reaction-Diffusion Systems Modeling Food Chain Populations with Delays. *Communications on Pure and Applied Analysis, 10*, 1463–1478.

[60] Fridman, A. (1964). *Partial Differential Equations of Parabolic Type.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[61] Fu, Y., Pan, N. (2010). Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 362*, 313–326.

[62] Golovaty, Y., Marciniak-Czochra, A., Ptashnyk, M. (2012). Stability of nonconstant stationary solutions in a reaction-diffusion equation coupled to the system of ordinary differential equations . *Communications on Pure and Applied Analysis, 11(1)*, 229—241.

[63] Ilnytska O.V. (2016). Fourier problem for nonlinear parabolic equations with time-dependent delay. *Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math., 82*, 137–150.

[64] Ivasishen, S. D.(1982). Parabolic boundary-value problems without initial conditions. *Ukr. Mat. J., 34 (5)*, 547-–552.

[65] Jin, Ch., Yin, J. (2012). Traveling wavefronts for a time delayed non-Newtonian filtration equation. *Physica D, 241(1)*, 1789–1803.

[66] Karlsen, K. H., Ohlbergerb, M. (2002). A note on the uniqueness of entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic equations. *J. Appl. Math. Anal. Appl., 275*, 439–458.

[67] Karlsen, K.H., Risebro, N.H., Towers, J.D.(2002). On a nonlinear degenerate parabolic transport-diffusion with a discontinuous coefficient. *Electronic Journal of Differential Equations, 2002(93),* 1–23.

[68] Kováčik, O., Rákosníc, J. (1991). On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Mathematical Journal., 41(116)*,592–618.

[69] Kuang, Y., Zhang, B., Zhao, T. (1991). Qualitative Anlysis of a Nonautonomous Nonlinear Delay Differetial Equation. *Tohoku Mathematical Journal, 43*, 509–528.

[70] Khusainov, D., Pokojovy, M., Racke, R. (2015). Strong and mild extrapolated L^2-solutions to the heat equation with constant delay. *SIAM Journal on Mathematical Analysis, 47(1)*, 427–454.

[71] Lavrenyuk, S., Ptashnyk, M. (2000). Problem without initial conditions for a nonlinear pseudoparabolic system. *Differential Equations, 36(5),* 739–748.

[72] Lions J.-L. (1969). *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires.* Paris (France): Dunod Gauthier-Villars.

[73] Marciniak-Czochra, A., Kimmel, M. (2005). Mathematical Model of Tumor Invasion Along Linear or Tubular Structures. *Mathematical and Computer Modelling, 41*, 1097–1108.

[74] Marciniak-Czochra, A., Kimmel, M.(2008). Reaction-diffusion model of early carcinogenesis: The effects of influx of mutated cells, *Math. Model. Nat.Phenom., 3*, 90—114.

[75] Mascia, C., Porretta, A., Terracina, A. (2002). Nonhomogeneous Dirichlet Problems for Degenerate Parabolic-Hyperbolic Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis, 163*, 87–124.

[76] Mashiyev, R. A., Buhrii, O. M. (2011). Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 377*, 450–463.

[77] Mihailescu, M., Radulescu, V., Tersian, S. (2011). Homoclinic solutions of difference equations with variable exponents. *Topological Methods in Nonlinear Analysis, 38*, 277–289.

[78] Musielak, J. (1983) *Orlicz spaces and modular spaces.* Lecture Notes in Mathematics. 1034, Berlin-Heidelberg: Springer Verlag;.

[79] Oleinik, O. A., Iosifjan, G. A. (1976). Analog of Saint-Venant's principle and uniqueness of solutions of the boundary problems in unbounded domain for parabolic equations. *Usp. Mat. Nauk. 31(6)*, 142–166.

[80] Orlicz, W. (1931). Uber konjugierte Exponentenfolgen. *Studia Mathematica (Lwow), 3*, 200–211.

[81] Pankov, A. A. (1990). *Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations.* Dordrecht: Kluwer.

[82] Pao, C.V., Mahaffy, J.M. (1985). Quallitative analysis a coupled reaction-diffusion model in biology with time delays. *J Math. Anal Appl, 109*, 355–37.

[83] Pao, C.V. (1987). On a coupled rcaction diffusion systcm with time delays. *SIAM Math. Anal, 18*, 1026–1039.

[84] Pao, C.V. (1990). Numerical methods for coupled systems of nonlinear parabolic boundary value problems. *Anal Appl, 151*, 581–608.

[85] Pao, C.V. (1996). Dynamics of Nonlinear Parabolic Systems with Time Delays. *Journal Of Mathematical Analysis And Applications, 198*, 751–779.

[86] Pao, C.V. (1997). Systems of Parabolic Equations with Continuous and Discrete Delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 205*, 157-–185.

[87] Pao, C.V. (2001). *Time delayd parabolic systems with coupled nonlinear boundary conditions. Proceedings of the American Mathematical Society, 130*, 1079-–1086.

[88] Pao, C.V. (1995). Coupled nonlinear parabolic systems with time delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 196*, 237–265.

[89] Pukach, P.Ya. (1994). On problem without initial conditions for some nonlinear degenarated parabolic system. *Ukr. Math. J., 46 (4)*, 484-–487.

[90] Rezounenko, A. V., Wu, J. (2006). A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay: Local theory and global attractors. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 190*, 99-–113.

[91] Rho, H.-H., Jeong, J.-M. (2014). Regularity for nonlinear evolution variational inequalities with delay terms. *Journal of Inequalities and Applications, 2014*, 387. DOI: 10.1186/1029-242X-2014-387

[92] Rockafellar, R. (1970). On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. *Pacific J. Math., 33 (1)*, 209–216.

[93] Růžička, M. (2000). *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory.* Lecture Notes in Mathematics, 1748. Berlin: Springer-Verlag.

[94] Song, X., Cheng, Sh. (2005). A delay-diferential equation model of HIV infection of CD4+ T-cells. *Journal Korean Mathematical Ssociety, 5*, 1071-–1086.

[95] Showalter, R. E. (1980). Singular nonlinear evolution equations. *Rocky Mountain J. Math., 10(3)*, 499–507.

[96] Showalter, R. E. (1997). *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations.* Providence: Amer. Math. Soc., 49.

[97] Tihonov, A. N. (1935). Uniqueness theorems for the heat equation. *Matem. Sbornik., 2*, 510–516.

[98] Tikhonov, A., Samarskii, A. (1972) *Equations of mathematical physics.* Moscow: Nauka.

[99] Tychonoff, A. (1935). Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur, *Mat. Sb., 42 (2)*, 199–216.

[100] Vrabie I.I. (2012). Global Solutions for Nonlinear Delay Evolution Inclusions with Nonlocal Initial Conditions. *Set-Valued Var. Anal., 20*, 477. doi:10.1007/s11228-012-0203-6

[101] Wang, X., Li, Z., (2008). Global Attractivity and Oscillations in a Nonlinear Impulsive Parabolic Equation with Delay. *Kyungpook Mathematical Journal, 48*, 593–611.

[102] Wang R.N., Xiang Q.M., Zhu P.X. (2014). Existence and approximate controllability for systems governed by fractional delay evolution inclusions. *Optimization, 62(8)*, 1191 –1204.

[103] Yoshida K. (1995). *Functional Analysis.* Berlin Heidelberg:Springer-Verlag.

[104] Yuan, K., Alofi, A., Cao, J., Al-Mazrooei, A., Elaiw, A.(2014). Synchronization of the Coupled Distributed Parameter System with Time Delay via Proportional-Spatial Derivative Control. *Discrete Dynamics in Nature and Society, 2014*, Article ID 418258, 7 pages.

[105] Zhihong, Zh., Weigao, G. (2011). Traveling Wavefront Solutions for Reaction-Difusion Equation with Small Delay. *Funkcialaj Ekvacioj, 54*, 225—236.

Додаток А

А.1 Обґрунтування результатів підрозділу 2.2

Введемо позначення

$$Pw := (P_1 w, \dots, P_{M+L} w),\ Rw := (R_1 w, \dots, R_M w),\ Gw := (G_1 w, \dots, G_{M+L} w).$$

А.1.1 Допоміжні результати

Розглянемо задачу: знайти вектор-функцію $w = (u_1, \dots, u_M, v_1, \dots, v_L) \in W$, яка задовольняє систему

$$\widetilde{P}_i w(x,t) := \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x,t) \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t) \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k} +$$

$$+ a_i(x,t) u_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^1_{i,s}(x,t) w_s(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^2_{i,s}(x,t) w_{s,\tau_s}(x,t) =$$

$$= f_i(x,t), \quad (x,t) \in Q,\ i = 1, \dots, M, \tag{A.1}$$

$$\widetilde{P}_{M+j} w(x,t) := \frac{\partial v_j(x,t)}{\partial t} + b_j(x,t) v_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^1_{M+j,s}(x,t) w_s(x,t) -$$

$$- \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^2_{M+j,s}(x,t) w_{s,\tau_s}(x,t) = f_{M+j}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q},\ j = 1, \dots, L, \tag{A.2}$$

крайові умови (2.34), та початкові умови (2.35).

Припустимо, що функції $a_i, a_{i,k}, a_{i,kl}$ $(i = 1, \dots, M;\ k, l = \overline{1,n})$, b_j $(j = 1, \dots, L)$, f_s, τ_s $(s = 1, \dots, M+L)$ і w_0, h (з умов (2.34), (2.35)) задовольняють умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_3)$, а функції $\widetilde{g}^1_{r,s}$, $\widetilde{g}^2_{r,s}$ $(r, s = 1, \dots, M+L)$ задовольняють умову

$(\mathcal{A}_2^*)$ $\widetilde{g}^1_{i,s}, \widetilde{g}^2_{i,s} \in C(Q)$, $\widetilde{g}^1_{M+j,s}, \widetilde{g}^2_{M+j,s} \in C(\overline{Q})$ $(i = 1, ..., M;\ j = 1, ..., L;\ s = 1, \dots, M+L)$,

$$\inf_{(x,t)\in Q} \Big[a_i(x,t) - \sum_{s=1}^{L+M} \widetilde{g}^1_{i,s}(x,t) \Big] =: \widetilde{a}_i^- > 0 \quad (i = 1, ..., M),$$

$$\min_{(x,t)\in \overline{Q}} \Big[b_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^1_{M+j,s}(x,t) \Big] =: \widetilde{b}_j^- > 0 \quad (j = 1, ..., L),$$

$$\sup_{(x,t)\in Q} \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^2_{r,s}(x,t) =: \widetilde{g}^{2,+}_r < \infty \quad (r = 1, \dots, M+L).$$

Лема A.1. *Нехай* $\widetilde{g}^1_{r,s} \geq 0$, $\widetilde{g}^2_{r,s} \geq 0$ *на* Q $(r, s = 1, \ldots, M + L)$. *Тоді для будь-яких функцій* $w^1, w^2 \in W$ *таких, що* $\widetilde{P}_i w^1(x,t) < \widetilde{P}_i w^2(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$ $(i = 1, ..., M)$, $\widetilde{P}_{M+j} w^1(x,t) < \widetilde{P}_{M+j} w^2(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{Q}$ $(j = 1, ..., L)$, $Rw^1(x,t) < Rw^2(x,t)$ $\forall (x,t) \in \Sigma$, $G_s w^1(x,t) < G_s w^2(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_{s,0}$ $(s = 1, ...M + L)$, *правильна нерівність* $w^1(x,t) < w^2(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{Q}$.

