Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Бардила Сергій Олегович

УДК 515.122.4+512.536.7

Повнота топологічних напівграток і напівгруп

01.01.04 — геометрія та топологія

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі геометрії і топології Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент
Гутік Олег Володимирович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка, доцент кафедри
геометрії і топології.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Максименко Сергій Іванович,
Інститут математики НАН України,
завідувач лабораторії топології у складі
відділу алгебри і топології;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Никифорчин Олег Ростиславович,
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника, завідувач кафедри
алгебри та геометрії.

Захист відбудеться «___» _____ 2017 р. о 15^{05} на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий «___» _____ 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради І. Й. Гуран

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Однією з форм повноти в класі гаусдорфових топологічних просторів є поняття H-замкненості. У загальній топології це поняття було введено П. Александровим і П. Урисоном як узагальнення поняття компактності. У 1923 р. П. Александров і П. Урисон[1] довели критерій H–замкненості топологічних просторів. Згодом М. Катетов[2] показав, що неперервний образ H-замкненого топологічного простору є H-замкненим і, якщо кожен замкнений підпростір гаусдорфового простору X є H-замкненим, то X – компактний простір.

Поняття H-замкненості топологічних просторів природним чином переноситься на класи гаусдорфових (напів)топологічних алгебр: груп, напівгруп, напівграток, тощо.

H-замкнені топологічні групи в класі топологічних груп вивчав Д. Райков[3] і називав їх *абсолютно замкненими.* Він довів, що топологічна група є абсолютно замкненою тоді і лише тоді, коли вона повна стосовно двобічної рівномірності. Дослідженням H-замкненості топологічних груп в різних класах топологічних напівгруп займалися Т. Банах, О. Гутік та О. Равський. Зокрема, О. Равський[4] довів, що абелева топологічна група, яка є H-замкненою в класі паратопологічних груп зображається як об'єднання компактних груп. О. Гутік[5] довів, що топологічна група G є H-замкненою в класі напівтопологічних інверсних напівгруп з неперервною інверсією тоді і лише тоді, коли G є компактним простором. Т. Банах нещодавно показав, що абелева топологічна група G є H-замкненою в класі паратопологічних груп тоді і тільки тоді, коли G повна за Райковим і має компактну експоненту.

H-замкнені та абсолютно H-замкнені напівгрупи введені Дж. Степпом в 1969 та 1975 роках, відповідно. У 1969 році

---

[1] Alexandroff, P., Urysohn, P.: Sur les espaces topologiques compacts. Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. 5–8 (1923).

[2] Katetov, M.: Uber H-abgeschlossene und bikompakte Raume. Caspis Pest. Mat. Fys. **69**, 36–49 (1940).

[3] Райков, Д.: О пополнении топологических групп. Известия академии наук СССР **10**, 513–528 (1946).

[4] Ravsky, O.: On H-closed paratopological groups. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **61**, 172–179 (2003).

[5] Gutik, O.: On closures in semitopological inverse semigroups with continuous inversion. Algebra Discr. Math. **18**(1), 59–85 (2014).

Дж. Степп[6] довів, що кожна гаусдорфова локально компактна топологічна напівгрупа X вкладається як щільна піднапівгрупа в H-замкнену топологічну напівгрупу. У 1975 році Дж. Степп[7] довів, що дискретна напівгратка X є абсолютно H-замкненою в класі топологічних напівграток тоді і лише тоді, коли всі ланцюги в X є скінченними, а також поставив питання: *чи кожна H-замкнена топологічна напівгратка є абсолютно H-замкненою?* О. Гутік і Д. Реповш[8] досліджували замикання лінійно впорядкованих топологічних напівграток у топологічних напівгратках. Вони дали необхідні і достатні умови для того, щоб лінійно впорядкована напівгратка була H-замкненою в класі топологічних напівграток, довели, що кожна лінійно впорядкована топологічна напівгратка вкладається як щільна піднапівгратка в H-замкнену топологічну напівгратку і показали, що довільна H-замкнена лінійно впорядкована напівгратка є абсолютно H-замкненою в класі топологічних напівграток.

О. Гутік і К. Павлик[9] довели, що напівгрупа матричних одиниць $\mathcal{B}_\alpha$ є H-замкненою в класі топологічних інверсних напівгруп. Якщо піднапівгрупа ідемпотентів напівгрупи $\mathcal{B}_\alpha$ є компактною, то напівгрупа матричних одиниць є H-замкненою в класі топологічних напівгруп[10]. О. Гутік та А. Рейтер[11] узагальнили результат Гутіка і Павлик, довівши, що симметричний інверсний моноїд обмеженого скінченного рангу є H-замкненим в класі напівтопологічних напівгруп з неперервної інверсією.

Питання існування нескінченної нетопологізовної групи, тобто групи на якій існує лише дискретна гаусдорфова групова топологія, було поставлено А. Марковим. В 1980 р. О. Ольшанський розв'язав цю задачу, побудувавши зліченну нетопологізовну групу. З іншого боку Є. Зеленюк показав, що на довільній групі G існує недискретна гаусдорфова топологія τ така, що (G, τ) є квазітопологічною гру-

---

[6]Stepp, J.: A note on maximal locally compact semigroups. Proc. Amer. Math. Soc. **20**, 251–253 (1969).

[7]Stepp, J.: Algebraic maximal semilattices. Pacific J. Math. **58**(1), 243–248 (1975).

