Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Стасів Надія Юріївна

УДК 517.53+517.55

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПАДКОВИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

01.01.01 - математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії функцій і теорії ймовірностей Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Скасків Олег Богданович,
професор кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей
Львівського національного університету імені Івана Франка.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, доцент
Дільний Володимир Миколайович,
професор кафедри математики
Дрогобицького державного педуніверситету імені Івана Франка.

доктор фізико-математичних наук, доцент
Бандура Андрій Іванович,
професор кафедри вищої математики
Івано-Франківського національного технічного університету
нафти і газу.

Захист відбудеться "_____" 2019 р. о _____ год.
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18
у Львівському національному університеті імені Івана Франка
за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою:
м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий "_____" 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **А. Я. Христіянин**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Різноманітні збіжні функціональні ряди природно виникають при спробі узагальнення властивостей алгебраїчних поліномів (а також скінченних агрегатів іншого вигляду: експоненційних поліномів, інтерполяційних поліномів і т.п.) на більш загальні класи функцій. Так, зокрема, появилося поняття аналітичної функції як функції на комплексній площині, яка в околі кожної точки зображається степеневим рядом, тобто, як рівномірна на компакті границя поліномів (часткових сум ряду Тейлора). Вони стали засобом введення в розгляд так званих трансцендентних функцій, у тому числі тих, які у даний час називають елементарними. М.А.Євграфов у вступі до свого огляду[1](с.5-6) зазначає також, що за їх допомогою були знайдені розв'язки як звичайних диференційних рівнянь, так і в частинних похідних, а багато абстрактних розділів математики (наприклад, функціональний аналіз) виникли і розвивались заради дослідження рядів. При цьому протягом всього існування теорії функціональних рядів розвивалися два взаємно пов'язаних напрямки досліджень: обгрунтування властивостей рядів (зокрема дослідження областей їхньої збіжності) і пошук їх застосувань до задач з різноманітних розділів математики (зокрема, дослідження асимптотичних властивостей аналітичних функцій в залежності від властивостей елементів рядів, якими вони зображаються).

Дослідження властивостей аналітичних функцій в залежності від властивостей коефіцієнтів функціональних рядів, якими вони зображаються, є одним з важливих напрямів у теорії функцій від початку її виникнення наприкінці XIX ст. Поряд з цим, розгляд випадкових аналітичних функцій дає в руки дослідника потужний інструмент встановлення "кількості" аналітичних функцій з тими чи іншими властивостями. Відносно добре дослідженими є випадкові ряди Діріхле чи степеневі ряди, коефіцієнти яких утворюють послідовність незалежних випадкових величин, бо тоді, за законом нуля і одиниці Колмогорова, наприклад, абсциси збіжності випадкового ряду Діріхле (відповідно, радіус збіжності випадкового степеневого ряду) є майже напевне сталими. Разом з цим виникає питання про можливість обчислення цієї сталої за коефіцієнтами і показниками відповідного випадкового ряду Діріхле. У випадку детермінованих степеневих рядів радіус їхньої збіжності обчилюється за формулою Коші-Адамара, а у випадку детермінованих рядів Діріхле $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{z\lambda_k}$ з монотонно зростаючою до нескінченності послідовністю показників $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ таких, що $\tau(\Lambda_+) := \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \ln k/\lambda_k = 0$ – за формулою Валірона. При цьому вже для степеневих рядів Е.Борель висловив припущення (1896) про те, що коло збіжності майже напевне є природною межею аналітичності суми ряду у тому сенсі, що майже для всіх степеневих рядів їхню суму не можна безпосередньо аналітично продовжити ні через одну точку кола збіжності. Це припущення пізніше у строгому вигляді сформулював і довів Г.Штейнгауз (1929). При цьому у нього випадкова аналітична функція – це функція, яка отримується зі звичайного степеневого ряду зі скінченним і відмінним від нуля радіусом збіжності після почленного домноження кожного коефіцієнта цього ряду на елементи деякої послідовності (послідовності Штейнгауза) $\mathcal{H} = (e^{i2\pi\eta_n(\omega)})$,

[1]Евграфов М.А. Ряды и интегральные представления. – Итоги науки и техники, сер.: Соврем. пробл. мат. Фундамент. направл., т.13. – М., 1986. – С.5–92.