Доведення. Позначимо $\widehat{w}(x,t) = (\widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_M; \widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_L) := w^1 - w^2$. Покладемо $\widehat{f} := \widetilde{P}\widehat{w} = \widetilde{P}w^1 - \widetilde{P}w^2$, $\widehat{h} := R\widehat{w} = Rw^1 - Rw^2$, $\widehat{w}_{s,0} := G_s\widehat{w} = G_s w^1 - G_s w^2$ $(s = 1, ..., M + L)$. Використовуючи ці позначення та припущення леми матимемо

$$\frac{\partial \widehat{u}_i(x,t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x,t) \frac{\partial \widehat{u}_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t) \frac{\partial \widehat{u}_i(x,t)}{\partial x_k} +$$

$$+ a_i(x,t)\widehat{u}_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^1_{i,s}(x,t)\widehat{w}_s(x,t)$$

$$- \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^2_{i,s}(x,t)\widehat{w}_{s,\tau_s}(x,t) = \widehat{f}_i(x,t) < 0, \quad (x,t) \in Q, \ i = 1, ..., M, \qquad (A.3)$$

$$\frac{\partial \widehat{v}_j(x,t)}{\partial t} + b_j(x,t)\widehat{v}_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^1_{M+j,s}(x,t)\widehat{w}_s(x,t) -$$

$$- \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^2_{M+j,s}(x,t)\widehat{w}_{s,\tau_s}(x,t) = \widehat{f}_{M+j}(x,t) < 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad j = 1, ..., L, \qquad (A.4)$$

$$\widehat{u}_i(x,t) = \widehat{h}_i(x,t) < 0, \quad (x,t) \in \Sigma, \qquad (A.5)$$

$$\widehat{w}_s(x,t) = \widehat{w}_{s,0}(x,t) < 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_{s,0}, \quad s = 1, ..., M + L. \qquad (A.6)$$

Треба показати, що $\widehat{w}(x,t) < 0$ для всіх $(x,t) \in \overline{Q}$. Припустимо протилежне. Нехай принаймні одна компонента $\widehat{w}$ рівна нулю у деякій точці з $\overline{Q}$. З цього та (A.6) випливає існування точки $(x^0, t_0) \in \overline{Q}$ такої, що $\widehat{w}(x,t) < 0$, для $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (0, t_0)$, і $\widehat{w}(x, t_0) \leq 0$, для $x \in \overline{\Omega}$, та або $\widehat{u}_m(x^0, t_0) = 0$ для деякого $m \in \{1, \ldots, M\}$, або $\widehat{v}_l(x^0, t_0) = 0$ для деякого $l \in \{1, \ldots, L\}$.

Розглянемо випадок $\widehat{u}_m(x^0, t_0) = 0$. Згідно з (A.5) маємо $x^0 \in \Omega$. Очевидно, що $\widehat{w}_{m,t}(x^0, t_0) \geq 0$. Оскільки x^0 – точка локального максимуму функції

$x \mapsto u_m(x,t_0) : \Omega \to \mathbb{R}$, то $\frac{\partial \widehat{u}_m(x^0,t_0)}{\partial x_k} = 0$, $\sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x^0,t_0)\frac{\partial \widehat{u}_m(x^0,t_0)}{\partial x_k \partial x_l} \le 0$. Звідси і системи (A.3) отримуємо

$$0 > \widehat{f}_m(x^0,t_0) = \frac{\partial \widehat{u}_m(x^0,t_0)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{m,kl}(x^0,t_0)\frac{\partial \widehat{u}_m(x^0,t_0)}{\partial x_k \partial x_l} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} a_{m,k}(x^0,t_0)\frac{\partial \widehat{u}_m(x^0,t_0)}{\partial x_k} + a_m(x^0,t_0)\widehat{u}_m(x^0,t_0) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^1_{m,s}(x^0,t_0)\widehat{w}_s(x^0,t_0) -$$

$$-\sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^2_{m,s}(x^0,t_0)\widehat{w}_{s,\tau_s}(x^0,t_0) \ge 0.$$

Одержали протиріччя. Аналогічно (і навіть дещо легше) таке ж протиріччя одержується і у випадку $\widehat{v}_l(x^0,t_0) = 0$. ∎

Наслідок A.1. *Нехай* $\widetilde{g}^1_{r,s} \ge 0$, $\widetilde{g}^2_{r,s} \ge 0$ *на* Q $(r,s = 1,\dots,M+L)$. *Тоді для будь-якої функції* $w \in W$ *такої, що* $\widetilde{P}_i w(x,t) < 0$ $\forall (x,t) \in Q$ $(i = 1,...,M)$, $\widetilde{P}_{M+j} w(x,t) < 0$ $\forall (x,t) \in \overline{Q}$ $(j = 1,...,L)$, $Rw(x,t) < 0$ $\forall (x,t) \in \Sigma$, $G_s w(x,t) < 0$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_{s,0}$ $(s = 1,...M+L)$, *правильна нерівність* $w(x,t) < 0$ $\forall (x,t) \in \overline{Q}$.

Лема A.2. *Нехай* $\widetilde{g}^1_{r,s} \ge 0$, $\widetilde{g}^2_{r,s} \ge 0$ *на* Q $(r,s = 1,\dots,M+L)$ *і*

$$\widetilde{a}_i^- - \widetilde{g}_i^{2,+} > -1 \quad (i = 1,\dots,M), \qquad \widetilde{b}_j^- - \widetilde{g}_{M+j}^{2,+} > -1 \quad (j = 1,\dots,L). \quad (A.7)$$

Тоді для будь-яких функцій $w^1, w^2 \in W$ *таких, що* $\widetilde{P}w^1(x,t) \le \widetilde{P}w^2(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$, $Rw^1(x,t) \le Rw^2(x,t)$ $\forall (x,t) \in \Sigma$, $G_s w^1(x,t) \le G_s w^2(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_{s,0}$ $(s = 1,\dots,M+L)$, *правильна нерівність* $w^1(x,t) \le w^2(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{Q}$.

Доведення. Покладемо $\widehat{w}_s(x,t) := w^1_s(x,t) - w^2_s(x,t)$, $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_{s,0} \cup (0,T])$ $(s = 1,...,M+L)$. З припущень леми випливає, що $\widehat{f}(x,t) := \widetilde{P}\widehat{w}(x,t) \le 0$ $\forall (x,t) \in Q$, $\widehat{h}(x,t) := R\widehat{w}(x,t) \le 0$ $\forall (x,t) \in \Sigma$, $\widehat{w}_{s,0}(x,t) := G_s\widehat{w}(x,t) \le 0$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_{s,0}$ $(s = 1,\dots,M+L)$. Нехай

$$w^\lambda_s(x,t) := \widehat{w}_s(x,t) - \lambda\, e^t, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_{s,0} \cup (0,T]),\ s = 1,\dots,M+L,$$

де $\lambda > 0$ – деяка стала. Підставимо у рівності

$$\widetilde{P}_i \widehat{w}(x,t) = \widehat{f}_i(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad i = 1,...,M,$$

$$\widetilde{P}_{M+j}\widehat{w}(x,t)=\widehat{f}_{M+j}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{Q},\quad j=1,...,L,$$

$w_s^\lambda(x,t)+\lambda\, e^t$ замість $\widehat{w}_s(x,t)$ $(s=1,\dots,M+L)$ матимемо

$$\widetilde{P}_i w^\lambda(x,t)\equiv\frac{\partial\widehat{u}_i^\lambda(x,t)}{\partial t}-\sum_{k,l=1}^{n}a_{i,lk}(x,t)\frac{\partial\widehat{u}_i^\lambda(x,t)}{\partial x_k\partial x_l}+\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(x,t)\frac{\partial\widehat{u}_i^\lambda(x,t)}{\partial x_k}+$$

$$+a_i(x,t)\widehat{u}_i^\lambda(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{i,s}^1(x,t)\widehat{w}_s^\lambda(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{i,s}^2(x,t)\widehat{w}_{s,\tau_s}^\lambda(x,t)=\widehat{f}_i(x,t)-$$

$$-\lambda\, e^t\big(a_i(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{i,s}^1(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{i,s}^2(x,t)e^{-\tau_s(t)}+1\big),\quad (x,t)\in Q,\ i=1,\dots,M, \tag{A.8}$$

$$\widetilde{P}_{M+j}w^\lambda(x,t)\equiv\frac{\partial\widehat{v}_j^\lambda(x,t)}{\partial t}+b_j(x,t)\widehat{v}_j^\lambda(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{M+j,s}^1(x,t)\widehat{w}_s^\lambda(x,t)-$$

$$-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{M+j,s}^2(x,t)\widehat{w}_{s,\tau_s}^\lambda(x,t)=\widehat{f}_{M+j}(x,t)-\lambda\, e^t\big(b_j(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{M+j,s}^1(x,t)-$$

$$-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{M+j,s}^2(x,t)e^{-\tau_s(t)}+1\big),\quad (x,t)\in\overline{Q},\quad j=1,\dots,L. \tag{A.9}$$

Використовуючи (A.7) отримуємо

$$a_i(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{i,s}^1(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{i,s}^2(x,t)e^{-\tau_s(t)}\geq$$

$$\geq\inf_{(x,t)\in Q}\Big(a_i(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{i,s}^1(x,t)\Big)-\sup_{(x,t)\in Q}\Big(\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{i,s}^2(x,t)e^{-\tau_s(t)}\Big)\geq$$

$$\geq\widetilde{a}_i^-\,-\widetilde{g}_i^{2,+}>-1,\quad (x,t)\in Q,\ i=1,\dots,M, \tag{A.10}$$

$$b_j(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{M+j,s}^1(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{M+j,s}^2(x,t)e^{-\tau_s(t)}\geq$$

$$\geq\min_{(x,t)\in\overline{Q}}\big(\sum_{s=1}^{L}b_{j,s}(x,t)-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{M+j,s}^1(x,t)\big)-\sup_{(x,t)\in Q}\Big(\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{M+j,s}^2(x,t)e^{-\tau_s(t)}\Big)\geq$$

$$\geq\widetilde{b}_j^-\,-\widetilde{g}_{M+j}^{2,+}>-1,\quad (x,t)\in\overline{Q},\ j=1,\dots,L, \tag{A.11}$$

так як $e^{-\tau_s(t)}\leq 1$ і $\widetilde{g}_{r,s}^1\geq 0$, $\widetilde{g}_{r,s}^2\geq 0$ на Q. З рівностей (A.10), (A.11), та нерівності $\widehat{f}\leq 0$ на Q, випливає, що $\widehat{P}_i w^\lambda(x,t)<0$ $\forall(x,t)\in Q$ $(i=1,\dots,M)$,

$\widetilde{P}_{M+j}w^\lambda(x,t) < 0 \ \ \forall (x,t) \in \overline{Q} \ \ (j = 1,\dots,L)$. Очевидно, що $R_i w^\lambda(x,t) = \widehat{h}_i(x,t) - \lambda e^t < 0 \ \ \forall (x,t) \in \Sigma \ \ (i = 1,\dots,M)$, $G_s w^\lambda(x,t) = \widehat{w}_{s,0}(x,t) - \lambda e^t < 0$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_{s,0} \ \ (s = 1,\dots,M+L)$. Відповідно до наслідку А.1 отримуємо нерівність $w^\lambda(x,t) < 0$ для всіх $(x,t) \in \overline{Q}$, тобто, $\widehat{w}_s(x,t) < \lambda e^t \ \ \forall (x,t) \in \overline{Q}$ $(s = 1,\dots,M+L)$. Зафіксуємо $(x,t) \in \overline{Q}$ і спрямуємо λ до 0. У результаті отримаємо $\widehat{w}(x,t) \le 0 \ \ \forall (x,t) \in \overline{Q}$, тобто, $w^1(x,t) \le w^2(x,t) \ \ \forall (x,t) \in \overline{Q}$. ∎

Твердження А.1. *Нехай* $\widetilde{g}^1_{r,s} \ge 0$, $\widetilde{g}^2_{r,s} \ge 0$ *на* Q $(r,s = 1,\dots,M+L)$ *і* $\widetilde{a}^-_i - \widetilde{g}^{2,+}_i > 0$ $(i = 1,\dots,M)$, $\widetilde{b}^-_j - \widetilde{g}^{2,+}_{M+j} > 0$ $(j = 1,\dots,L)$. *Тоді для будь-якого розв'язку* w *задачі (А.1), (А.2), (2.34), (2.35) правильна оцінка*

$$\forall i \in \{1,\dots,M\}: \quad \min\Big\{\frac{1}{\widetilde{a}^-_i - \widetilde{g}^{2,+}_i} \inf_{(y,s)\in Q} f_i(y,s), \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h_i(y,s),$$

$$\min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{i,0}} w_{i,0}(y,s),\, 0\Big\} \le u_i(x,t) \le \max\Big\{\frac{1}{\widetilde{a}^-_i - \widetilde{g}^{2,+}_i} \sup_{(y,s)\in Q} f_i(y,s),$$

$$\max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h_i(y,s), \max_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times E_{i,0}} w_{i,0}(y,s), 0\Big\}, \quad (x,t) \in Q, \qquad (A.12)$$

$$\forall j \in \{1,\dots,L\}: \ \min\Big\{\frac{1}{\widetilde{b}^-_j - \widetilde{g}^{2,+}_{M+j}} \min_{(y,s)\in\overline{Q}} f_{M+j}(y,s),$$

$$\min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{M+j,0}} w_{M+j,0}(y,s),\, 0\Big\} \le v_j(x,t) \le \max\Big\{\frac{1}{\widetilde{b}^-_j - \widetilde{g}^{2,+}_{M+j}} \max_{(y,s)\in\overline{Q}} f_{M+j}(y,s),$$

$$\max_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times E_{M+j,0}} w_{M+j,0}(y,s), 0\Big\}, \quad (x,t) \in \overline{Q}. \qquad (A.13)$$