[8]Gutik, O., Repovs, D.: On linearly ordered H-closed topological semilattices. Semigroup Forum **77**(3), 474–481 (2008).

[9]Gutik, O., Pavlyk, K.: Topological semigroups of matrix units. Algebra Discrete Math. **3**, 1–17 (2005).

[10]Gutik, O., Pavlyk, K., Reiter, A.: Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt λ^0-extensions. Мат. Студ. **32**(2), 115–131 (2009).

[11]Gutik, O., Reiter, A.: Symmetric inverse topological semigroups of finite rank $\leqslant n$. Математичні методи та фізико-механічні поля **52**(3), 7–14 (2009).

пою. Проблему топологізації абелевих напівгруп займався А. Тайманов, який побудував приклад нетопологізовної абелевої напівгрупи. О. Гутік показав, що побудована А. Таймановим напівгрупа є H-замкненою в класі топологічних напівгруп, проте кожен її нескінченний неізоморфний образ допускає топологію, що перетворює його у топологічну напівгрупу, яка не є H-замкненою.

Біциклічна напівгрупа $\mathcal{C}(p,q)$ відіграє важливу роль як в алгебраїчній теорії напівгруп, так і в теорії топологічних напівгруп. Наприклад, відомий результат Андерсена[12] стверджує, що (0–)проста напівгрупа є цілком (0–)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить біциклічної напівгрупи. Задачу топологізації біциклічної напівгрупи вивчали К. Ебергарт і Дж. Селден[13], які довели, що на ній існує лише дискретна напівгрупова топологія, а також показали, що якщо біциклічна напівгрупа $\mathcal{C}(p,q)$ є власною щільною піднапівгрупою топологічної напівгрупи S, то $S\backslash\mathcal{C}(p,q)$ є ідеалом в S. М. Бертман і Т. Вест[14] показали, що напівтопологічний біциклічний моноїд є дискретним простором. О. Гутік[15] довів, що локально компактна напівтопологічна біциклічна напівгрупа з приєднаним нулем є або дискретним, або компактним простором. Відомо, що біциклічна напівгрупа не вкладається в стабільні й Г-компактні топологічні напівгрупи. Не існує зліченно компактної топологічної інверсної напівгрупи, що містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи[16]. Т. Банах, С. Дімітрова й О. Гутік[17] вказали умови, за яких біциклічна напівгрупа не вкладається в псевдокомпактні та зліченнокомпактні топологічні напівгрупи. Тим не менше, в аксіоматичних припущеннях (континуум-гіпотези чи аксіоми Мартіна) вони показали, що існує тихонівська зліченно компактна топологічна напівгрупа, яка

[12]Andersen, O.: Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen. Dissertation, University of Hamburg (1952).

[13]Eberhart, C., Selden, J.: On the closure of the bicyclic semigroup. Trans. Amer. Math. Soc. **144**, 115–126 (1969).

[14]Bertman, M., West, T.: Conditionally compact bicyclic semitopological semigroup. Proc. Roy. Irish Acad. **76**, 219–226 (1976).

[15]Gutik, O.: On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **80**, 33–41 (2015).

[16]Gutik, O., Repovs, D.: On countably compact 0-simple topological inverse semigroups. Semigroup Forum **75**(2), 464–469 (2007).

[17]Banakh, T., Dimitrova, S., Gutik, O.: Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups. Topology Appl. **157**(18), 2803–2814 (2010).

містить біциклічний моноїд.

Одним з узагальнень біциклічної напівгрупи є поліциклічні моноїди, які введені М. Ніватом і Ж.-Ф. Перро[18]. В свою чергу поліциклічні моноїди є частковими випадками інверсних напівгруп над орієнтованими графами, зокрема, інверсна напівгрупа над орієнтованим графом, що складається з однієї вершини та n петель ізоморфна поліциклічному моноїду $\mathcal{P}_n$. Алгебраїчні властивості інверсних напівгруп над графами та поліциклічних моноїдів досліджувались Д. Джонесом, М. Лоусоном та Дж. Мекіном. Топологізація інверсних напівгруп над графами досліджувалась З. Месіаном, Дж. Мітчелом, М. Морайне та Й. Пересом[19]. Вони довели, що кожен ненульовий елемент у топологічній інверсній напівгрупі над довільним орієнтованим графом є ізольованою точкою і, що довільна локально компактна напівгрупова топологія на інверсній напівгрупі над скінченним орієнтованим графом є дискретною.

Ще одним узагальненням біциклічної напівгрупи є α-біциклічний моноїд $\mathfrak{B}_\alpha$, який введений Д. Хоганом[20]. У цій же роботі Д. Хоган дослідив алгебраїчні властивості α-біциклічного моноїда і показав, що напівгрупа $\mathfrak{B}_\alpha$ відіграє важливу роль в структурі регулярних біпростих напівгруп, множина ідемпотентів яких ізоморфна напівграті $(\omega^\alpha, \max)$. Топологізація α-біциклічного моноїда досліджувалась Д. Хоганом[21] та А. Селден[22]. Зокрема, А. Селден побудувала недискретну топологію на 2-біциклічному моноїді $\mathfrak{B}_2$, а Д. Хоган показав, що елемент (a, b) топологічного α-біциклічного моноїда є ізольованим, якщо a та b є неграничними ординалами.

З вище сказаного випливає, що дослідження H-замкненості топологічних напівграток, топологізації напівгруп локально компактною топологією та вкладення топологічних напівгруп в близькі до компактних топологічні напівгрупи є актуальним.