де $(\eta_n(\omega))$ – послідовність незалежних рівномірно розподілених на відрізку $[0,1]$ дійсних випадкових величин. У подальшому виявилось, що є випадкові степеневі ряди у яких коефіцієнти є послідовністю незалежних випадкових величин загального вигляду і з єдиною особливою точкою на колі збіжності, які після додавання до них деякого детермінованого степеневого ряду отримують м.н. більший радіус збіжності, а коло збіжності нового ряду стає природною межею аналітичності для його суми. У цьому зв'язку Блекуел (див. [2], с.38) висловив припущення, що в загальному є лише ці дві можливості, або для степеневого ряду м.н. коло збіжності є природною межею аналітичності його суми, або після додавання деякого детермінованого ряду таким стає коло більшого радіуса для суми нового ряду.

У статтях [3],[4] для послідовності незалежних випадкових величин $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$, зокрема, узагальнювалось на клас випадкових рядів Діріхле з показниками $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ твердження гіпотези Блекуела, для випадкових степеневих рядів доведеної Риль-Нарджевським в [5]. Крім цього, в [3],[6] для рядів Діріхле $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k e^{z\lambda_k}$ з $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, таких, що $\tau(\Lambda_+) < +\infty$, $0 < c_1 \le |Z_k(\omega)| \le c_2 < +\infty$ м.н. і математичним сподіванням $\mathbf{E}Z_k = 0$ $(k \ge 0)$, доведено, що $\sigma_{зб}(F,\omega) \le \sigma_a(F,\omega) + \tau(\Lambda)/2$ м.н., а у статті [6] те ж саме доведено у випадку послідовності показників $\lambda_k = \ln(k+1)$ і системи $(Z_k(\omega))$, такої, що $Z_{m\cdot n}(\omega) = Z_m(\omega)\cdot Z_n(\omega)$ $(\forall m,n \in \mathbb{N}, \forall\omega)$ (у цьому випадку $\tau(\Lambda_+) = 1$). У статтях О.Ю.Задорожної і О.Б.Скасківа результати з [3] переносились на випадкові кратні ряди Діріхле з векторною послідовністю покомпонентно монотонно зростаючих і невід'ємних показників.

У деяких випадках після статей Риль-Нарджевського (1953) і П.В.Філевича (2003), сукупну незалежність коефіцієнтів вдається замінити на властивість, що послідовність коефіцієнтів утворює мультиплікативну систему, зокрема, одна з властивостей якої, що елементи системи мають нульові середні. Остання вимога, як встановив у 1996 році Філевич, відповідаючи на запитання проф. М.М. Шеремети, є в деяких питаннях принциповою. О.Б.Скасків і Л.О.Шаповаловська (2015) описували розподіл абсцис збіжності випадкових рядів Діріхле з показниками Λ_+ і з послідовністю випадкових коефіцієнтів загального вигляду в термінах властивостей послідовності функцій розподілу їхніх абсолютних величин. Зазначимо, що Л. Арнольд (1966) досліджував умови збіжності випадкових лакунарних стеневих рядів з коефіцієнтами $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ такими, що $(Z_k(\omega))$ є послідовністю одинаково розподілених випадкових величин. К. Ротерс (1990) помітив, що радіси збіжності випадкових степеневих рядів можна досліджувати з попарно незалежними коефіцієнтами. У ряді статей Т. Фанжі (1998-2000) були розглянуті питання про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами.

З огляду на сказане, не повинно виникнути сумнівів в актуальності дослідження розподілу абсцис збіжності рядів Діріхле у випадках, що раніше не розглядалися. Зокрема, опису розподілу абсцис збіжності випадкових рядів Діріхле, як з лише випадковими показниками, так і у випадку випадкових коефіцієнтів і

[2] J.-P. Kahane, Some random series of functions, 2nd. ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1985).

[3] P.V. Filevych, *On the relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series*, Mat. Stud., **20**, No 1 (2003), 33–39.

[4] X. Ding, Y. Xiao, *Natural boundary of random Dirichlet series*, Ukr. mat. zh., **58**, No 7 (2006), 997–1005.

[5] C. D. Ryll-Nardzewski, *Blackwell's conjecture on power series with random coefficients*, Studia Math., **13** (1953), 30–36.