Доведення. Нехай w – розв'язок задачі (А.1), (А.2), (2.34), (2.35). Позначимо

$$C^1_i := \max\Big\{\frac{1}{\widetilde{a}^-_i - \widetilde{g}^{2,+}_i} \sup_{(y,s)\in Q} f_i(y,s), \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h_i(y,s), \max_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times E_{i,0}} w_{i,0}(y,s), 0\Big\} \ge 0,$$

$$C^1_{M+j} := \max\Big\{\frac{1}{\widetilde{b}^-_j - \widetilde{g}^{2,+}_{M+j}} \max_{(y,s)\in\overline{Q}} f_{M+j}(y,s), \max_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times E_{M+j,0}} w_{M+j,0}(y,s), 0\Big\} \ge 0,$$

$$C^2_i := \min\Big\{\frac{1}{\widetilde{a}^-_i - \widetilde{g}^{2,+}_i} \inf_{(y,s)\in Q} f_i(y,s), \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h_i(y,s), \min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{i,0}} w_{i,0}(y,s),\, 0\Big\} \le 0,$$

$$C^2_{M+j} := \min\Big\{\frac{1}{\widetilde{b}^-_j - \widetilde{g}^{2,+}_{M+j}} \min_{(y,s)\in\overline{Q}} f_{M+j}(y,s), \min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{M+j,0}} w_{M+j,0}(y,s),\, 0\Big\} \le 0,$$

$$i = 1, \ldots, M; \; j = 1, ..., L.$$

Тоді, для функції $w^0 = (w_1^0, ..., w_{M+L}^0)$, де $w_s^0(x,t) = C_s^1$, $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_{s,0} \cup (0,T])$, $s \in \{1, \ldots, M+L\}$, матимемо

$$\widetilde{P}_i w^0(x,t) = \big(a_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{i,s}^1(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{i,s}^2(x,t)\big) C_i^1 \geq \big(\widetilde{a}_i^- - \widetilde{g}_i^{2+}\big) C_i^1 \geq$$

$$\geq \sup_{(y,s)\in Q} f_i(y,s) \geq f_i(x,t) = \widetilde{P}_i w(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \; i = 1, ..., M,$$

$$\widetilde{P}_{M+j} w^0(x,t) := \big(b_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{M+j,s}^1(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{M+j,s}^2(x,t)\big) C_{M+j}^1 \geq$$

$$\geq \max_{(y,s)\in\overline{Q}} f_{M+j}(y,s) \geq f_{M+j}(x,t) = \widetilde{P}_{M+j} w(x,t), \; (x,t) \in \overline{Q}, \; j = 1, ..., L,$$

$$R_i w^0(x,t) = C_i^1 \geq \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h_i(y,s) \geq h_i(x,t) = R_i w(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Sigma},$$

$$G_s w^0(x,t) = C_s^1 \geq \max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{s,0}} w_{s,0}(y,s) \geq w_{s,0}(x,t) = G_s w(x,t), \; (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_{s,0}.$$

Звідси, згідно з лемою А.2, випливає $w_s(x,t) \leq C_s^1 \; \forall (x,t) \in \overline{Q}$ $(s = 1, \ldots, M+L)$. Аналогічно показується правильність нерівності $w_s(x,t) \geq C_s^2 \; \forall (x,t) \in \overline{Q}$ $(s = 1, \ldots, M+L)$. ∎

Лема А.3. *Для будь-яких* $(x,t) \in Q$, $\xi^1, \xi^2, \eta^1, \eta^2 \in \mathbb{R}^{M+L}$ *правильна рівність*

$$g_r(x,t,\xi^1,\eta^1) - g_r(x,t,\xi^2,\eta^2) =$$

$$= \sum_{s=1}^{M+L} \big(\xi_s^1 - \xi_s^2\big) G_{r,s}^1(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2) + \sum_{s=1}^{M+L} \big(\eta_s^1 - \eta_s^2\big) G_{r,s}^2(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2),$$

де

$$G_{r,s}^1(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2) := \int_0^1 \frac{\partial g_r}{\partial \xi_s}\Big(x,t,z(\xi^1-\xi^2)+\xi^2, z(\eta^1-\eta^2)+\eta^2\Big) dz, \quad (A.14)$$

$$G_{r,s}^2(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2) := \int_0^1 \frac{\partial g_r}{\partial \eta_s}\Big(x,t,z(\xi^1-\xi^2)+\xi^2, z(\eta^1-\eta^2)+\eta^2\Big) dz. \quad (A.15)$$

Крім того,

$$0 \leq G_{r,s}^i(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) \leq g_{r,s}^i(x,t) \quad (i = 1,2). \qquad (A.16)$$

Доведення. Рівності (A.14), (A.15) безпосередньо випливають з леми Адамара, а (A.16) випливає з умови $(\mathcal{A}_2)$. ∎

A.1.2 Доведення основних результатів підрозділу 2.3

Доведення теореми 2.3. Розглянемо задачі для $w^1 = (u^1; v^1) = (u_1^1, \ldots, u_M^1; v_1^1, \ldots, v_L^1)$ і $w^2 = (u^2; v^2) = (u_1^2, \ldots, u_M^2; v_1^2, \ldots, v_L^2)$. Введемо позначення $\widehat{w} = (\widehat{u}; \widehat{v}) := w^1 - w^2 = (u^1 - u^2; v^1 - v^2)$. Віднімаючи від рівності $Pw^1 = f^1$ рівність $Pw^2 = f^2$ та використовуючи лему A.3, отримаємо

$$\frac{\partial \widehat{u}_i(x,t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,lk}(x,t) \frac{\partial \widehat{u}_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t) \frac{\partial \widehat{u}_i(x,t)}{\partial x_k} + a_i(x,t)\widehat{u}_i(x,t) -$$

$$-\sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{i,s}^1(x,t)\widehat{w}_s(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{i,s}^2(x,t)\widehat{w}_{s,\tau_s}(x,t) = \widehat{f}_i(x,t), \ (x,t) \in Q, \ i = 1, \ldots, M, \tag{A.17}$$

$$\frac{\partial \widehat{v}_j(x,t)}{\partial t} + b_j(x,t)\widehat{v}_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{M+j,s}^1(x,t)\widehat{w}_s(x,t) -$$

$$-\sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{M+j,s}^2(x,t)\widehat{w}_{s,\tau_s}(x,t) = \widehat{f}_{M+j}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad j = 1, \ldots, L, \tag{A.18}$$

$$\widehat{u}_i(x,t) = \widehat{h}_i(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \quad i = 1, \ldots, M, \tag{A.19}$$

$$\widehat{w}_s(x,t) = \widehat{w}_{s,0}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times E_{s,0}, \quad s = 1, \ldots M + L, \tag{A.20}$$

де

$$\widetilde{g}_{r,s}^1(x,t) := G_{r,s}^1\Big(x, t, w^1(x,t), w^2(x,t), w_\tau^1(x,t), w_\tau^2(x,t)\Big),$$

$$\widetilde{g}_{r,s}^2(x,t) := G_{r,s}^2\Big(x, t, w^1(x,t), w^2(x,t), w_\tau^1(x,t), w_\tau^2(x,t)\Big),$$

$$\widehat{f} := f^1 - f^2, \quad \widehat{h} := w^1 - w^2,$$

$$\widehat{w}_{s,0} := w_{s,0}^1 - w_{s,0}^2, \quad r, s = 1, \ldots, M + L.$$

Перевіримо чи виконуються умови твердження A.1, тобто, чи $\widetilde{g}_{r,s}^1 \geq 0$, $\widetilde{g}_{r,s}^2 \geq 0$ $(r, s = 1, \ldots, M+L)$ на Q і $\widetilde{a}_i^- - \widetilde{g}_i^{2,+} > 0$, $\widetilde{b}_j^- - \widetilde{g}_{M+j}^{2,+} > 0$ $(i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, L)$. З леми A.3 (див. (A.16)) випливає, що $\widetilde{g}_{r,s}^1 \geq 0$ $\widetilde{g}_{r,s}^2 \geq 0$ на Q

$(r, s = 1, \ldots, M+L)$. Використовуючи умову $(\mathcal{A}_2)$ та лему A.3 (див (A.16)), отримуємо

$$\widetilde{a}_i^- := \inf_{(x,t)\in Q} \Big[a_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{i,s}^1(x,t)\Big] \geq$$

$$\geq \inf_{(x,t)\in Q} (a_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} g_{i,s}^1(x,t)) =: a_i^-, \quad i = 1, \ldots, M,$$

$$\widetilde{b}_j^- := \inf_{(x,t)\in Q} \Big[b_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{M+j,s}^1(x,t)\Big] \geq$$

$$\geq \inf_{(x,t)\in Q} (b_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} g_{M+j,s}^1(x,t)) =: b_j^-, \quad j = 1, \ldots, L,$$

$$\widetilde{g}_r^{2,+} := \sup_{(x,t)\in Q} \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{r,s}^2(x,t) \leq \sup_{(x,t)\in Q} \sum_{s=1}^{M+L} g_{r,s}^2(x,t) = g_r^{2,+}, \quad r = 1, \ldots, M+L.$$

Отже, $\widetilde{a}_i^- - \widetilde{g}_i^{2,+} \geq a_i^- - g_i^{2,+} > 0$ $(i = 1, ..., M)$, $\widetilde{b}_j^- - \widetilde{g}_{M+j}^{2,+} \geq b_j^- - g_{M+j}^{2,+} > 0$ $(j = 1, ..., L)$. Таким чином, виконуються умови твердження A.1, звідси маємо правильність оцінки (A.12), (A.13) з $\widehat{w}$, $\widehat{f}$, $\widehat{h}$, $\widehat{w}_0$ замість w, f, h, w_0. Отже, правильні оцінки (2.39), (2.40). ∎

Доведення наслідку 2.5. З умов наслідку маємо $f^1(x,t) - f^2(x,t) \leq 0$ $\forall (x,t) \in Q$, $h^1(x,t) - h^2(x,t) \leq 0$ $\forall (x,t) \in \Sigma$, $w_{s,0}^1(x,t) - w_{s,0}^2(x,t) \leq 0$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_{s,0}$ $(s = 1, \ldots, M+L)$. З (2.39), (2.40) випливає $w^1(x,t) - w^2(x,t) \leq 0$, тобто, $w^1(x,t) \leq w^2(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{Q}$. ∎

Доведення наслідку 2.6. Наслідок безпосередньо випливає з теореми 2.3, підставляючи $w^1 = w$ та $w^2 = 0$. ∎

Доведення наслідку 2.7. Від супротивного. Нехай w^1, w^2 – два різні розв'язки задачі (2.32)–(2.35). Згідно з теоремою 2.3 маємо $0 \leq w^1(x,t) - w^2(x,t) \leq 0$, $(x,t) \in \overline{Q}$, тобто, $w^1 = w^2$ на $\overline{Q}$. Отримали суперечність, що доводить наше твердження. ∎

Доведення теореми 2.3. Позначимо для $i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, L$

$$\left.\begin{aligned} C_i^1 &:= \max\big\{\tfrac{1}{a_i^- - g_i^{2,+}} \sup_{(y,s)\in Q} f_i(y,s), \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h_i(y,s), \max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{i,0}} w_{i,0}(y,s), 0\big\} \geq 0, \\ C_{M+j}^1 &:= \max\big\{\tfrac{1}{b_j^- - g_{M+j}^{2,+}} \max_{(y,s)\in\overline{Q}} f_{M+j}(y,s), \max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{M+j,0}} w_{M+j,0}(y,s), 0\big\} \geq 0, \end{aligned}\right\} \tag{A.21}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_i^2 := \min\left\{\frac{1}{a_i^- - g_i^{2,+}} \inf\limits_{(y,s)\in Q} f_i(y,s),\ \min\limits_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h_i(y,s),\ \min\limits_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{i,0}} w_{i,0}(y,s), 0\right\} \le 0, \\ C_{M+j}^2 := \min\left\{\frac{1}{b_j^- - g_{M+j}^{2,+}} \min\limits_{(y,s)\in\overline{Q}} f_{M+j}(y,s),\ \min\limits_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{M+j,0}} w_{M+j,0}(y,s), 0\right\} \le 0, \end{array}\right\} \tag{A.22}$$