---

[18]Nivat, M., Perrot, J.-F.: Une généralisation du monoide bicyclique. C. R. Acad. Sci. **271**, 824–827 (1970).

[19]Mesyan, Z., Mitchell, J., Morayne M., Peresse, Y.: Topological graph inverse semigroups. Topology Appl. **208**, 106–126 (2016).

[20]Hogan, J.: Bisimple semigroup with idempotents well-ordered. Semigroup forum **6**, 296–316 (1973).

[21]Hogan, J.: The α-bicyclic semigroup as a topological semigroup. Semigroup forum **28**, 265–271 (1984).

[22]Selden, A.: A nonlocally compact nondiscrete topology for the α-bicyclic semigroup. Semigroup forum **31**, 372–374 (1985).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі геометрії і топології Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми "Топологія та її застосування у фрактальній геометрії та математичній економіці" (номер державної реєстрації 0116U001537).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розв'язок проблеми Степпа, а також вивчення властивостей λ-поліциклічного й α-біциклічного моноїдів як топологічних і напівтопологічних напівгруп.

Об'єктом дослідження є топологічні напівгратки, λ-поліциклічний і α-біциклічний моноїди.

Предметом досліджень є H-замкненість і абсолютна H-замкненість топологічних напівграток і λ-поліциклічного моноїда, а також топологізація λ-поліциклічного та α-біциклічного моноїдів.

Завданнями дисертаційної роботи є:

- побудувати приклад H-замкненої гаусдорфової топологічної напівгратки, яка не є абсолютно H-замкненою;
- дослідити топологізацію λ-поліциклічного і α-біциклічного моноїдів, зокрема описати гаусдорфові локально компактні топології, що перетворюють λ-поліциклічний і α-біциклічний моноїди в топологічні (напівтопологічні) напівгрупи;
- дослідити вкладення λ-поліциклічного моноїда в близькі до компактних топологічні напівгрупи;
- описати замикання λ-поліциклічного моноїда в топологічній інверсній напівгрупі, зокрема, вказати умови за яких λ-поліциклічний моноїд є абсолютно H-замкненим в класі топологічних інверсних напівгруп.

Методи дослідження. У процесі вивчення дисертаційних задач застосовуються методи загальної топології, топологічної алгебри та алгебраїчної теорії напівгруп.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

- Розв'язано проблему Степпа, а саме, побудовано приклад H-замкненої, не абсолютно H-замкненої топологічної напівгратки.
- Доведено, що локально компактний напівтопологічний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є або дискретним, або компактним прос-

тором.

- Доведено, що для довільного кардиналу $\lambda > 1$, λ-поліциклічний моноїд не вкладається як щільна піднапівгрупа в слабко компактну топологічну напівгрупу.
- Вказано достатні умови, за виконання яких, топологічний інверсний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є абсолютно H-замкненою напівгрупою в класі топологічних інверсних напівгруп.
- Показано, що для довільного ординалу $\alpha \leqslant \omega$ довільна локально компактна напівгрупова топологія на α-біциклічному моноїді $\mathfrak{B}_\alpha$ є дискретною та побудовано приклад недискретної локально компактної топології τ_{lc} на моноїді $\mathfrak{B}_{\omega+1}$ такої, що $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ є топологічною інверсною напівгрупою.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати та розвинуті у ній методи можна застосувати для подальших досліджень у топологічній алгебрі та загальній топології.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на:

- Міжнародній конференції присвяченій 120-річчю з дня народження Стефана Банаха (Львів, 17–21 вересня 2012 р.);
- IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Львів, 8–13 липня 2013 р.);
- X Літній школі “Алгебра, Топологія, Аналіз” (Одеса, 3–15 серпня 2015 р.);
- Міжнародній конференції “Геометрія і топологія в Одесі” (Одеса, 2–8 червня 2016 р.);
- VII Європейському математичному конгресі (Берлін, 18-22 липня 2016р.);
- XI Літній школі “Алгебра, Топологія, Аналіз” (Одеса, 1–14 серпня 2016 р.);
- Міжнародній конференції присвяченій 120-річчю з дня народження Казіміра Куратовського (Львів, 27 вересня—1 жовтня 2016 р.);
- Зимовій школі з абстрактного аналізу, Хейніце, Чехія (28 січня –

4 лютого 2017 р.).

- Семінарі з топологічної алгебри в університеті міста Градець Кралове (Чехія, 2014 р.);
- Семінарі з топологічної алгебри у Львівському національному університеті імені Івана Франка (Львів, 2012, 2014, 2015, 2016 р.);
- Семінарі "Топологія і застосування" у Львівському національному університеті імені Івана Франка (Львів, 2015, 2016 р.);
- Семінарі з абстрактного аналізу в Політехнічному університеті міста Лодзь (Польща, 2016 р.);
- Семінарі лабораторії топології інституту математики НАН України (Київ, 2017).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 15 наукових працях, з яких 6 ([1–6]) — у фахових виданнях із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України (2 ([1,2]) — без співавторів, 2 ([4, 6]) — у наукових фахових виданнях, які включено до міжнародної наукометричної бази даних "Scopus"), 7 ([7–13]) — у матеріалах міжнародних наукових конференцій, 2 ([14,15]) — у матеріалах всеукраїнських наукових конференцій. У статті [3] здобувачеві належать усі результати, окрім зауважень 1, 2, 3, які не внесені до дисертації. У статті [4] здобувачеві належать усі результати, окрім зауваження 2.1, твердження 3.2 та наслідку 3.3, які не внесені до дисертації. У статті [5] здобувачеві належать усі результати, окрім зауваження 1 та наслідку 4, які не внесені до дисертації. У статті [6] здобувачеві належать твердження 11, лема 13 та приклад 15.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, переліку означень і допоміжних тверджень, трьох розділів, висновків, одного додатку і списку використаних джерел, який налічує 134 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 130 сторінок, обсяг списку використаних джерел – 11 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обгрунтована актуальність дисертаційного дослідження, визначені мета, завдання та методи досліджень, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів та особистий внесок здобувача, а також, наведено форми апробації одержаних результатів, описано структуру й обсяг дисертації.