[6] Hedenmalm H. *Topics in the theory of Dirichlet series* // Вісн. Харків. ун-ту. Сер. мат., прикл. мат. і мех. – 2000. – №475. – P.195–203.

показників в термінах властивостей послідовності функцій розподілу випадкових показників відповідного ряду. Те ж саме стосується дослідження областей збіжності випадкових кратних рядів Діріхле. З цієї ж точки зору цікавим є дослідити розподіл R-порядків випадкових рядів Діріхле в термінах функцій розподілу їхніх випадкових компонент.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Львівського національного університету імені Івана Франка.

Дисертаційна робота є складовою частиною досліджень за держбюджетною темою Мг–145Ф "Нові комплексно–ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами" (номер держреєстрації 0113 U 003051).

Мета і завдання дослідження.

Мета дослідження — встановлення нових результатів в термінах функцій розподілу випадкових компонент випадкових рядів Діріхле про опис абсцис збіжності та R-порядків їхнього зростання, а також областей збіжності випадкових кратних рядів Діріхле.

Об'єкт дослідження: ряди Діріхле від однієї та багатьох змінних з випадковими показниками та коефіцієнтами.

Предмет дослідження: абсциси збіжності і R-порядки зростання випадкових рядів Діріхле та області збіжності кратних рядів Діріхле.

Завдання дослідження:

— В термінах функцій розподілу випадкових попарно незалежних показників ряду Діріхле отримати оцінки абсцис його збіжності;
— Дослідити абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з випадковими показниками та випадковими коефіцієнтами;
— В термінах функцій розподілу випадкових компонент рядів Діріхле описати R-порядки їхнього зростання;
— В термінах функцій розподілу випадкових коефіцієнтів описати області збіжності випадкових кратних рядів Діріхле;

Методи дослідження: Для розв'язання поставлених задач використовуються методи математичного і комплексного аналізу, теорії функцій, теорії ймовірностей, а також деякі ідеї і підходи з досліджень, які виконали О.Ю. Задорожна, О.Б. Скасків, П.В. Філевич, Л.О. Шаповаловська, L. Arnold, T. Fanji, K. Roters.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. У роботі вперше отримано такі результати:

— Вперше в термінах функцій розподілу випадкових попарно незалежних показників ряду Діріхле отримано оцінки абсцис його збіжності.
— Вперше досліджено абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з випадковими показниками та випадковими коефіцієнтами.
— Вперше в термінах функцій розподілу випадкових компонент рядів Діріхле описані R-порядки їхнього зростання.
— Вперше в термінах функцій розподілу випадкових коефіцієнтів описано області збіжності випадкових кратних рядів Діріхле.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть бути застосованими у подальших дослідженнях в теорії аналітичних функцій та в інших галузях математики.

Особистий внесок здобувача. Зі статей, виконаних у співавторстві, у дисертацію включені з повними доведеннями лише результати, які належать авторові дисертації. Доведення кількох тверджень допоміжного характеру, отриманих співавторами здобувача, наводяться для повноти картини у рукописі дисертації з люб'язного дозволу співавторів. У статтях, виконаних у співавторстві, науковому керівнику належать постановки задач і загальна ідея застосування уточненої другої частини леми Бореля-Кантелі для отримання результатів в термінах обмежень на відповідні функції розподілу – випадкових коефіцієнтів чи випадкових показників. А.О. Куриляку належать: у статті [2] остаточні варіанти доведень наслідків 10 і 13 (Corollary 10, 13), у статті [3] – Твердження 5, у статті [4] – Твердження 1.4, а у статті [6] – Твердження 10 (Proposition 10), та в однаковій мірі всім авторам статті доведення Твердження 7 (Proposition 7). Решта тверджень з вказаних праць належать здобувачці.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на таких конференціях і наукових семінарах:

1) Міжнародній математичній конф.ім.В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 25.08–29.08.2015);
2) Міжнародній конференції "Complex analysis and related topics" (Львів, 30.05–4.06.2016);
3) Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22.02-25.02.2017);
4) Міжнародній конференції з функціонального аналізу присвяченій 125-річчю Стефана Банаха (Львів, 18–23.09.2017);
5) Міжнародній наук. конф. Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях, присв. 50-річчю ф-ту мат. та інформ. (Чернівці, 17-19 вересня 2018);
6) науковому семінарі з теорії потенціалу та застосувань у Львівському національному університеті ім. Івана Франка (керівники проф. О. Б. Скасків, доктор фіз.-мат. наук І. Е. Чижиков, 2016-2018);
7) львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. А.А. Кондратюк і проф. О. Б. Скасків, 2015, тепер – проф. О. Б. Скасків, проф. І.Е. Чижиков, проф. М.В. Заболоцький, проф. П.В. Філевич у 2017-2018);
8) науковому семінарі з теорії функцій у Дрогобицькому державному педуніверситеті ім. І. Франка (керівник проф. Б. В. Винницький, 2019).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 12 статтях і наукових повідомленнях, з яких 6 ([1–6]) — у виданнях з переліку видань, у яких слід опублікувати результати дисертації; зокрема 1 ([2]) – у закордонному виданні, 2 ([2, 6]) у виданнях, відображених в Scopus і 5 у тезах конференцій різного рівня.

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається з анотації (українською та англійською мовами), переліку основних позначень, вступу, трьох розділів, ви-

сновків та списку літератури. Загальний обсяг роботи – 146 сторінок, обсяг списку використаних джерел налічує 76 найменувань і займає 7 сторінок.

Основний зміст дисертації

У вступі обгрунтовано актуальність теми дослідження, вказані мета, завдання та методи досліджень, підкреслено наукову новизну отриманих результатів, наведено форми апробації одержаних результатів, описано особистий внесок здобувача, кількість публікацій, структуру та обсяг дисертації.

Розділ 1 містить огляд праць, що стосуються дисертаційного дослідження, а також наведено основні результати дисертації.

Введемо такі позначення. Через $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ позначаємо, відповідно, множини дійсних, комплексних, натуральних і цілих чисел, а $\mathbb{R}_+ \stackrel{def}{=} [0, +\infty)$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для $x \in \mathbb{R}$ позначатимемо $\Pi_x := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \le x\}$ – півплощину.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — ймовірнісний простір, тобто, $\mathcal{A}$ – σ-алгебра підмножин Ω, а $\mathbf{P}$ – зліченно-адитивна ймовірнісна міра на $\mathcal{A}$. Крім цього, нехай $\Lambda = \big(\lambda_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ та $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$, відповідно, послідовності невід'ємних та комплекснозначних випадкових величин на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Нехай також $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ позначає числову послідовність таку, що $0 \le \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow +\infty$ $(1 \le k \uparrow +\infty)$.
Через $\mathcal{D}(\Lambda)$ позначимо клас формальних випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F_\omega(z) = F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega) \tag{1}$$

При фіксованому $\omega = \omega_0$ він є звичайним (детермінованим) формальним рядом Діріхле. Нехай

$$\mathcal{D} := \bigcup_{\Lambda} \mathcal{D}(\Lambda),$$

а $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ – підклас рядів з класу $\mathcal{D}$ з фіксованою послідовністю показників Λ_+, тобто, рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами і монотонно зростаючою необмеженою послідовністю показників. При цьому вважатимемо, що означення класу $\mathcal{D}$ містить умову, що для кожного ряду F_ω вигляду (1) з класу $\mathcal{D}$ і для кожного ω існує $x_1 = x_1(\omega) = x_1(F_\omega) < 0$ таке, що

$$f_k(\omega) e^{x_1 \lambda_k(\omega)} \to 0 \quad (k \to +\infty) \text{ м.н.}$$

Позначимо $\sigma_{\text{зб}}(F, \omega)$, $\sigma(F, \omega) = \sigma_a(F, \omega)$ – відповідно абсциси збіжності, абсолютної збіжності, рівномірної збіжності і обмеженості цього ряду; $\sigma_\mu(F, \omega)$ – абсциса існування максимального члена ряду Діріхле. Власне, при фіксованому $\omega \in \Omega$ визначимо їх наступними рівностями:

$$\sigma_{\text{зб}}(F, \omega) := \sup\{x\colon \text{ ряд (1) збіжний у півплощині } \Pi_x\},$$
$$\sigma(F, \omega) := \sup\{x\colon \text{ ряд (1) абсолютно збіжний у півплощині } \Pi_x\},$$