Визначимо послідовність функцій $\{w^p = (u_1^p, \cdots, u_M^p; v_1^p, \cdots, v_L^p)\}_{p=0}^{\infty}$, таких, що для всіх $p \in \mathbb{N}$, $u_i^p \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times (E_{s,0} \cup (0,T])\big) \cap C_{\mathrm{loc}}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q)$, $v_j^p \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega}\times(E_{s,0}\cup(0,T])\big)\cap C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$, таким чином. Спочатку приймемо $w_s^0(x,t) := C_s^1\ \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_{s,0} \cup (0,T])$, де C_s^1 – визначені в (A.21) $(s = 1, \ldots, M+L)$. Наступні члени цієї послідовності визначимо так: якщо відома функція w^{p-1}, то функцію w^p знаходимо як розв'язок задачі,

$$\widehat{P}_i w^p(x,t) := \frac{\partial u_i^p(x,t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,lk}(x,t)\frac{\partial u_i^p(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t)\frac{\partial u_i^p(x,t)}{\partial x_k} +$$

$$+ a_i(x,t)u_i^p(x,t) = f_i^p(x,t) := f_i(x,t) +$$

$$+ g_i\big(x,t,w^{p-1}(x,t), w_\tau^{p-1}(x,t)\big), \quad (x,t) \in Q,\ i = 1, ..., M; \tag{A.23}$$

$$\widehat{P}_{M+j} w^p(x,t) := \frac{\partial v_j^p(x,t)}{\partial t} + b_j(x,t)v_j^p(x,t) = f_{M+j}^p(x,t) := f_{M+j}(x,t) +$$

$$+ g_{M+j}\big(x,t,w^{p-1}(x,t), w_\tau^{p-1}(x,t)\big), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad j = 1, ..., L; \tag{A.24}$$

$$u_i^p(x,t) = h_i(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma,\ i = 1, \ldots, M; \tag{A.25}$$

$$w_s^p(x,t) = w_{s,0}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times E_{s,0},\ s = 1, \ldots, M+L. \tag{A.26}$$

Відмітимо, що $\widehat{P}_i w^p(x,t) = L_i u_i^p(x,t)\ \ \forall (x,t) \in Q$, де L_i – лінійний параболічний диференціальний оператор $(i = 1, \ldots, M)$, і $\widehat{P}_{M+j} w^p(x,t) = L_{M+j} v_j(x,t)\ \ \forall (x,t) \in \overline{Q}$, де L_{M+j} – лінійний звичайний диференціальний оператор $(j = 1, \ldots, L)$. Отже, задача (A.23)–(A.26) розкладається на $M+L$ незалежних задач, серед яких M мішаних задач для лінійних параболічних рівнянь, тобто, для кожного $i \in \{1, \ldots, M\}$

$$L_i u_i^p(x,t) = f_i^p(x,t),\ (x,t) \in Q; \quad u_i^p(x,t) = h_i(x,t),\ (x,t) \in \Sigma;$$

$$u_i^p(x,0) = w_{i,0}(x,0),\ x \in \overline{\Omega}, \tag{A.27}$$

і L задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь з параметром $x \in \overline{\Omega}$, тобто, для кожгого $j \in \{1, \ldots, L\}$,

$$L_{M+j} v_j^p(x,t) = f_{M+j}^p(x,t),\ (x,t) \in \overline{Q}; \quad v_j^p(x,0) = w_{M+j,0}(x,0),\ x \in \overline{\Omega}, \tag{A.28}$$

Оскільки $w_s^{p-1} \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times (E_{s,0} \cup (0,T])\big)$, то з умов $(\mathcal{B}_2)$, $(\mathcal{B}_5)$ випливає, що $f_s^p \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$ $(s = 1, ..., M+L)$. Звідси та умов теореми 2.4, згідно з теоремою 9 монографії [60], випливає існування та єдиність розв'язку $u_i^p \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{Q}\big) \cap C_{loc}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q)$ задачі (A.27) для кожного $i \in \{1,\ldots,M\}$. Оскільки $u_i^p \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{Q}\big)$ і $w_{i,0} \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times E_{s,0}\big)$, то з рівності (A.26) випливає, що $u_i^p \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times (E_{s,0} \cup (0,T])\big)$ $(i = 1,\ldots,M)$. Так як $f_{M+j}^p \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$, то з теорії звичайних диференціальних рівнянь (див, наприклад, [19]) випливає, що для кожного $j \in \{1,\ldots,L\}$ задача (A.28) має єдиний розв'язок $v_j^p \in C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$. Використовуючи умову (A.26), маємо $v_j^p \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times (E_{s,0} \cup (0,T]))$ $(j = 1, ..., L)$.

Тепер, покажемо, що для будь-якого $p \in \mathbb{N}$ правильні нерівності

$$w^*(x,t) \leqslant w^p(x,t) \leqslant w^{p-1}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{A.29}$$

де $w_s^*(x,t) := C_s^2 \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_{s,0} \cup (0,T])$ $(s = 1,\ldots,M+L)$, C_s^2 – визначені в (A.22).

Спершу, доведемо, що $w^p(x,t) \leqslant w^{p-1}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, для будь-яких $p \in \mathbb{N}$. Для цього використаємо метод математичної індукції. Покажемо, що $w^1(x,t) \leqslant w^0(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$. З означення w^1 маємо

$$w_s^1(x,t) \le C_s^1 = w_s^0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_{s,0},\ s = 1,\ldots,M+L;$$

$$u_i^1(x,t) \le C_i^1 = u_i^0(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma,\ i = 1,\ldots,M.$$

Використовуючи $(\mathcal{A}_2)$ (а саме, $g_r(x,t,0,0) = 0 \ \forall (x,t) \in Q$, $r = 1,\ldots,M+L$) і лему A.3, отримуємо

$$\widehat{P}_i w^1(x,t) - \widehat{P}_i w^0(x,t) = f_i(x,t) + g_i(x,t,w^0,w^0) - a_i(x,t) w_i^0 =$$

$$= f_i(x,t) - \Big(a_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} G_{i,s}^1(x,t,w^0,0,w^0,0) - \sum_{s=1}^{M+L} G_{i,s}^2(x,t,w^0,0,w^0,0)\Big) C_i^1 \le$$

$$\le f_i(x,t) - \Big(a_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} g_{i,s}^1(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} g_{i,s}^2(x,t)\Big) C_i^1 \le f_i(x,t) - \Big(a_i^- - g_i^{2,+}\Big) C_i^1 \le$$

$$\le f_i(x,t) - \sup_{(y,s)\in Q} f_i(y,s) \le 0,\ (x,t) \in Q;$$

$$\widehat{P}_{M+j} w^1(x,t) - \hat{P}_{M+j} w^0(x,t) = g_{M+j}(x,t,w^0,w^0) + f_{M+j}(x,t) - b_j(x,t) C_{M+j}^1 =$$

$$= f_{M+j}(x,t) - \Big(b_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} G^1_{M+j,s}(x,t,w^0,0,w^0,0) -$$

$$-\sum_{s=1}^{M+L} G^2_{M+j,s}(x,t,w^0,0,w^0,0)\Big) C^1_{M+j} \le f_{M+j}(x,t) - \Big(b_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} g^1_{M+j,s}(x,t) -$$

$$- \sum_{s=1}^{M+L} g^2_{M+j,s}(x,t)\Big) C^1_{M+j} \le f_{M+j}(x,t) - \Big(b_j^- - g_i^{2,+}\Big) C^1_{M+j} \le$$

$$\le f_{M+j}(x,t) - \sup_{(y,s)\in Q} f_{M+j}(y,s) \le 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}.$$

Звідси та наслідку 2.5 випливає, що $w^1(x,t) \le w^0(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$.

Тепер покажемо, що для будь-яких $p \in \mathbb{N}$ з нерівності $w^p(x,t) \le w^{p-1}(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{Q}$ випливає нерівність $w^{p+1}(x,t) \le w^p(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{Q}$.

Справді, використовуючи умову $(\mathcal{A}_2)$ та лему А.3 одержимо

$$w_s^{p+1}(x,t) - w_s^p(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times E_{s,0},\ s = 1,\dots,M+L;$$

$$u_i^{p+1}(x,t) - u_i^p(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma,\ i = 1,\dots,M;$$

$$\widehat{P}_i w^{p+1}(x,t) - \widehat{P}_i w^p(x,t) = g_i(x,t,w^p,w^p_\tau) - g_i(x,t,w^{p-1},w^{p-1}_\tau) =$$

$$= \sum_{s=1}^{M+L} G^1_{i,s}(x,t,w^p,w^{p-1},w^p_\tau,w^{p-1}_\tau)\big(w^p_s(x,t) - w^{p-1}_s(x,t)\big) +$$

$$+\sum_{s=1}^{M+L} G^2_{i,s}(x,t,w^p,w^{p-1},w^p_\tau,w^{p-1}_\tau)\big(w^p_{s,\tau_s}(x,t) - w^{p-1}_{s,\tau_s}(x,t)\big) \le 0,\ (x,t)\in Q,\ i=1,\dots,M;$$

$$\widehat{P}_{M+j} w^{p+1}(x,t) - \widehat{P}_{M+j} w^p(x,t) = g_{M+j}(x,t,w^p,w^p_\tau) - g_{M+j}(x,t,w^{p-1},w^{p-1}_\tau) =$$

$$= \sum_{s=1}^{M+L} G^1_{M+j,s}(x,t,w^p,w^{p-1},w^p_\tau,w^{p-1}_\tau)\,\big(w^p_s(x,t) - w^{p-1}_s(x,t)\big) +$$

$$+\sum_{s=1}^{M+L} G^2_{M+j,s}(x,t,w^p,w^{p-1},w^p_\tau,w^{p-1}_\tau)\big(w^p_{s,\tau_s}(x,t) - w^{p-1}_{s,\tau_s}(x,t)\big) \le 0,\ (x,t)\in\overline{Q},\ j=1,\dots,L.$$

Звідси та наслідку 2.5 отримуємо потрібне твердження. Отже, відповідно до методу математичної індукції ми отримуємо наше твердження.

Залишилось показати, що $w^*(x,t) \leqslant w^p(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, для будь-яких $p \in \mathbb{N}$. Для цього ще раз використаємо метод математичної індукції. Легко бачити, що $w^*(x,t) \leqslant w^0(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Припустимо, що $w^*(x,t) \leqslant$

$w^{p-1}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, для деякого $p \in \mathbb{N}$. Доведемо, що $w^*(x,t) \leqslant w^p(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Використовуючи означення w^*, умову $(\mathcal{A}_2)$ та лему А.3, отримаємо

$$w_s^*(x,t) \leqslant w_{s,0}(x,t) = w_s^p(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times E_{s,0}, \quad s = 1, \ldots, M+L;$$

$$u_i^*(x,t) - u_i^p(x,t) = C_2 - h_i(x,t) \leqslant 0, \quad (x,t) \in \Sigma, \quad i = 1, \ldots, M;$$

$$\widehat{P}_i w^*(x,t) - \widehat{P}_i w^p(x,t) = a_i(x,t)C_i^2 - g_i(x,t,w^{p-1}(x,t), w_\tau^{p-1}(x,t)) - f_i(x,t) =$$

$$= a_i(x,t)C_i^2 - \Big(\sum_{s=1}^{M+L} G_{i,s}^1(x,t,w^{p-1},0,w_\tau^{p-1},0) w_s^{p-1}(x,t)$$

$$+ \sum_{s=1}^{M+L} G_{i,s}^2(x,t,w^{p-1},0,w_\tau^{p-1},0) w_{s,\tau_s}^{p-1}(x,t) \Big) - f_i(x,t) \leq$$

$$\leq \Big(a_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} g_{i,s}^1(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} g_{i,s}^2(x,t) \Big) C_i^2 - f_i(x,t) \leq$$

$$\leq (a_i^- - g_i^{2,+})C_i^2 - f_i(x,t) \leq \inf_{(y,s)\in Q} f_i(y,s) - f_i(x,t) \leq 0, \ (x,t) \in Q, \ i = 1, \ldots, M;$$

$$\widehat{P}_{M+j} w^*(x,t) - \widehat{P}_{M+j} w^p(x,t) = b_j(x,t)C_j^2 - g_{M+j}(x,t,w^{p-1}(x,t), w_\tau^{p-1}(x,t)) -$$

$$- f_{M+j}(x,t) \leq 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}, \ j = 1, \ldots, L.$$

З цих нерівностей та наслідку 2.5 випливає $w^*(x,t) \leqslant w^p(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, що і треба було довести.

З (А.29) та означень w^0, w^* маємо

$$||w_s^p||_{C(\overline{Q})} \leq \max\{C_s^1, -C_s^2\}, \quad s = 1, \ldots, M+L, \ p \in \mathbb{N}. \qquad (A.30)$$

Отже, послідовність $\{w^p\}$ – монотонна та обмежена. Таким чином, для кожного $s \in \{1, \ldots, M+L\}$ існує визначена на $\overline{\Omega} \times (E_{s,0} \cup (0,T])$ функція w_s така, що для кожної точки $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_{s,0} \cup (0,T])$, $w_s^p(x,t) \to w_s(x,t)$ при $p \to \infty$ і w_s задовольняє умови (2.34), (2.35). Покажемо, що $w = (u;v)$ – розв'язок задачі (2.32)–(2.35).