У **переліку означень і допоміжних тверджень** наведено основні означення та теореми, які використовуються в тексті дисертації.

У **першому розділі** дисертаційної роботи досліджуються H-замкнені та абсолютно H-замкнені топологічні напівгратки.

Нехай $\mathscr{A}$ – деякий клас гаусдорфових напівтопологічних напівгруп. Напівгрупа $S \in \mathscr{A}$ називається *H-замкненою в класі $\mathscr{A}$*, якщо S є замкненою піднапівгрупою кожної напівтопологічної напівгрупи $T \in \mathscr{A}$, яка містить S як піднапівгрупу.

Напівгрупа $S \in \mathscr{A}$ називається *абсолютно H-замкненою в класі $\mathscr{A}$*, якщо довільний неперервний гомоморфний образ S є H-замкненим в $\mathscr{A}$.

Через $(\mathbb{N}, \max)$ і $(\mathbb{N}, \min)$ позначатимемо множину натуральних чисел з напівгратковими операціями max і min, відповідно. Під H-поповненням (AH-поповненням) топологічної напівгратки X розумітимемо довільну H-замкнену (абослютно H-замкнену) топологічну напівгратку $\tilde{X}$, яка містить X як щільну піднапівгратку. H-Поповнення (AH-поповнення) $\tilde{X}$ топологічної напівгратки X називатимемо *універсальним*, якщо кожен неперервний гомоморфізм h з X в H-замкнену (абсолютно H-замкнену) топологічну напівгратку Y продовжується до неперервного гомоморфізму $\tilde{h} : \tilde{X} \to Y$.

В *підрозділі 2.1* описано всі H-поповнення дискретних напівграток $(\mathbb{N}, \max)$ та $(\mathbb{N}, \min)$ і показано, що для цих напівграток не існує універсального AH-поповнення.

Нехай $\mathscr{F}$ – довільний вільний фільтр на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$. Розглянемо топологічний простір $\mathbb{N}_{\mathscr{F}} = \mathbb{N} \cup \{\mathscr{F}\}$, в якому всі точки $x \in \mathbb{N}$ є ізольованими, а множини вигляду $F \cup \{\mathscr{F}\}$, де $F \in \mathscr{F}$, утворюють базу топології в точці $\mathscr{F}$. Напівграткова операція min на $\mathbb{N}$ продовжується до неперервної напівграткової операції min на $\mathbb{N}_{\mathscr{F}}$ наступним чином:

$$\min\{n, \mathscr{F}\} = \min\{\mathscr{F}, n\} = n \ , \ \min\{\mathscr{F}, \mathscr{F}\} = \mathscr{F}.$$

Аналогічно, напівграткова операція max на $\mathbb{N}$ продовжується до неперервної напівграткової операції max на $\mathbb{N}_{\mathscr{F}}$ наступним чином:

$$\max\{n, \mathscr{F}\} = \max\{\mathscr{F}, n\} = \mathscr{F} = \max\{\mathscr{F}, \mathscr{F}\}.$$

Через $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min}$ ($\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max}$) позначимо топологічний простір $\mathbb{N}_{\mathscr{F}}$ з визначеною на ньому неперервною напівгратковою операцією min (max).

Твердження 1.1.1. *Для довільного вільного фільтра $\mathscr{F}$ на $\mathbb{N}$ топологічні напівгратки $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min}$ і $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max}$ є абсолютно H-замкненими.*
Твердження 1.1.2. *Кожне H-поповнення дискретної напівгратки $(\mathbb{N},\min)$ ($(\mathbb{N},\max)$) топологічно ізоморфне напівгратці $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min}$ ($\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max}$) для деякого вільного фільтру $\mathscr{F}$ на $\mathbb{N}$.*
Твердження 1.1.3. *Для дискретних напівграток $(\mathbb{N},\min)$ і $(\mathbb{N},\max)$ не існує універсального AH-поповнення.*

В *підрозділі 2.2* розвязано проблему Степпа, а саме побудований приклад H-замкненої але не абсолютно H-замкненої топологічної напівгратки.