а вслід за П.В.Філевичем[3], $\sigma_\mu(F, \omega)$ визначимо рівністю

$$\sigma_\mu(F, \omega) := \sup\{\sigma\colon (\forall x < \sigma)[f_k(\omega) e^{x\lambda_k(\omega)} \to 0\ (k \to +\infty)]\}.$$

Крім цього, у випадку детермінованих рядів Діріхле, тобто, рядів з послідовністю невід'ємних показників і числовою послідовністю коефіцієнтів писатимемо $\sigma_{\text{зб}}(F)$,

$\sigma(F)$, $\sigma_\mu(F)$ замість $\sigma_{зб}(F,\omega)$, $\sigma(F,\omega)$, $\sigma_\mu(F,\omega)$.
Позначимо

$$\tau(\omega,\Lambda) := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n(\omega)}$$

і $\tau(\Lambda) := \tau(\omega,\Lambda)$ для послідовності дійсних чисел $\Lambda = (\lambda_k)$.

У цьому розділі спочатку доведено ряд тверджень про співвідношення між різними абсцисами збіжності рядів Діріхле вигляду (1). Характерними тут є такі твердження.

Твердження 2.2. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ має вигляд (1) і $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) := \lambda(\omega) > 0$ м.н. Тоді*

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} \quad \text{м.н.}$$

Твердження 2.6. *Нехай $F \in \mathcal{D}$, має вигляд (1) і $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) > 0$ м.н. Якщо для довільних функцій $\gamma,\delta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ і всіх $\omega \in \Omega$ таких, що $\gamma(\omega) \geq 0$ м.н. виконується умова*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty, \tag{2}$$

то м.н. виконуються нерівності

$$\sigma(F,\omega) \geq \gamma(\omega)\alpha_0(\omega) - \delta(\omega) = \gamma(\omega)\sigma_\mu(F,\omega) - \delta(\omega) \geq \gamma(\omega)\sigma_{зб}(F,\omega) - \delta(\omega).$$

Твердження 2.6 є ключовим при доведенні інших тверджень як з даного, так і наступного підрозділу.

Варто зауважити, що для рядів Діріхде з послідовністю показників Λ_+, твердження 2.6 доведене в[7] (див. також[8]) . А для рядів Діріхле з монотонно зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників Λ_+ в статті [9] нерівності з Твердження 2.6 фактично доведені за умови

$$h(\gamma,\delta,\omega) \overset{def}{=} \varliminf_{k\to\infty} \frac{(\gamma(\omega)-1)\ln|f_k(\omega)| + \delta(\omega)\lambda_k(\omega)}{\ln k} > 1,$$

. з якої умова (2) випливає, а навпаки, в загальному, імплікації нема.

Другий підрозділ розділу 2 присвячено дослідженню рядів Діріхле з випадковими показниками та випадковими коефіцієнтами.

Для $F \in \mathcal{D}$ вигляду (1) з коефіцієнтами $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$ розглянемо ряди Діріхле

$$F_3(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 e^{2x\lambda_k}, \quad F_4(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| e^{x\lambda_k}.$$

Через Θ позначимо клас послідовностей комплекснозначних випадкових величин ξ_n таких, що

$$(\exists c_j \in (0,+\infty))(\forall n)\colon \quad c_1 \leq |\xi_n(\omega)| \leq c_2 \text{ м.н.}$$

[7] Задорожна О.Ю., Скасків О.Б. *Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілт'еса* // Буковинський мат. журн.– 2013. – Т.1, №3—4. – С.45—-50.

[8] Скасків О.Б., Бандура А.І. Асимптотичні оцінки додатних інтегралів та цілі функції. – Львів–Івано-Франківськ: пп. Голіней, 2015. – 108 с.

[9] Мулява О.М. *Про абсцису збіжності ряду Діріхле* // Мат. студії. – 1998. – Т.9, №2. – С.171–176.

Через Δ позначимо клас невід'ємних випадкових величин δ_n таких, що

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\colon \quad \mathbf{E}(e^{x\delta_n}) \le C_1 = C_1(x) < +\infty.$$

З доведеного у цьому підрозділі Твердження 2.14 за допомогою теореми про три ряди отримано таке твердження про абсцису збіжності випадкового ряду.