З неперервності функцій g_r на $\overline{Q} \times \mathbb{R}^{2(M+L)}$, f_r на $\overline{Q}$, w_r^{p-1} на $\overline{\Omega} \times (E_{r,0} \cup (0,T])$ $(r = 1, ..., M+L)$, та оцінки (А.30) випливає, що функції f_r^p $(p \in \mathbb{N})$ неперервні на $\overline{Q}$ і правильна оцінка

$$\max_{1 \leq r \leq M+L} ||f_r^p||_{C(\overline{Q})} \leqslant C_3, \quad p \in \mathbb{N}, \qquad (A.31)$$

де $C_3 > 0$ – стала незалежна від p.

З (A.27), (A.30) і (A.31), відповідно до теореми 10.1 монографії [10], маємо

$$\max_{1\le i\le M} ||u_i^p||_{\alpha,\alpha/2}^{\overline{Q}} \le C_4, \quad p\in\mathbb{N}, \tag{A.32}$$

де $C_4 > 0$ –стала, що від p не залежить.

Використовуючи метод математичної індукції, лему Гронуола–Беллмана і (A.32), з (A.28) отримуємо

$$\max_{1\le j\le L} ||v_j^p||_{\alpha,\alpha/2}^{\overline{Q}} \le C_5, \quad p\in\mathbb{N}, \tag{A.33}$$

де $C_5 > 0$ – стала незалежна від p.

Для кожного $p\in\mathbb{N}$ і функції $f_i^p(x,t)$, $(x,t)\in\overline{Q}$, з умов $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{B}_2)$, $(\mathcal{B}_5)$ та оцінок (A.31)–(A.33) випливає

$$\max_{1\le r\le M+L} ||f_r^p||_{\alpha,\alpha/2}^{\overline{Q}} \leqslant C_6, \quad p\in\mathbb{N}, \tag{A.34}$$

де $C_6 > 0$ – стала незалежна від p.

Нехай $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – послідовність чисел $\delta_k\in(0,T)$, таких, що $\Omega_k = \{x\in\Omega : \operatorname{dist}\{x,\partial\Omega\} > \delta\}$ – область в $\mathbb{R}^n$ для кожного $k\in\mathbb{N}$, і $\delta_k\downarrow 0$ при $k\to\infty$. Покладемо $\overline{Q_k} = \overline{\Omega_k}\times[\delta_k,T]$. Використовуючи (A.30), (A.34) та умови теореми, з теореми 10.1 монографії [10] отримуємо

$$\max_{1\le i\le M} ||u_i^p||_{2+\alpha,1+\alpha/2}^{\overline{Q_k}} \leqslant C_7, \quad p\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N}, \tag{A.35}$$

де $C_7 > 0$ – стала, яка не залежить від p, але залежить від C_3, C_6 і може залежати від k.

З умови $(\mathcal{B}_2)$ та оцінок (A.30)–(A.34), аналогічно як у роботі [34], можна показати, що

$$\max_{1\le j\le L} ||v_j^p||_{\alpha,1+\alpha/2}^{\overline{Q}} \le C_8, \quad p\in\mathbb{N}, \tag{A.36}$$

де $C_8 > 0$ – стала незалежна від p.

З (A.26), нерівностей (A.32), (A.35) та (A.36), тверджень 2.1 і 2.2, та теореми про диференціювання границі збіжної послідовності функцій випливає, що $u_i\in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega}\times(E_{M+j,0}\cup(0,T])\big)\cap C_{\rm loc}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q)$, $v_j\in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega}\times(E_{M+j,0}\cup(0,T])\big)\cap C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$ і для кожного $i\in\{1,...,M\}$, $j\in\{1,...,L\}$

існує підпослідовність послідовності $\{w^p = (u_1^p, \cdots, u_M^p; v_1^p, \cdots, v_L^p)\}_{p=0}^{\infty}$ (яку позначатимемо так ж само як і послідовність) така, що

$$\left.\begin{array}{l} u_i^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} u_i \ \text{ в } \ C\big(\overline{\Omega} \times (E_{i,0} \cup (0,T])\big), \\ u_{i,t}^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} u_{i,t}, \quad u_{i,x_k}^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} u_{i,x_k}, \ u_{i,x_k x_l}^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} u_{i,x_k x_l} \ \text{ в } \ C(Q), \end{array}\right\} \qquad (A.37)$$

$$v_j^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} v_j \quad \text{в} \quad C\big(\overline{\Omega} \times (E_{M+j,0} \cup (0,T])\big), \quad v_{j,t}^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} v_{j,t} \quad \text{в} \quad C(\overline{Q}). \qquad (A.38)$$

Отже, використовуючи (A.37), (A.38) та переходячи до границі у (A.23) і (A.24) при $p \to \infty$ отримаємо рівності, тобто, функція $w = (u; v) \in W$ є розв'язком системи (2.32), (2.33). Як уже згадувалось раніше, w задовольняє умови (2.34), (2.35), отже w – розв'язок задачі (2.32)–(2.35). ∎

A.2 Обґрунтування результатів підрозділу 2.4

Надалі використовуватимемо позначення

$$Pw := (P_1 w, \ldots, P_M w, P_{M+1} w, \ldots, P_{M+L} w), \quad Rw := (R_1 w, \ldots, R_M w).$$

A.2.1 Допоміжні твердження

Розглянемо задачу: знайти вектор-функцію $w = (u_1, \ldots, u_M, v_1, \ldots, v_L) \in W$, яка задовольняє систему рівнянь

$$p_i(x,t)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,lk}(x,t)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k} + a_i(x,t)u_i(x,t) -$$

$$-\sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{i,s}^1(x,t) w_s(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{i,s}^2(x,t) w_{s,\tau_s}(x,t) = f_i(x,t), \ (x,t) \in Q, \ i = 1, \ldots, M, \qquad (A.39)$$

$$q_j(x,t)\frac{\partial v_j(x,t)}{\partial t} + b_j(x,t)v_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{M+j,s}^1(x,t) w_s(x,t) -$$

$$-\sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{M+j,s}^2(x,t) w_{s,\tau_s}(x,t) = f_{M+j}(x,t), \quad (x,t) \in \widetilde{Q}, \quad j = 1, \ldots, L, \quad (A.40)$$

і умови (2.93), (2.94).

Припускаємо, що функції $p_i, a_{i,kl}, a_{i,k}, a_i$, q_j, b_j, f_r, τ_r, h_i ($r = 1, \ldots, M+L$; $i = 1, \ldots, M$; $j = 1, \ldots, L$; $k, l = \overline{1,n}$) задовольняють умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_4)$, а функції $\widetilde{g}_{r,s}^1$, $\widetilde{g}_{r,s}^2$ $(r, s = 1, \ldots, M+L)$ – умову

$(\mathcal{A}_3^*)$ $\widetilde{g}^1_{i,s}, \widetilde{g}^2_{i,s} \in C(Q)$, $\widetilde{g}^1_{M+j,s}, \widetilde{g}^2_{M+j,s} \in C(\widetilde{Q})$,

$\widetilde{g}^1_{i,s} \geq 0$, $\widetilde{g}^2_{i,s} \geq 0$ на Q, $\widetilde{g}^1_{M+j,s} \geq 0$, $\widetilde{g}^2_{M+j,s} \geq 0$ на $\widetilde{Q}$ $(i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, L;\ s = 1, \ldots, M+L;)$,

$$\inf_{(x,t)\in Q} \Big(a_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^1_{i,s}(x,t)\Big) =: \widetilde{a}_i^- > -\infty \quad (i = 1, \ldots, M),$$

$$\inf_{(x,t)\in \widetilde{Q}} \Big(b_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^1_{M+j,s}(x,t)\Big) =: \widetilde{b}_j^- > -\infty \quad (j = 1, \ldots, L),$$

$$\sup_{(x,t)\in Q} \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^2_{r,s}(x,t) =: \widetilde{g}^{2,+}_r < +\infty \quad (r = 1, \ldots, M+L).$$

Твердження А.2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_3^*)$, $(\mathcal{A}_4)$ *і*

$$\widetilde{a}_i^- - \widetilde{g}_i^{2,+} > 0, \quad \widetilde{b}_j^- - \widetilde{g}^{2,+}_{M+j} > 0 \quad (i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, L). \tag{A.41}$$

Тоді розв'язок w задачі (А.39), (А.40), (2.93), (2.94) задовольняє оцінки

$$\forall i \in \{1, \ldots, M\}: \quad \min\Big\{\frac{1}{\widetilde{a}_i^- - \widetilde{g}_i^{2,+}} \inf_{(y,s)\in Q} f_i(y,s), \inf_{(y,s)\in\Sigma} h_i(y,s), 0\Big\}$$

$$\leq u_i(x,t) \leq \max\Big\{\frac{1}{\widetilde{a}_i^- - \widetilde{g}_i^{2,+}} \sup_{(y,s)\in Q} f_i(y,s), \sup_{(y,s)\in\Sigma} h_i(y,s), 0\Big\}, \quad (x,t) \in Q, \tag{A.42}$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, L\}: \ \min\Big\{\frac{1}{\widetilde{b}_j^- - \widetilde{g}^{2,+}_{M+j}} \inf_{(y,s)\in\widetilde{Q}} f_{M+j}(y,s), 0\Big\}$$

$$\leq v_j(x,t) \leq \max\Big\{\frac{1}{\widetilde{b}_j^- - \widetilde{g}^{2,+}_{M+j}} \sup_{(y,s)\in\widetilde{Q}} f_{M+j}(y,s), 0\Big\}, \quad (x,t) \in \widetilde{Q}. \tag{A.43}$$

Доведення. Для зручності викладення матеріалу введемо такі позначення:

$$\theta(t) := \int_T^t \varphi(\rho)d\rho, \quad \varkappa_s(t) := \int_{t-\tau_s(t)}^t \varphi(\rho)d\rho, \quad t \in (0,T], \quad s = 1, \ldots, M+L. \tag{A.44}$$

Очевидно, що $\theta(t) \leq 0$ при $t \in (0,T]$, а θ монотонно зростає на $(0,T]$, $\theta(T) = 0$, $\theta(t) \to -\infty$ при $t \to -\infty$; $\varkappa_s(t) \geq 0$ при $t \in (0,T]$ та $\varkappa_s$ – обмежені ($s = 1, \ldots, M+L$).

Нехай w – розв'язок задачі (А.39), (А.40), (2.93), (2.94). Позначимо через $M > 0$ сталу таку, що

$$|w(x,t)| \leq M, \ \ (x,t) \in \widetilde{Q}, \tag{A.45}$$

а через w^μ – функцію таку, що

$$w(x,t) = w^\mu(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)}, \quad (x,t) \in \widetilde{Q}, \tag{A.46}$$

тобто, $w^\mu(x,t) = w(x,t)e^{\mu\,\theta(t)}$, $(x,t) \in \widetilde{Q}$, де $\mu > 0$ – поки що довільне число.

З рівностей (A.39), (A.40), врахувавши рівності

$$w_{r,t}(x,t) = w^\mu_{r,t}(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)} - \mu\varphi(t)\, w^\mu_r(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)}, \quad r = 1,\ldots,M+L,$$

$$u_{i,x_k}(x,t) = u^\mu_{i,x_k}(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)}, \;\; u_{i,x_kx_l}(x,t) = u^\mu_{i,x_kx_l}(x,t)e^{-\mu\theta(t)},$$

$$w_{s,\tau_s}(x,t) = w^\mu_{s,\tau_s}(x,t)e^{-\mu\int\limits_T^{t-\tau_s(t)}\varphi(\rho)d\rho} \equiv e^{\mu\,\varkappa_s(t)}w^\mu_{s,\tau_s}(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)}, \quad s = 1,\ldots,M+L,$$

матимемо

$$p_i(x,t)\frac{\partial u^\mu_i(x,t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,lk}(x,t)\frac{\partial u^\mu_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t)\frac{\partial u^\mu_i(x,t)}{\partial x_k} + a^\mu_i(x,t)u^\mu_i(x,t) -$$

$$-\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}^1_{i,s}(x,t)w^\mu_s(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}^{2,\mu}_{i,s}(x,t)w^\mu_{s,\tau_s}(x,t) = f^\mu_i(x,t), \;\; (x,t) \in Q, \; i = 1,\ldots,M,$$

$$q_j(x,t)\frac{\partial v^\mu_j(x,t)}{\partial t} + b^\mu_j(x,t)v^\mu_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M}\widetilde{g}^1_{M+j,s}(x,t)\, w^\mu_s(x,t) -$$

$$-\sum_{s=1}^{L}\widetilde{g}^{2,\mu}_{M+j,s}(x,t)\, w^\mu_{s,\tau_s}(x,t) = f^\mu_{M+j}(x,t), \quad (x,t) \in \widetilde{Q}, \quad j = 1,\ldots,L, \tag{A.47}$$

де

$$a^\mu_i(x,t) := a_i(x,t) - \mu p_i(x,t)\varphi(t) \quad (i = 1,\ldots,M),$$

$$b^\mu_j(x,t) := b_j(x,t) - \mu q_j(x,t)\varphi(t) \quad (j = 1,\ldots,L),$$

$$\widetilde{g}^{2,\mu}_{r,s}(x,t) := \widetilde{g}^2_{r,s}(x,t)e^{\mu\,\varkappa_s(t)}, \quad f^\mu_r(x,t) := f_r(x,t)e^{\mu\,\theta(t)} \quad (r,s = 1,\ldots,M+L). \tag{A.48}$$

З умови (2.93) та співвідношення (A.46) маємо

$$u^\mu_i(x,t) = h^\mu_i(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{A.49}$$

де $h^\mu_i(x,t) := h_i(x,t)e^{\mu\,\theta(t)}$, $(x,t) \in \Sigma$ $(i = 1,\ldots,M)$.