Нехай λ – довільний нескінченний кардинал і $0 \notin \lambda$. На дискретному топологічному просторі $E_\lambda = \{0\} \cup \lambda$ означимо напівграткову операцію за формулою:

$$x \cdot y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x = y; \\ 0, & \text{якщо } x \neq y. \end{cases}$$

Нехай $\mathscr{F}$ – вільний фільтр на $\mathbb{N}$, який містить множину F з нескінченним доповненням $\mathbb{N} \setminus F$. Через $Y^\lambda_{\max}$ позначимо прямий добуток топологічних напівграток $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max}$ та E_λ. Легко бачити, що множина

$$X^\lambda_{\mathscr{F},\max} = \big(\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max} \times \{0\}\big) \cup ((\mathbb{N} \setminus F) \times \lambda)$$

є замкненою піднапівграткою в $Y^\lambda_{\max}$.
Твердження 1.2.7 *Топологічна напівгратка $X^\lambda_{\mathscr{F},\max}$ є H-замкненою.*

Із означення напівгратки $X^\lambda_{\mathscr{F},\max}$ випливає, що для довільної підмножини $\kappa \subset \lambda$ множина $I_\kappa = (\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max} \times \{0\}) \cup ((\mathbb{N} \setminus F) \times \kappa)$ є відкрито-замкненим ідеалом в $X^\lambda_{\mathscr{F},\max}$. Звідси випливає, що фактор-напівгратка $X^\lambda_{\mathscr{F},\max}/I_\kappa$ з фактор-топологією є дискретною топологічною напівграткою. Зауважимо, що $X^\lambda_{\mathscr{F},\max}/I_\kappa$ топологічно ізоморфна дискретній ортогональній сумі потужності λ топологічних напівграток $(\mathbb{N},\max)$. Легко бачити, що напівгратка $X^\lambda_{\mathscr{F},\max}/I_\kappa$ не є H-замкненою. Отже справджується наступне твердження:
Твердження 1.2.8 *Топологічна напівгратка $X^\lambda_{\mathscr{F},\max}$ не є абсолютно H-замкненою.*

Зауважимо, що для довільної підмножини $\kappa \subset \lambda$ природній гомоморфізм $\pi\colon X^\lambda_{\mathscr{F},\max} \to E/I_\kappa$ є відкрито-замкненим неперервним відображенням. Тоді з твердження 1.2.7 випливає наступний наслі-

док:

Наслідок 1.2.9 *Для довільного нескінченого кардиналу λ існує 2^λ неперервних, відкрито-замкнених сюр'єктивних гомоморфних образів топологічної напівгратки $X^\lambda_{\mathscr{F},\max}$, які не є H-замкненими топологічними напівгратками.*

У **другому розділі** дисертації вивчаються алгебраїчні та топологічні властивості λ-поліциклічних моноїдів. Нехай λ – довільний ненульовий кардинал. λ-Поліциклічним моноїдом $\mathcal{P}_\lambda$ називається моноїд з нулем, який визначається наступними співвідношеннями:

$$\mathcal{P}_\lambda = \left\langle \{p_i\}_{i\in\lambda}, \{p_i^{-1}\}_{i\in\lambda} \mid p_i p_i^{-1} = 1, p_i p_j^{-1} = 0 \text{ для всіх } i \neq j \right\rangle.$$

В *підрозділі 2.1* досліджуються алгебраїчні властивості λ-поліциклічних моноїдів. Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема:

Теорема 2.1.4 *Для довільного нескінченного кардиналу λ, λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є конгруенц-простою, комбінаторною, 0-біпростою, 0-E-унітарною інверсною напівгрупою.*

В *підрозділі 2.2* досліджуються напівгрупові топологізації λ-поліциклічних моноїдів.

Наступні два твердження узагальнюють результати Месіана, Мітчела, Морайне та Переса, які довели, що кожен ненульовий елемент топологічного λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ є ізольованою точкою і що для довільного натурального числа n кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія τ на напівгрупі $\mathcal{P}_n$ є дискретною.

Твердження 2.2.1 *Нехай λ – довільний кардинал $\geqslant 2$ і τ – довільна гаусдорфова топологія на $\mathcal{P}_\lambda$, що перетворює $\mathcal{P}_\lambda$ в напівтопологічну напівгрупу. Тоді кожен ненульовий елемент x є ізольованою точкою в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$.*

Твердження 2.2.1 *Нехай λ – нескінченний кардинал. Тоді довільна гаусдорфова напівгрупова локально компактна топологія на $\mathcal{P}_\lambda$ є дискретною.*

Наступне твердження узагальнює результат Еберхарта та Селдена про те, що якщо біциклічна напівгрупа $\mathcal{C}(p,q)$ є власною щільною піднапівгрупою топологічної напівгрупи S, то $S\backslash\mathcal{C}(p,q)$ є замкненим ідеалом в S.

Твердження 2.2.5 *Нехай λ – довільний кардинал $\geqslant 2$ та S – гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа, що містить $\mathcal{P}_\lambda$ як щільну піднапівгрупу. Тоді $S \setminus \mathcal{P}_\lambda \cup \{0\}$ є замкненим ідеалом в S.*

В *підрозділі 2.3* вивчаються вкладення λ-поліциклічних моноїдів в близькі до компактних топологічні напівгрупи.

Топологічний простір називається *слабко компактним*, якщо його довільне відкрите локально скінченне покриття є скінченним. Зауважимо, що тихоновський простір X є слабко компактним тоді і лише тоді, коли X є псевдокомпактним простором і, що кожен зліченно компактний простір є слабко компактним. Наступна теорема узагальнює результат Гутіка та Павлик про те, що напівгрупа матричних одиниць не вкладається в зліченно компактні топологічні напівгрупи.

Теорема 2.3.4 *Для довільного нескінченного кардиналу λ напівгрупа $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathcal{B}_\lambda$ не вкладається як щільний підпростір в гаусдорфову слабко компактну топологічну напівгрупу.*

Зважаючи на результати Банаха, Гутіка та Дімітрової про вкладення біциклічного моноїда в зліченно компактні топологічні напівгрупи, природним чином постає питання: *чи вкладається λ-поліциклічний моноїд у зліченно компактну топологічну напівгрупу?* Негативну відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 2.3.6 *Для довільного кардиналу $\lambda \geqslant 2$ не існує гаусдорфової слабко компактної топологічної напівгрупи S, яка містить λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ як щільну піднапівгрупу.*

В *підрозділі 2.4* досліджуються топології, які перетворюють λ-поліциклічний моноїд в H-замкнену або мінімальну топологічну інверсну напівгрупу.