Теорема 2.1. *Нехай $(\xi_n) \in \Theta$, $(\delta_n) \in \Delta$, а $F \in \mathcal{D}$ з коефіцієнтами $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ і показниками $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k\colon k \ge 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$.*

1. *Якщо $\mathbf{E}\big(\xi_n e^{x\delta_n}\big) = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in \mathbb{R}$, $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ – послідовність незалежних випадкових величин для кожного $x \in \mathbb{R}$, то $\sigma_{зб}(F,\omega) \ge \sigma(F_3)$ м.н.*
2. *Якщо додатково припустити, що $(\exists C_2(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ \mathbf{E}(e^{x\delta_n}) \ge C_2(x)$, то $\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma(F_3)$ м.н.*

Наступне твердження стосується абсциси абсолютної збіжності випадкового ряду. Якщо абсциса збіжності випадкового ряду вигляду (1) пов'язана з абсцисою збіжності (абсолютної) ряду F_3, то його абсциса абсолютної збіжності пов'язана з абсцисою збіжності (абсолютної) ряду F_4.

Теорема 2.2. *Нехай $(\xi_n) \in \Theta$, $(\delta_n) \in \Delta$, а $F \in \mathcal{D}$ з коефіцієнтами $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ і показниками $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k\colon k \ge 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$.*

1. *Якщо $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ – послідовність незалежних випадкових величин для кожного $x \in \mathbb{R}$, то $\sigma(F,\omega) \ge \sigma(F_4)$ м.н.*
2. *Якщо додатково припустити, що*

$$(\forall x, x < \sigma(F,\omega))(\exists a > 0)(\forall n \ge 1)\colon \mathbf{P}\{\omega\colon |a_n|e^{x\lambda_n(\omega)} < a\} = 1$$

і $(\forall n \in \mathbb{N})\colon |\xi_n(\omega)| = c \ne \infty$ м.н., а також $(\exists C_3(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})\colon \mathbf{D}e^{x\delta_n} \ge C_3(x)$, то $\sigma(F,\omega) = \sigma(F_4)$ м.н.

У третьому підрозділі другого розділу доведено ряд тверджень для рядів Діріхле з випадковими попарно незалежними коефіцієнтами.

Зокрема, там встановлено таке твердження.

Твердження 2.15. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має коефіцієнти вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Якщо виконуються умови*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\ln|a_k|} = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = 0 \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \Big|\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\Big| \le \delta(\omega) < 1 \quad \text{м.н.},$$

то м.н. $\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma(F,\omega) = \alpha_0^*(\omega) := \varliminf\limits_{k\to+\infty} \dfrac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)}$.

Використовуючи твердження 2.15 ми довели такі теореми 2.5 і 2.6.

Теорема 2.5. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд (1), а її коефіцієнти мають вигляд $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ і виконуються умови Твердження 2.15. Припустимо, що $\big(\lambda_k(\omega)\big)$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу*

$$\Phi_k(x) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\omega : \lambda_k(\omega) < x\},\ x \in \mathbb{R},\ k \ge 0.$$

Виконуються наступні твердження:

a) *i) Якщо* $\sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \geq \rho \in (0,+\infty)$ *м.н., то*

$$(\forall \varepsilon \in (0,\rho)): \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - \Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon})\big) < \infty;$$

ii)Якщо $0 \geq \sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \geq \rho \in (-\infty,0]$ *м.н., то*

$$(\forall \varepsilon > 0): \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon}) < \infty;$$

b) *i) Якщо існує послідовність* (δ_k) *така, що* $\delta_k \in (-\infty,0)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \delta_k = -\rho$, $\rho \in (0,+\infty]$, *і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - \Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k})\big) = +\infty,$$

то $\sigma(F,\omega) \leq \rho$ *м.н.*
ii) Якщо існує послідовність (δ_k) *така, що* $\delta_k \in (0,+\infty)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \delta_k = \rho$, $\rho \in [0,+\infty]$, *і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k}) = +\infty,$$

то $\sigma(F,\omega) \leq -\rho$ *м.н.*

Теорема 2.6. *Нехай* $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *її коефіцієнти мають вигляд* $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ *і виконуються умови Твердження 2.15. Тоді виконуються твердження:*
a) *i) Якщо існують* $\rho \in (0,+\infty)$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ *і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - \Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k})\big) < +\infty,$$

то $\sigma(F,\omega) \geq \rho$ *м.н.*
ii) Якщо існують $\rho \in (-\infty,0]$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ *і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}) < +\infty,$$

то $\sigma(F,\omega) \geq \rho$ *м.н.*

b) *Якщо* $\sigma(F,\omega) = -\infty$ *м.н., то* $(\forall E > 1)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \Phi_k(\frac{1}{E}\ln|a_k|) = +\infty.$

Доведення теорем 2.7 та 2.8 проведено аналогічно доведенню відповідних теорем 2.5 і 2.6.