Нехай $\varepsilon \in (0,T)$ – довільне число. Позначимо через $E_{s,\varepsilon}$ $(s = 1,\ldots,M+L)$ множину, що складається з чисел $t - \tau_s(t)$ таких, що $t - \tau_s(t) < \varepsilon$ при $t \geq \varepsilon$, а також числа ε. Приймемо

$$Q_\varepsilon := \Omega \times (\varepsilon,T], \quad \overline{Q_\varepsilon} := \overline{\Omega} \times [\varepsilon,T], \quad \Sigma_\varepsilon := \partial\Omega \times (\varepsilon,T].$$

Розглянемо задачу: знайти функцію $w^{\mu,\varepsilon} = (u_1^{\mu,\varepsilon}, \dots, u_M^{\mu,\varepsilon}; v_1^{\mu,\varepsilon}, \dots, v_L^{\mu,\varepsilon})$ таку, що $u_i^{\mu,\varepsilon} \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_{i,\varepsilon} \cup (\varepsilon, T])\big) \cap C^{2,1}(Q_\varepsilon)$ $(i = 1, ..., M)$, $v_j^{\mu,\varepsilon} \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_{M+j,\varepsilon} \cup (\varepsilon, T])\big) \cap C^{0,1}(\overline{Q_\varepsilon})$ $(j = 1, ..., L)$, яка задовольняє систему

$$p_i(x,t)\frac{\partial u_i^{\mu,\varepsilon}(x,t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,lk}(x,t)\frac{\partial u_i^{\mu,\varepsilon}(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t)\frac{\partial u_i^{\mu,\varepsilon}(x,t)}{\partial x_k} +$$

$$+a_i^{\mu}(x,t)u_i^{\mu,\varepsilon}(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{i,s}^{1}(x,t)\, w_s^{\mu,\varepsilon}(x,t) -$$

$$- \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{i,s}^{2,\mu}(x,t)\, w_{s,\tau_s}^{\mu,\varepsilon}(x,t) = f_i^{\mu}(x,t), \quad (x,t) \in Q_\varepsilon, \quad i = 1, \dots, M, \qquad (A.50)$$

$$q_j(x,t)\frac{\partial v_j^{\mu,\varepsilon}(x,t)}{\partial t} + b_j^{\mu}(x,t)v_j^{\mu,\varepsilon}(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{M+j,k}^{1}(x,t)\, w_s^{\mu,\varepsilon}(x,t)$$

$$- \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{M+j,k}^{2,\mu}(x,t)\, w_{s,\tau_s}^{\mu,\varepsilon}(x,t) = f_{M+j}^{\mu}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}_\varepsilon, \quad j = 1, \dots, L, \qquad (A.51)$$

крайову умову

$$u_i^{\mu,\varepsilon}(x,t) = h_i^{\mu}(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_\varepsilon, \;\; i = 1, \dots, M, \qquad (A.52)$$

і початкову умову

$$w_r^{\mu,\varepsilon}(x,t) = w_r^{\mu}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_{r,\varepsilon}, \;\; r = 1, \dots, M+L. \qquad (A.53)$$

Така задача уже без виродження, тому ми можемо застосувати результати, одержані у підрозділі 2.2. Переконаємося, що для розв'язків задачі (A.50)–(A.53), при досить малих значеннях μ виконуються умови наслідку 2.6.

Очевидно, що з умови $\widetilde{g}_{r,s}^{2} \geq 0$ випливають умови $\widetilde{g}_{r,s}^{2,\mu} \geq 0$ $(r, s = 1, \dots, M+L)$ для кожного $\mu > 0$. Покажемо, що існує $\mu_* > 0$ таке, що $\widetilde{a}_i^{\mu,-} - \widetilde{g}_i^{2,\mu+} > 0$ $(i = 1, ..., M)$ та $\widetilde{b}_j^{\mu,-} - \widetilde{g}_{M+j}^{2,\mu,+} > 0$ $(j = 1, ..., L)$ для будь-якого $\mu \in (0, \mu_*]$, де $\widetilde{a}_i^{\mu,-} := \inf\limits_{(x,t)\in Q} \big(a_i^{\mu}(x,t) - \sum\limits_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{i,s}^{1}(x,t)\big)$, $\widetilde{b}_j^{\mu,-} := \inf\limits_{(x,t)\in Q} \big(b_j^{\mu}(x,t) - \sum\limits_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{M+j,s}^{1}(x,t)\big)$, $\widetilde{g}_r^{2,\mu,+} := \sup\limits_{(x,t)\in Q} \sum\limits_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{r,s}^{2,\mu}(x,t)$. Для цього покладемо

$$(p_i\varphi)^+ := \sup_{(x,t)\in Q} \big(p_i(x,t)\varphi(t)\big), \quad (q_j\varphi)^+ := \sup_{(x,t)\in Q} \big(q_j(x,t)\varphi(t)\big),$$

$$\varkappa^+ := \max_{s\in\{1,\dots,M+L\}} \sup_{t\in(0,T]} \varkappa_s(t).$$

Тоді очевидно, що для кожного $\mu > 0$ виконуються співвідношення

$$\widetilde{a}_i^{\mu,-} = \inf_{(x,t)\in Q} \big(a_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{i,s}^1(x,t) - \mu p_i(x,t)\varphi(t)\big) \geq \widetilde{a}_i^- - \mu(p_i\varphi)^+, \quad (A.54)$$

$$\widetilde{b}_j^{\mu,-} = \inf_{(x,t)\in Q} \big(b_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{M+j,s}^1(x,t) - \mu q_j(x,t)\varphi(t)\big) \geq \widetilde{b}_j^- - \mu(q_j\varphi)^+, \quad (A.55)$$

а також

$$\widetilde{g}_r^{2,\mu,+} = \sup_{(x,t)\in Q} \big(\sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}_{r,s}^2(x,t) e^{\mu\varkappa_s(t)}\big) \leq \widetilde{g}_r^{2\,+} e^{\mu\varkappa^+}, \quad \mu > 0. \quad (A.56)$$

З (54) – (56) для кожного $\mu > 0$ маємо

$$\widetilde{a}_i^{\mu,-} - \widetilde{g}_i^{2,\mu,+} \geq \widetilde{a}_i^- - \widetilde{g}_i^{2\,+} e^{\mu\varkappa^+} - \mu(p_i\varphi)^+, \quad \widetilde{b}_j^{\mu,-} - \widetilde{g}_{M+j}^{2,\mu,+} \geq \widetilde{b}_j^- - \widetilde{g}_{M+j}^{2,+} e^{\mu\varkappa^+} - \mu(q_j\varphi)^+.$$

Для кожного $i \in \{1,\dots,M\}$ розглянемо функцію $l_i(\mu) := \widetilde{a}_i^- - \widetilde{g}_i^{2\,+} e^{\mu\varkappa^+} - \mu(p_i\varphi)^+$, $\mu \in [0,+\infty)$. Очевидно, що вона є неперервна і $l_i(0) = \widetilde{a}_i^- - \widetilde{g}_i^{2\,+} > 0$. Звідси випливає існування такого $\mu_i > 0$, що $l_i(\mu) > 0$ при $\mu \in [0,\mu_i]$. Для кожного $j \in \{1,\dots,L\}$ розглянемо функцію $l_{M+j}(\mu) := \widetilde{b}_j^- - \widetilde{g}_{M+j}^{2\,+} e^{\mu\varkappa^+} - \mu(q_j\varphi)^+$, $\mu \in [0,+\infty)$. Очевидно, що вона є неперервною і $l_{M+j}(0) = \widetilde{b}_j^- - \widetilde{g}_{M+j}^{2\,+} > 0$. Звідси випливає існування такого $\mu_{M+L} > 0$, що $l_{M+j}(\mu) > 0$ при $\mu \in [0,\mu_{M+j}]$. Виберемо $\mu_* = \min\{\mu_1,\dots,\mu_{M+L}\}$. Зі сказаного вище маємо, що

$$\widetilde{a}_i^{\mu,-} - \widetilde{g}_i^{2,\mu,+} \geq l_i(\mu) > 0, \qquad \widetilde{b}_j^{\mu,-} - \widetilde{g}_{M+j}^{2,\mu,+} \geq l_{M+j}(\mu) > 0 \quad \text{при} \quad \mu \in [0,\mu_*]. \quad (A.57)$$

Отже, при $\mu \in [0,\mu_*]$ умови наслідку 2.6 у випадку задачі (A.50)–(A.53) виконуються.

З (A.47) і (A.49) випливає, що звуження w_r^μ на $\overline{\Omega} \times (E_{r,\varepsilon} \cup (\varepsilon,T])$ ($r = 1,\dots,M+L$) є розв'язком задачі (A.50)–(A.53). Отож, на підставі наслідку 2.6 для $\mu \in [0,\mu_*]$, маємо оцінку

$$\min\Big\{\frac{1}{\widetilde{a}_i^{\mu,-} - \widetilde{g}_i^{2,\mu,+}} \inf_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f_i^\mu(y,s), \inf_{(y,s)\in\Sigma_\varepsilon} h_i^\mu(y,s), \inf_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{i,\varepsilon}} w^\mu(y,s),\, 0\Big\} \leq$$

$$\leq u_i^\mu(x,t) \leq \max\Big\{\frac{1}{\widetilde{a}_i^{\mu,-} - \widetilde{g}_i^{2,\mu,+}} \sup_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f_i^\mu(y,s),$$

$$\sup_{(y,s)\in\Sigma_\varepsilon} h_i^\mu(y,s), \sup_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times E_{i,\varepsilon}} w^\mu(y,s), 0\Big\}, \quad (x,t)\in Q\varepsilon, \tag{A.58}$$

$$\min\Big\{\frac{1}{\widetilde{b}_j^{\mu,-}-\widetilde{g}_{M+j}^{2,\mu,+}} \inf_{(y,s)\in\overline{Q}_\varepsilon} f_{M+j}^\mu(y,s), \inf_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_{M+j,\varepsilon}} w^\mu(y,s),\, 0\Big\} \le v_j^\mu(x,t)$$

$$\le \max\Big\{\frac{1}{\widetilde{b}_j^{\mu,-}-\widetilde{g}_{M+j}^{2,\mu,+}} \sup_{(y,s)\in\overline{Q}_\varepsilon} f_{M+j}^\mu(y,s), \sup_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times E_{M+j,\varepsilon}} w^\mu(y,s), 0\Big\}, \quad (x,t)\in\overline{Q_\varepsilon}. \tag{A.59}$$

Зрозуміло, що для будь-якого $\varepsilon\in(0,T)$ маємо

$$\inf_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f_r^\mu(y,s) \ge \inf_{(y,s)\in Q} f_r^\mu(y,s), \quad \inf_{(y,s)\in\Sigma_\varepsilon} h_i^\mu(y,s) \ge \inf_{(y,s)\in\Sigma} h_i^\mu(y,s), \tag{A.60}$$

$$\sup_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f_r^\mu(y,s) \le \sup_{(y,s)\in Q} f_r^\mu(y,s), \quad \sup_{(y,s)\in\Sigma_\varepsilon} h_i^\mu(y,s) \le \sup_{(y,s)\in\Sigma} h_i^\mu(y,s). \tag{A.61}$$