У наступній теоремі дано достатні умови абсолютної H-замкненості λ-поліциклічного моноїда в класі топологічних інвесних напівгруп.

Теорема 2.4.8 *Нехай λ – довільний кардинал $\geqslant 2$ і τ – гаусдорфова інверсна напівгрупова топологія на $\mathcal{P}_\lambda$ така, що множина $U(0) \cap L$ є нескінченною для довільного відкритого околу $U(0)$ нуля 0 в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ і довільного максимального ланцюга L напівгратки $E(\mathcal{P}_\lambda)$. Тоді $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ є абсолютно H-замкненою напівгрупою в класі топологічних інверсних напівгруп.*

Визначимо топологію τ_{mi} на λ-поліциклічному моноїді $\mathcal{P}_\lambda$ наступним чином. Всі ненульові елементи $\mathcal{P}_\lambda$ є ізольованими точками в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau_{\mathsf{mi}})$. Для довільної скінченної підмножини A вільного моноїда $\mathcal{M}_\lambda$ покладемо

$$U_A(0) = \{a^{-1}b \colon a, b \in \mathscr{M}_\lambda \setminus A\}.$$

База топології τ_{mi} в точці 0 визначається сім'єю

$$\mathscr{B}_{\mathsf{mi}} = \{U_A(0)\colon A \text{ – скінченна підмножина в } \mathcal{M}_\lambda\}.$$

Теорема 2.4.12 *Для довільного кардиналу $\lambda \geqslant 2$, τ_{mi} є найслабшою напівгруповою інверсною топологією на $\mathcal{P}_\lambda$.*

У *підрозділі 2.5* для довільного ненульового кардинала λ описано всі гаусдорфові локально компактні топології на λ-поліциклічному моноїді, що перетворюють його у напівтопологічну напівгрупу.

Наступна теорема узагальнює результат Гутіка про те, що локально компактна напівтопологічна біциклічна напівгрупа з приєднаним нулем є або дискретним, або компактним простором.

Теорема 2.5.9 *Гаусдорфовий локально компактний напівтопологічний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є або компактним, або дискретним простором.*

В **третьому розділі** дисертаційної роботи досліджуються топологічні властивості α-біциклічного моноїда.

Нехай α – довільний ординал. α-Біциклічним моноїдом (α-біциклічною напівгрупою) $\mathfrak{B}_\alpha$ називається множина $\omega^\alpha \times \omega^\alpha$ з визначеною на ній бінарною асоціативною операцією:

$$(a,b)\cdot(c,d) = \begin{cases} (a+(c-b),d), & \text{якщо } \ b \leqslant c; \\ (a,d+(b-c)), & \text{якщо } \ c < b; \end{cases}$$

де $z = x - y$, якщо $x = y + z$, для довільних ординалів $x \geqslant y$.

У *підрозділі 3.1* вивчається напівтопологічний α-біциклічний моноїд.

Наступне твердження узагальнює результат Хогана про те, що елемент (a,b) топологічного α-біциклічного моноїда є ізольованим, якщо a та b є неграничними ординалами.

Теорема 3.1.7 *Нехай $a \in \omega^\alpha$ – довільний неграничний ординал. Тоді для довільного ординалу $b \in \omega^\alpha$ обидва елементи (a,b) та (b,a) є ізольованими точками в напівтопологічному моноїді $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$.*

У *підрозділі 3.2* вивчається локально компактний топологічний α-біциклічний моноїд.

У теоремі 2.9 з роботи[23] Д. Хоган стверджує, що довільна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на α-біциклічному моноїді є дискретною. Наступний приклад показує, що

[23] Hogan, J.: The α-bicyclic semigroup as a topological semigroup. Semigroup forum **28**, 265–271 (1984).

твердження теореми Хогана в загальному випадку є невірним.

Приклад 3.2.2 *Визначимо топологію τ_{lc} на $\mathfrak{B}_{\omega+1}$ наступним чином: усі точки, відмінні від точок вигляду $(n\omega^\omega, m\omega^\omega)$, де $n, m \in \mathbb{N}$ є ізольованими. Сім'я*

$$\mathcal{B}((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) = \{U_k((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) : k \in \mathbb{N}\}$$

задає базу топології τ_{lc} в точці $(n\omega^\omega, m\omega^\omega)$, де

$$U_k((n\omega^\omega, m\omega^\omega))=\{((n-1)\omega^\omega+\omega^t, (m-1)\omega^\omega+\omega^t) : t>k\}\cup\{(n\omega^\omega, m\omega^\omega)\}.$$

Отже $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ є гаусдорфовою недискретною локально компактною топологічною інверсною напівгрупою.

Тим не менше, для ординалів $\alpha \leqslant \omega$ твердження теореми Хогана є вірним.