Теорема 2.7. *Нехай* $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *її коефіцієнти мають вигляд* $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ *і виконуються умови*

$$\ln k = o(\ln|a_k|) \;\; i \;\; \ln|Z_k(\omega)| = o(\ln|a_k|) \quad (k \to +\infty) \;\; \text{м.н.}$$

Припустимо, що $\big(\lambda_k(\omega)\big)$ *— послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $\Phi_k(x) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\omega : \lambda_k(\omega) < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$. *Тоді виконуються наступні твердження:*

a) *i)* $\sigma(\omega)=\sigma(F,\omega)\geq\rho\in(0,+\infty)$ *м.н.* $\Longrightarrow(\forall\varepsilon\in(0,\rho))\colon\ \sum_{k=0}^{+\infty}\big(1-\Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon})\big)<\infty$;
ii) $0\geq\sigma(\omega)=\sigma(F,\omega)\geq\rho\in(-\infty,0]$ *м.н.* $\Longrightarrow(\forall\varepsilon>0)\colon\ \sum_{k=0}^{+\infty}\Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon})<\infty$;
b) *i) Якщо існує послідовність* (δ_k) *така, що* $\delta_k\in(-\infty,0)$ $(k\geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty}\delta_k=-\rho$, $\rho\in(0,+\infty]$, *і* $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1-\Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k})\big)=+\infty$, *то* $\sigma(F,\omega)\leq\rho$ *м.н.*
ii) Якщо існує послідовність (δ_k) *така, що* $\delta_k\in(0,+\infty)$ $(k\geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty}\delta_k=\rho$, $\rho\in[0,+\infty]$, *і* $\sum_{k=0}^{+\infty}\Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k})=+\infty$, *то* $\sigma(F,\omega)\leq-\rho$ *м.н.*

Теорема 2.8. *Нехай* $F\in\mathcal{D}(\Lambda)$, *її коефіцієнти мають вигляд* $f_k(\omega)=a_kZ_k(\omega)$ *і виконуються умови*

$$\ln k=o(\ln|a_k|)\ \ \text{і}\ \ \ln|Z_k(\omega)|=o(\ln|a_k|)\quad(k\to+\infty)\ \ \text{м.н.}$$

Тоді виконуються наступні твердження:
a) *i) Якщо існують* $\rho\in(0,+\infty)$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k\to+0$ $(k\to+\infty)$ *і* $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1-\Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k})\big)<+\infty$, *то* $\sigma(F,\omega)\geq\rho$ *м.н.*
ii) Якщо існують $\rho\in(-\infty,0]$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k\to+0$ $(k\to+\infty)$ *і* $\sum_{k=0}^{+\infty}\Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k})<+\infty$, *то* $\sigma(F,\omega)\geq\rho$ *м.н.*
b) $\sigma(F,\omega)=-\infty$ *м.н.* $\Longrightarrow(\forall E>1)\colon\ \sum_{k=0}^{+\infty}\Phi_k(\frac{1}{E}\ln|a_k|)=+\infty$.

За допомогою доведеного у цьому підрозділі Твердження 2.18, отримано теореми 2.9 і 2.10, що є повними аналогами теорем 2.7 і 2.8, у випадку, коли умови

$$\ln k=o(\ln|a_k|)\ \ \text{і}\ \ \ln|Z_k(\omega)|=o(\ln|a_k|)\quad(k\to+\infty)\ \ \text{м.н.}$$

замінити на умови

$$\tau(\omega,\Lambda)=0\ \ \text{і}\ \ \lim_{k\to+\infty}\frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}=0\quad\text{м.н.}$$

У четвертому підрозділі розглянуто числові характеристики зростання випадкових рядів Діріхле. Отримано нові твердження про обчислення R-порядків і R-типів для випадкових цілих рядів Діріхле з показниками Λ_+ і коефіцієнтами вигляду $f_k(\omega)=a_kZ_k(\omega)$.