Також легко переконатися, врахувавши оцінку (A.45) і монотонність θ, що

$$\sup_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times E_\varepsilon} |w_r^\mu(y,s)| \le \sup_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times(0,\varepsilon]} |w_r(y,s)e^{\mu\theta(s)}| \le Me^{\mu\theta(\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0. \tag{A.62}$$

На підставі (A.60) – (A.62), спрямувавши в (A.58), (A.59) $\varepsilon\to 0$, отримаємо

$$\min\Big\{\frac{1}{\widetilde{a}_i^{\mu,-}-\widetilde{g}_i^{2,\mu,+}} \inf_{(y,s)\in Q} f_i^\mu(y,s), \inf_{(y,s)\in\Sigma} h_i^\mu(y,s),\, 0\Big\} \le u_i^\mu(x,t)$$

$$\le \max\Big\{\frac{1}{\widetilde{a}_i^{\mu,-}-\widetilde{g}_i^{2,\mu,+}} \sup_{(y,s)\in Q} f_i^\mu(y,s), \sup_{(y,s)\in\Sigma} h_i^\mu(y,s), 0\Big\}, \quad (x,t)\in Q, \tag{A.63}$$

$$\min\Big\{\frac{1}{\widetilde{b}_j^{\mu,-}-\widetilde{g}_{M+j}^{2,\mu,+}} \inf_{(y,s)\in\widetilde{Q}} f_{M+j}^\mu(y,s),\, 0\Big\} \le v_j^\mu(x,t)$$

$$\le \max\Big\{\frac{1}{\widetilde{b}_j^{\mu,-}-\widetilde{g}_{M+j}^{2,\mu,+}} \sup_{(y,s)\in\widetilde{Q}} f_{M+j}^\mu(y,s), 0\Big\}, \quad (x,t)\in\widetilde{Q}. \tag{A.64}$$

Нехай $Q_{r,-} := \{(x,t)\in Q \mid f_r^\mu(x,t) < 0\}$, $Q_{r,+} := \{(x,t)\in Q \mid f_r^\mu(x,t) > 0\}$, $\Sigma_{i,-} := \{(x,t)\in Q \mid h_i^\mu(x,t) < 0\}$, $\Sigma_{i,+} := \{(x,t)\in Q \mid h_i^\mu(x,t) > 0\}$.

У випадку $Q_{r,-}\ne\varnothing$, маючи на увазі нерівність $0 < e^{\mu\theta(\rho)} \le 1$, $\rho\in(0,T]$, отримаємо

$$\inf_{(y,s)\in Q} f_r^\mu(y,s) = \inf_{(y,s)\in Q_{r,-}} f_r e^{\mu\theta(\rho)} \ge \inf_{(y,s)\in Q_{r,-}} f_r(y,s) = \inf_{(y,s)\in Q} f_r(y,s),$$

а тому (див. (A.57)) маємо

$$\frac{1}{\widetilde{a}_i^{\mu,-}-\widetilde{g}_i^{\mu,+}} \inf_{(y,s)\in Q} f_i^\mu(y,s) \ge \frac{1}{\widetilde{a}_i^{\mu,-}-\widetilde{g}_i^{\mu,+}} \inf_{(y,s)\in Q} f_i(y,s) \ge \frac{1}{l_i(\mu)} \inf_{(y,s)\in Q} f_i(y,s). \tag{A.65}$$

Отже, в цьому випадку в лівій частині нерівності (A.58) перший член можна замінити на $\frac{1}{l_i(\mu)} \inf\limits_{(y,s)\in Q} f_i(y,s)$. Очевидно, що теж саме можна зробити і тоді, коли $Q_{i,-} = \varnothing$, бо в цьому випадку перший член нерівності (A.58) є невід'ємний, а отже не визначає значення лівої частини нерівності (A.58).

Провівши аналогічні міркування стосовно решти членів нерівностей (A.63), (A.64) одержимо

$$\min\Big\{\frac{1}{l_i(\mu)} \inf_{(y,s)\in Q} f_i(y,s),\ \inf_{(y,s)\in\Sigma} h_i(y,s),\ 0\Big\} \le u_i(x,t)e^{\mu\,\theta(t)}$$

$$\le \max\Big\{\frac{1}{l_i(\mu)} \sup_{(y,s)\in Q} f_i(y,s),\ \sup_{(y,s)\in\Sigma} h_i(y,s), 0\Big\}, \quad (x,t)\in Q,\ \mu\in(0,\mu_*], \tag{A.66}$$

$$\min\Big\{\frac{1}{l_{M+j}(\mu)} \inf_{(y,s)\in Q} f_{M+j}(y,s), 0\Big\} \le v_j(x,t)e^{\mu\,\theta(t)}$$

$$\le \max\Big\{\frac{1}{l_{M+j}(\mu)} \sup_{(y,s)\in Q} f_{M+j}(y,s), 0\Big\}, \quad (x,t)\in \widetilde{Q},\ \mu\in(0,\mu_*]. \tag{A.67}$$

Зафіксувавши довільним чином вибрану точку $(x,t)\in Q$, перейдемо в (A.66), (A.67) до границі при $\mu\to+0$. У результаті, взявши до уваги, що $l_i(\mu)\underset{\mu\to 0}{\longrightarrow} \widetilde{a}_i^- - \widetilde{g}_i^{2,+}$, $l_{M+j}(\mu)\underset{\mu\to 0}{\longrightarrow} \widetilde{b}_j^- - \widetilde{g}_{M+j}^{2,+}$, отримаємо оцінки (A.42), (A.43). ∎

A.2.2 Обґрунтування основних результатів підрозділу 2.4

Доведення теореми 2.7. Розглянемо задачі для $w^1=(u^1;v^1)$ та $w^2=(u^2;v^2)$. Позначимо через $\widehat{w}=(\widehat{u};\widehat{v})$ вектор функцію, компоненти якої є $\widehat{w}_i(x,t) = \widehat{u}_i := u_i^1(x,t)-u_i^2(x,t)$, $(x,t)\in\widetilde{Q}$, при $i=1,...,M$, та $\widehat{w}_{M+j}(x,t)=\widehat{v}_j := v_j^1(x,t)-v_j^2(x,t)$, $(x,t)\in\widetilde{Q}$, при $j=1,...,L$. Розглядаючи різницю виразів Pw^1 та Pw^2, а також використовуючи лему A.3, отримаємо рівності

$$P_i\widehat{w}(x,t) := p_i(x,t)\frac{\partial\widehat{u}_i(x,t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,lk}(x,t)\frac{\partial\widehat{u}_i(x,t)}{\partial x_k\partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t)\frac{\partial\widehat{u}_i(x,t)}{\partial x_k} +$$

$$+a_i(x,t)\widehat{u}_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{i,s}^1(x,t)\widehat{w}_s(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{i,s}^2(x,t)\widehat{w}_{s,\tau_s}(x,t) =$$

$$= \widehat{f}_i(x,t), \quad (x,t)\in Q, \quad i=1,\dots,M, \tag{A.68}$$

$$P_{M+j}\widehat{w}(x,t) := q_j(x,t)\frac{\partial\widehat{v}_j(x,t)}{\partial t} + b_j(x,t)\widehat{v}_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}_{M+j,s}^1(x,t)\widehat{w}_s(x,t)$$

$$-\sum_{s=1}^{M+L} \widetilde{g}^2_{M+j,s}(x,t)\widehat{w}_{s,\tau_s}(x,t) = \widehat{f}_{M+j}(x,t), \quad (x,t)\in\widetilde{Q}, \quad j=1,\dots,L, \quad (A.69)$$

$$R_i\widehat{w}(x,t) := \widehat{u}_i(x,t) = \widehat{h}_i(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma, \quad i=1,\dots,M, \qquad (A.70)$$

$$\limsup_{t\to 0+}\max_{x\in\overline{\Omega}} |\widehat{w}_r(x,t)| < \infty, \quad r=1,\dots,M+L, \qquad (A.71)$$

де

$$\widetilde{g}^1_{r,s}(x,t) = G^1_{r,s}\Big(x,t,w^1(x,t),w^2(x,t),w^1_\tau(x,t),w^2_\tau(x,t)\Big),$$

$$\widetilde{g}^2_{r,s}(x,t) = G^2_{r,s}\Big(x,t,w^1(x,t),w^2(x,t),w^1_\tau(x,t),w^2_\tau(x,t)\Big),$$

$$\widehat{f}(x,t) := f^1(x,t) - f^2(x,t), \qquad \widehat{h}(x,t) := w^1(x,t) - w^2(x,t).$$

Перевіримо виконання умов твердження A.2, а точніше, переконаємося, що $\widetilde{g}^1_{i,s}\ge 0$, $\widetilde{g}^2_{i,s}\ge 0$ на Q, $\widetilde{g}^1_{M+j,s}\ge 0$, $\widetilde{g}^2_{M+j,s}\ge 0$ на $\widetilde{Q}$ ($i=1,\dots,M$; $j=1,\dots,L$; $s=1,\dots,M+L$) і $\widetilde{a}^-_i - \widetilde{g}^{2,+}_i > 0$, $\widetilde{b}^-_j - \widetilde{g}^{2,+}_{M+j} > 0$ ($i=1,\dots,M$; $j=1,\dots,L$). З леми A.3 (див. (A.16)) випливає, що $\widetilde{g}^1_{i,s}(x,t)\ge 0$, $\widetilde{g}^2_{i,s}(x,t)\ge 0$ для довільних $(x,t)\in Q$, та $\widetilde{g}^1_{M+j,s}(x,t)\ge 0$, $\widetilde{g}^2_{M+j,s}(x,t)\ge 0$ для довільних $(x,t)\in\widetilde{Q}$ ($i=1,\dots,M$; $j=1,\dots,L$; $s=1,\dots,M+L$) для довільних $(x,t)\in Q$. Використовуючи умову $(\mathcal{A}_3)$ та лему A.3 (див. (A.16)), отримаємо

$$\widetilde{a}^-_i := \inf_{(x,t)\in Q}\Big[a_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}^1_{i,s}(x,t)\Big] \ge \inf_{(x,t)\in Q}\Big[a_i(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} g^1_{i,s}(x,t)\Big] =$$

$$= a^-_i, \quad i=1,\dots,M,$$

$$\widetilde{b}^-_j := \inf_{(x,t)\in Q}\Big[b_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}^1_{M+j,s}(x,t)\Big] \ge \inf_{(x,t)\in Q}\Big[b_j(x,t) - \sum_{s=1}^{M+L} g^1_{M+j,s}(x,t)\Big] =$$

$$= b^-_j, \quad j=1,\dots,L,$$

$$\widetilde{g}^{2,+}_r := \sup_{(x,t)\in Q}\sum_{s=1}^{M+L}\widetilde{g}^2_{r,s}(x,t) \le \sup_{(x,t)\in Q}\sum_{s=1}^{M+L} g^2_{r,s}(x,t) = g^{2,+}_r, \quad r=1,\dots,M+L.$$

Отже, $\widetilde{a}^-_i - \widetilde{g}^{2,+}_i \ge a^-_i - g^{2,+}_i > 0$ ($i=1,...,M$), $\widetilde{b}^-_j - \widetilde{g}^{2,+}_{M+j} \ge b^-_j - g^{2,+}_{M+j} > 0$ ($j=1,...,L$). Отож, умови твердження A.2 виконуються, а це значить, що для функції $\widehat{w}$ правильні оцінки (A.42), (A.43), із заміною f,h, u_i ($i=1,\dots,M$), v_j ($j=1,\dots,L$) на $\widehat{f}$, $\widehat{h}$, $\widehat{u}_i$ ($i=1,\dots,M$), $\widehat{v}_j$ ($j=1,\dots,L$). Звідси випливають оцінки (2.99), (2.100). ∎

Доведення наслідку 2.11. З умови наслідку маємо, що $f^1(x,t) - f^2(x,t) \leq 0 \quad \forall (x,t) \in Q$, $h^1(x,t) - h^2(x,t) \leq 0 \quad \forall (x,t) \in \Sigma$. З (2.99), (2.100) отримаємо, що $w^1(x,t) - w^2(x,t) \leq 0$, тобто, $w^1(x,t) \leq w^2(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{Q}$. ∎

Доведення наслідку 2.12. Дане твердження безпосередньо випливає з теореми 2.7 при $w^1 = w$ та $w^2 = 0$. ∎

Доведення наслідку 2.13. Припустимо протилежне і нехай w^1, w^2 – два різні розв'язки задачі (2.91)–(2.94). Тоді на підставі теореми 2.7, маємо, що $0 \leq w^1(x,t) - w^2(x,t) \leq 0$, $(x,t) \in \widetilde{Q}$, тобто, $w^1 = w^2$ на $\widetilde{Q}$, що протирічить нашому припущенню. Отож, наше твердження є правильним. ∎

Доведення теореми 2.8. Нехай ε – довільне число з проміжку $(0, T/3)$, а позначення Q_ε, Σ_ε, E_ε такі ж, як при доведенні твердження А.2.