Теорема 3.2.1 *Для довільного ординалу $\alpha \leqslant \omega$ єдиною гаусдорфовою локально компактною напівгруповою топологією, на α-біциклічному моноїді $\mathfrak{B}_\alpha$ є дискретна топологія.*

Зауважимо, що методи доведення Теореми 3.2.1 відрізняються від тих, які використовував Д. Хоган у своїй теоремі.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджені топологізація, вкладення і замикання λ-поліциклічного моноїда, топологізація α-біциклічної напівгрупи, а також розв'язано проблему Степпа. Отримані наступні результати:

- Описано всі H-поповнення та AH-поповнення дискретних напівграток $(\mathbb{N}, \max)$ та $(\mathbb{N}, \min)$, та доведено, що для дискретних напівграток $(\mathbb{N}, \max)$ та $(\mathbb{N}, \min)$ не існує універсального AH-поповнення.
- Розв'язано проблему Степпа, а саме, побудовано приклад H-замкненої але не абсолютно H-замкненої топологічної напівгратки.
- Показано, що довільний ненульовий елемент x напівтопологічного λ-поліциклічного моноїда $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ є ізольованою точкою в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$. Доведено, що єдиною гаусдорфовою локально компактною напівгруповою топологією на $\mathcal{P}_\lambda$ є дискретна топологія, а також, що локально компактний напівтопологічний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є або дискретним, або компактним простором.

- Описано всі слабко компактні топології, що перетворюють $\mathcal{P}_\lambda$ на напівтопологічну напівгрупу і доведено, що не існує слабко компактної топологічної напівгрупи, що містить $\mathcal{P}_\lambda$ як щільну піднапівгрупу.
- Знайдено достатні умови для того, щоб топологічний інверсний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ був абсолютно H-замкненим в класі топологічних інверсних напівгруп, побудовано найслабшу топологію τ_{mi} на $\mathcal{P}_\lambda$ таку, що $(\mathcal{P}_\lambda, \tau_{mi})$ є топологічною інверсною напівгрупою і доведено, що дискретний моноїд $\mathcal{P}_2$ не є H-замкненим у класі топологічних інверсних напівгруп.
- Доведено, що для довільного ординалу $\alpha \leqslant \omega$ довільна локально компактна напівгрупова топологія на моноїді $\mathfrak{B}_\alpha$ є дискретною. Також побудовано приклад недискретної локально компактної топології τ_{lc} на моноїді $\mathfrak{B}_{\omega+1}$ такої, що $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ є топологічною інверсною напівгрупою.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати та розвинуті у ній методи можна застосувати для подальших досліджень у загальній топології та топологічній алгебрі.

Основні результати дисертації є новими і носять завершений характер.

Достовірність результатів дисертації підтверджується повними та строгими доведеннями, а також тим, що вони опубліковані у фахових журналах і були оприлюднені на багатьох міжнародних наукових конференціях і спеціалізованих наукових семінарах.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Bardyla, S.: On a semitopological α-bicyclic monoid. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **81**, 9–22 (2016).
2. Bardyla, S.: Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids. Мат. вісник НТШ **13**, 21–28 (2016).
3. Bardyla, S., Gutik O.: On H-complete topological semilattices. Мат. студ. **38**(2), 118–123 (2012).
4. Bardyla, S., Gutik, O.: On a semitopological polycyclic monoid. Algebra Discr. Math. **21**(2), 163–183 (2016).
5. Bardyla, S., Gutik, O.: On a complete topological inverse polycyclic monoid. Карпатські математичні публікації **8**(2), 183–194 (2016).

6. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. Topology Appl. **217**, 51–58 (2017).
7. Bardyla, S., Gutik, O.: An example of an H-complete topological semilattice which is not AH–complete. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 120th anniv. of Stefan Banach, p. 76. University of Lviv, Lviv, 17–21 September 2012.
8. Bardyla, S., Gutik, O.: On H-complete topological semilattices. In: Abstracts of the 9th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 20. University of Lviv, Lviv, 8–13 July 2013.
9. Bardyla, S., Gutik, O.: On a semitopological λ-polycyclic monoid. Тези доповідей Наукової конференції присвяченої 100-річчю від народження К. М. Фішмана і М. К. Фаге, с. 134–135. Чернівецький університет, Чернівці, 1–4 липня 2015 р.
10. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. In: Abstracts of the International Conference "Geometry and topology in Odessa - 2016", p. 13. Odessa National Academy of Food Technologies, Odessa, 2–8 June 2016.
11. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. In: Abstracts of the 7th European Congress of Mathematics, p. 379. Technical University of Berlin, Berlin, 18–22 July 2016.
12. Bardyla, S., Gutik, O.: On the embeddings and closures of a topological λ-polycyclic monoid. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 120th anniv. of Kazimierz Kuratowski, p. 9. University of Lviv, Lviv, 27 September–1 October 2016.
13. Bardyla, S.: On the semitopological locally compact α-bicyclic monoid. In: Abstracts of Winter School in Abstract Analysis. Hejnice, Czech Republic, 28 January–4 February 2017.
14. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. Тези доповідей X Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз", с. 67. Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, 3–15 серпня 2015 р.
15. Bardyla, S., Gutik, O.: On the embeddings and closures of a topological λ-polycyclic monoid. Тези доповідей XI Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз", с. 34. Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, 1–14 серпня 2016 р.

АНОТАЦІЯ

Бардила С.О. Повнота топологічних напівграток і напівгруп. — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 — геометрія і топологія. — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2017.

Дисертація присвячена дослідженню H-замкнених топологічних напівграток, а також λ-поліциклічному і α-біциклічному моноїдів як (напів)топологічних напівгруп.

У дисертаційній роботі розв'язано проблему Степпа, а саме, побудований приклад H-замкненої але не абсолютно H-замкненої топологічної напівгратки.