Візьмемо функцію $\theta_\varepsilon \in C^\infty((0,T])$, яка задовольняє умови: $0 \leq \theta_\varepsilon(t) \leq 1$ при $t \in (0,T]$, $\theta_\varepsilon(t) = 0$ при $t \in (0, 2\varepsilon]$ та $\theta_\varepsilon(t) = 1$ при $t \in (3\varepsilon, T]$. Покладемо для $\forall i \in \{1, \ldots, M\}$, $\quad r \in \{1, \ldots, M+L\}$

$$h_i^\varepsilon(x,t) := \theta_\varepsilon(t) h_i(x,t), \ (x,t) \in \Sigma, \quad f_r^\varepsilon(x,t) := \theta_\varepsilon(t) f_r(x,t), \ (x,t) \in \widetilde{Q},$$

Зауважимо, що для $\forall i \in \{1, \ldots, M\}$, $\quad r \in \{1, \ldots, M+L\}$

$$|h_i^\varepsilon(x,t)| \leq |h_i(x,t)| \ \forall (x,t) \in \Sigma, \quad |f_i^\varepsilon(x,t)| \leq |f_i(x,t)| \ \forall (x,t) \in \widetilde{Q}. \qquad (A.72)$$

Розглянемо задачу: знайти вектор-функцію $w^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, \ldots, u_M^\varepsilon; v_1^\varepsilon, \ldots, v_L^\varepsilon)$ таку, що $u_i^\varepsilon \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_{i,\varepsilon} \cup (0,T])\big) \cap C^{2,1}(Q_\varepsilon)$ $(i = 1, ..., M)$, $v_j^\varepsilon \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_{M+j,\varepsilon} \cup (0,T])\big) \cap C^{0,1}(\overline{Q_\varepsilon})$ $(j = 1, ..., L)$, яка задовольняє систему

$$P_i w^\varepsilon(x,t) = f_i^\varepsilon(x,t), \quad (x,t) \in Q_\varepsilon, \ i = 1, ..., M, \qquad (A.73)$$

$$P_{M+j} w^\varepsilon(x,t) = f_{M+j}^\varepsilon(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q_\varepsilon}, \quad j = 1, ..., L, \qquad (A.74)$$

та умови

$$u_i^\varepsilon(x,t) = h_i^\varepsilon(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, M, \qquad (A.75)$$

$$w_r^\varepsilon(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_{r,\varepsilon}, \ r = 1, \ldots, M+L, \qquad (A.76)$$

де P_r $(r = 1, \ldots, M+L)$ – диференціальні оператори, які визначені у (А.2.91), (А.2.92).

З теореми 2.4 випливає існування єдиного розв'язку $w^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, \dots, u_M^\varepsilon; v_1^\varepsilon, \dots, v_L^\varepsilon)$ задачі (A.73)–(A.76) такого, що $u_i \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times (E_{i,\varepsilon} \cup (\varepsilon, T])\big) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q_\varepsilon)$, $v_j \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times (E_{M+j,\varepsilon} \cup (\varepsilon, T])\big) \cap C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_\varepsilon})$ ($i = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, L$). На підставі наслідку 2.6 для звуження u_i^ε на $\overline{\Omega} \times (E_{i,\varepsilon} \cup (\varepsilon, 2\varepsilon])$ маємо оцінку

$$|u_i^\varepsilon(x,t)| \le \max\{\frac{1}{a_i^- - g_i^{2,+}} \sup_{(y,s)\in Q_\varepsilon/Q_{2\varepsilon}} |f_i^\varepsilon(y,s)|, \sup_{(y,s)\in \Sigma_\varepsilon/\Sigma_{2\varepsilon}} |h_i^\varepsilon(y,s)|\}, \ (x,t) \in \overline{Q_\varepsilon}/\overline{Q_{2\varepsilon}}, \tag{A.77}$$

а для звуження v_j^ε на $\overline{\Omega} \times (E_{M+j,\varepsilon} \cup (\varepsilon, 2\varepsilon])$ маємо оцінку

$$|v_j^\varepsilon(x,t)| \le \max\{\frac{1}{b_j^- - g_{M+j}^{2,+}} \sup_{(y,s)\in \overline{Q_\varepsilon}/\overline{Q_{2\varepsilon}}} |f_{M+j}^\varepsilon(y,s)|\}, \quad (x,t) \in \overline{Q_\varepsilon}/\overline{Q_{2\varepsilon}}. \tag{A.78}$$

З означень f^ε та h^ε випливає, що праві частини (A.77), (A.78) дорівнюють нулю, а тому $w_r^\varepsilon(x,t) = 0$ для кожного $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (E_{r,\varepsilon} \cup (\varepsilon, 2\varepsilon])$ ($r = 1, \dots, M+L$). Довизначимо w^ε нулем на всю множину $\widetilde{Q}$ і залишимо за цим продовженням позначення w^ε. Легко переконатися, що w^ε є розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (2.91)–(2.94) тільки тим, що замість f та h стоять, відповідно, f^ε та h^ε. Звідси, на підставі наслідку 2.13 та (A.72), маємо, що

$$|u_i^\varepsilon(x,t)| \le \max\{\frac{1}{a_i^- - g_i^{2,+}} \sup_{(y,s)\in Q} |f_i(y,s)|, \sup_{(y,s)\in \Sigma} |h_i(y,s)|\}, \quad (x,t) \in \widetilde{Q}, \tag{A.79}$$

$$|v_j^\varepsilon(x,t)| \le \max\{\frac{1}{b_j^- - g_{M+j}^{2,+}} \sup_{(y,s)\in Q} |f_{M+j}(y,s)|, 0\}, \quad (x,t) \in \widetilde{Q}. \tag{A.80}$$

Нехай $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ – послідовність чисел з інтервалу $(0, T/2)$, така, що $\varepsilon_m \downarrow 0$ when $m \to \infty$. Перепозначимо $w^m := w^{\varepsilon_m}$, $f_r^m := f_r^{\varepsilon_m}$, $h_i^m := h_i^{\varepsilon_m}$ ($i = 1, \dots, M$; $r = 1, \dots, M+L$) для кожного $m \in \mathbb{N}$. З (A.79), (A.80) випливає, що

$$\sup_{(x,t)\in\widetilde{Q}} |w_r^m(x,t)| \le C_3, \qquad r = 1, \dots, M+L, \ m \in \mathbb{N}, \tag{A.81}$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка не залежить від m.

Нехай $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ – монотонна послідовність чисел така, що $\delta_k \underset{k\to\infty}{\downarrow} 0$, $0 < \delta_k < T$ та $\Omega_k := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}\{x, \partial\Omega\} > \delta_k\}$ – область в $\mathbb{R}^n$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Позначимо $I_k := (\delta_k, T]$, $Q_k := \Omega_k \times I_k$, $Q^k := \Omega \times I_k$. Відмітимо,

що $Q_k \subset Q^k$, $Q_k \subset Q_{k+1}$, $Q^k \subset Q^{k+1}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$; $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overline{Q}_k = Q$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overline{Q^k} = \widetilde{Q}$.

Позначимо $g_r^m(x,t) := f_r^m(x,t) + g_r(x,t,w^m(x,t),w_\tau^m(x,t))$, $(x,t) \in \widetilde{Q}$, для кожного $r = 1,\ldots,M+L$, $m \in \mathbb{N}$. З неперервності функцій g_r на $\widetilde{Q}\times\mathbb{R}^{M+L}\times\mathbb{R}^{M+L}$, f_r^m, w_r^m на $\widetilde{Q}$ $(r = 1,\ldots,M+L;\ m \in \mathbb{N})$, та оцінок (A.72), (A.81) випливає, що функції g_r^m є неперервними на $\widetilde{Q}$ і для довільного $k \in \mathbb{N}$ правильна оцінка

$$||g_r^m||_{C(\overline{Q^k})} \leqslant C_4, \quad r = 1,\ldots,M+L,\ m \in \mathbb{N}, \tag{A.82}$$

де $C_4 > 0$ – стала, яка не залежить від m, але може залежати від k.

З (A.73), (A.74) випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ маємо

$$p_i(x,t)\frac{\partial u_i^m(x,t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,lk}(x,t)\frac{\partial u_i^m(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t)\frac{\partial u_i^m(x,t)}{\partial x_k}$$

$$+a_i(x,t)u_i^m(x,t) = g_i^m(x,t), \quad (x,t) \in Q,\ i = 1,...,M, \tag{A.83}$$

$$q_j(x,t)\frac{\partial v_j^m(x,t)}{\partial t} + b_j(x,t)v_j^m(x,t) = g_{M+j}^m(x,t), \quad (x,t) \in \widetilde{Q}, \quad j = 1,...,L, \tag{A.84}$$

а з (A.75) отримаємо

$$u_i^m(x,t) = h_i^m(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \quad i = 1,\ldots,M. \tag{A.85}$$

З того, що u_i^m – класичний розв'язок рівняння (A.83), який задовольняє початкову умову (A.85), а також з умов $(\mathcal{B}_1)$, $(\mathcal{B}_3)$, $(\mathcal{B}_4)$ та оцінок (A.81), (A.82), на підставі теореми 1.1 монографії [10, с. 476], отримаємо оцінку

$$\max_{1\le i\le M} ||u_i^m||_{\alpha,\alpha/2}^{\overline{Q^k}} \le C_5, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{A.86}$$

де $C_5 > 0$ – стала, яка не залежить від m, але може залежати від k.

Так як v_j^m – класичний розв'язок рівняння (A.84), аналогічно як у роботі [53], можна показати

$$\max_{1\le j\le L} ||v_i^m||_{\alpha,\alpha/2}^{\overline{Q^k}} \le C_6, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{A.87}$$

де $C_6 > 0$ – стала, яка не залежить від m, але може залежати від k.

Відмітимо, що з умов $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{A}_4)$, $(\mathcal{B}_2)$, $(\mathcal{B}_4)$ та оцінок (A.86), (A.87) маємо

$$\max_{1\le r\le M+L} ||g_r^m||_{\alpha,\alpha/2}^{\overline{Q^k}} \leqslant C_7, \quad m\in\mathbb{N}, \tag{A.88}$$

де $C_7>0$ – стала, яка не залежить від m, але може залежати від k.

Враховуючи (A.81), (A.88) і умови нашої теореми, на підставі теореми 10.1 монографії [10, с.400], для кожного $k\in\mathbb{N}$ матимемо

$$\max_{1\le i\le M} ||u_i^m||_{2+\alpha,1+\alpha/2}^{\overline{Q}_k} \leqslant C_7, \quad m\in\mathbb{N}, \tag{A.89}$$

де $C_7>0$ – стала, яка від m не залежить, але залежить від C_5, C_6.

З умови $(\mathcal{B}_2)$ та оцінок (A.81), (A.86)–(A.89), аналогічно як у роботі [34], можна показати

$$\max_{1\le j\le L} ||v_j^m||_{\alpha,1+\alpha/2}^{\overline{Q^k}} \le C_8, \quad m\in\mathbb{N}, \tag{A.90}$$

де $C_8>0$ – стала, яка не залежить від m, але може залежати від k.

Із (A.89), (A.90), твердження 2.2 та теореми про диференціювання границі збіжної функційної послідовності випливає, існування функції $w=(u;v)\in[C_{\rm loc}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q)]^M\times[C_{\rm loc}^{\alpha,1+\alpha/2}(\widetilde{Q})]^L$ та підпослідовності, яку позначатимемо також $\{w^m\}_{m=1}^{\infty}$), послідовності $\{w^m\}_{m=1}^{\infty}$, що збігається до w в $[C^{2,1}(Q)]^M\times[C^{0,1}(\widetilde{Q})]^L$. Тепер відмітимо, що $h^m\to h$ при $m\to\infty$ рівномірно на кожному компакті $K\subset\Sigma$. Також зауважимо, що з неперервності функцій g_r, f_r^m маємо $g_r^m(x,t)\to f_r(x,t)+g_r(x,t,w(x,t),w_\tau(x,t))$ при $m\to\infty$ для кожної точки $(x,t)\in Q$ $(r=1,\dots,M+L)$. Враховуючи сказане, перейдемо до границі у (A.83), (A.84), (A.85) при $m\to\infty$. У результаті отримаємо рівності, які означають, що функція w є класичним розв'язком системи (2.91), (2.92) та задовольняє крайову умову (2.93). Виконання умови (2.94) випливає з (A.81). Оцінки (2.101), (2.102) випливають з (A.79), (A.80). ∎