Показано, що довільний ненульовий елемент x напівтопологічного λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ є ізольованою точкою. Доведено, що єдиною гаусдорфовою локально компактною напівгруповою топологією на $\mathcal{P}_\lambda$ є дискретна топологія. Описані всі топології, що перетворюють $\mathcal{P}_\lambda$ в локально компактну напівтопологічну напівгрупу. Доведено, що $\mathcal{P}_\lambda$ не вкладається як щільна піднапівгрупа в слабко компактну топологічну напівгрупу. Побудована найслабша топологія, що перетворює λ-поліциклічний моноїд у топологічну інверсну напівгрупу. Дано достатні умови H-замкненості λ-поліциклічного моноїда у класі топологічних інверсних напівгруп.

Також у дисертаційній роботі доведено, що для довільного ординалу $\alpha \leqslant \omega$ локально компактний топологічний моноїд $\mathfrak{B}_\alpha$ є дискретним простором, а також побудовано приклад недискретної локально компактної топології τ_{lc} на моноїді $\mathfrak{B}_{\omega+1}$ такої, що $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ є топологічною інверсною напівгрупою.

Ключові слова: H-замкнена топологічна напівгратка, напівтопологічна напівгрупа, α-біциклічний моноїд, поліциклічний моноїд, локально компактний простір.

ABSTRACT

Bardyla S.O. Completeness of topological semilattices and semigroups. — On the rights of manuscript.

PhD Thesis for a degree in physics and mathematics, speciality 01.01.04 — Geometry and Topology. — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2017.

In PhD Thesis we construct an example of H-closed topological semilattice which is not absolutely H-closed. This example gives a negative answer to the question of James Stepp.

We prove that each non-zero element of a semitopological λ-polycyclic monoid $\mathcal{P}_\lambda$ is an isolated point and each Hausdorff locally compact topological λ-polycyclic monoid is discrete. We describe all Hausdorff locally compact topologies which make $\mathcal{P}_\lambda$ a locally compact semitopological semigroup. In particular, we show that a Hausdorff locally compact semitopological polycyclic monoid is either compact or discrete. In PhD Thesis we show that there exists no feebly compact topological semigroup which contains monoid $\mathcal{P}_\lambda$ as a dense subsemigroup. We construct the coarsest Hausdorff inverse semigroup topology on the λ-polycyclic monoid and find a sufficient conditions for monoid $\mathcal{P}_\lambda$ to be absolutely H-closed in the class of topological inverse semigroups.

Also in PhD Thesis we investigate the α-bicyclic semigroup $\mathfrak{B}_\alpha$ and prove that for each ordinal $\alpha \leqslant \omega$ a locally compact Hausdorff topological monoid $\mathfrak{B}_\alpha$ is discrete, and an example of non-discrete Hausdorff locally compact inverse semigroup topology on the semigroup $\mathfrak{B}_{\omega+1}$ is constructed.

Key words: H-closed topological semilattice, semitopological semigroup, α-bicyclic monoid, polycyclic monoid, locally compact space.

АННОТАЦИЯ

Бардыла С. О. *Полнота топологических полурешеток и полугрупп.* – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология. — Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2017.

Диссертация посвящена исследованию H-замкнутых топологических полурешеток, а также λ-полициклического и α-бициклического моноидов как (полу)топологических полугрупп.

В первом разделе диссертации исследуются H-замкнутые и абсолютно H-замкнутые полурешетки. Описано все AH-пополнения

дискретных полурешоток $(\mathbb{N}, \min)$ и $(\mathbb{N}, \max)$ и показано, что для них не существует универсального AH-пополнения. Решено проблему Степпа, а именно, построен пример H-замкнутой, но не абсолютно H-замкнутой полурешетки.

Во втором разделе исследуется полутопологический λ-полициклический моноид $\mathcal{P}_\lambda$. Показано, что произвольный ненулевой елемент x полутопологического λ-полициклического моноида $\mathcal{P}_\lambda$ является изолированной точкой. Доказано, что единственной гаусдорфовой локально компактной полугрупповой топологией на $\mathcal{P}_\lambda$ является дискретная топология. Описаны все топологии, которые превращают $\mathcal{P}_\lambda$ в локально компактную полутопологическую полугруппу. Доказано, что $\mathcal{P}_\lambda$ не вкладывается как плотная подполугруппа в слабо компактные топологические полугруппы. Построена слабейшая топология, что превращает λ-полициклический моноид в топологическую инверсную полугруппу. Даны достаточные условия H-замкнутости λ-полициклического моноида в классе топологических инверсных полугрупп, а также показано, что дискретный моноид $\mathcal{P}_2$ не является H-замкнутой полугруппой.

В третьем разделе исследуется полутопологический α-бициклический моноид $\mathfrak{B}_\alpha$. Показано, что елемент (a, b) α-бициклического моноида является изолированной точкой, если хотя бы один из ординалов a или b является неграничным. Доказано, что для каждого ординала $\alpha \leqslant \omega$ локально компактный гаусдорфовый топологический α-бициклический моноид $\mathfrak{B}_\alpha$ является дискретным пространством, и построен пример недискретной локально компактной топологии τ_{lc} на моноиде $\mathfrak{B}_{\omega+1}$ такой, что $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ является топологической инверсной полугруппой.

Ключевые слова: H-замкнутая топологическая полурешетка, полутопологическая полугруппа, α-бициклический моноид, полициклический моноид, локально компактное пространство.