В теоремі 2.11 встановлено умови, які повинні задовольняти випадкові величини $f_k(\omega)$ для того, щоб для довільного наперед заданого $\rho\in[0,+\infty]$ виконувалась рівність $\rho_F(\omega)=\rho$ м.н.

Теорема 2.11. *Нехай* $F_\omega\in\mathcal{D}(\Lambda)$, *має вигляд* $F_\omega(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}f_k(\omega)e^{z\lambda_k}$, *а* $\big(|f_k(\omega)|\big)$ *– послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $\Phi_k(x):=\mathbf{P}\{\omega\colon|f_k(\omega)|<x\}$, $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}_+$. *Якщо* $\beta(\Lambda)=\varlimsup\limits_{k\to+\infty}\frac{\ln k}{\lambda_k\ln\lambda_k}=0$, *то:*
a) *Для того, щоб* $\rho_F(\omega)=\rho\in(0,+\infty)$ *м.н., необхідно і досить, щоб* $(\forall\varepsilon\in(0,\rho)\colon$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1-\Phi_k\big(e^{-\frac{1}{\rho+\varepsilon}\lambda_k\ln\lambda_k}\big)\Big)<+\infty\ \wedge\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1-\Phi_k\big(e^{-\frac{1}{\rho-\varepsilon}\lambda_k\ln\lambda_k}\big)\Big)=+\infty.$$

b) *Для того, щоб* $\rho_F(\omega)=0$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall\varepsilon>0)\colon\quad\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1-\Phi_k\big(e^{-\varepsilon\lambda_k\ln\lambda_k}+0\big)\Big)<+\infty.$$

c) *Для того, щоб* $\rho_F(\omega) = +\infty$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_k\big(e^{-\varepsilon\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) = +\infty.$$

Теорема 2.12, яка стосується R-типів для випадкових цілих рядів Діріхле, доводиться подібно до Теореми 2.11 з використанням Твердження 2.22.

У третьому розділі досліджуються області збіжності кратних рядів Діріхле.

Нехай $\Lambda^p = (\lambda_{(n)})_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$, де $\lambda_{(n)} = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \ldots, \lambda_{n_p}^{(p)}) \in \mathbb{R}_+^p = [0, +\infty)^p$, $(n) = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \in \mathbb{N}$. У випадку, коли $(\lambda_k^{(j)})_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $1 \le j \le p$, зростаючі до $+\infty$ послідовності невід'ємних чисел, тобто, $0 = \lambda_0^{(j)} < \lambda_k^{(j)} < \lambda_{k+1}^{(j)} \uparrow +\infty$ $(1 \le k \uparrow +\infty,\ 1 \le j \le p)$, використовуємо позначення Λ_+^p. Через $\mathcal{D}^p(\Lambda^p)$ позначимо клас формальних кратних рядів Діріхле вигляду

$$F(s) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_{(n)} \exp\{(\lambda_{(n)}, s)\}, \tag{3}$$

$$s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{C}^p,\ s_j = \sigma_j + it_j\ (j \in \{1, \ldots, p\}),$$

таких, що існує $\sigma \in \mathbb{R}^p$ таке, що

$$a_{(n)} \exp(\lambda_{(n)}, \sigma) \to 0 \quad (\|n\| := n_1 + \ldots + n_p \to +\infty), \tag{4}$$

де $(a_{(n)})$ – послідовність комплексних чисел, $(\lambda_{(n)}, s) = \lambda_{n_1}^{(1)} s_1 + \ldots + \lambda_{n_p}^{(p)} s_p$, $(n) = (n_1, n_2, ..., n_p)$.

Для $\sigma \in \overline{\mathbb{R}}^p := [-\infty, +\infty]^p$ позначимо $\mathbf{\Pi}_\sigma := \{s \in \mathbb{C}^p :\ \mathrm{Re}\ s < \sigma\}$, де $\mathrm{Re}\ s = (\mathrm{Re}\ s_1, \ldots, \mathrm{Re}\ s_p)$, $x = (x_1, \ldots, x_p) < b = (b_1, \ldots, b_p) \Longleftrightarrow x_j < b_j$ $(\forall j \in \{1, \ldots, p\})$, а $x \ge b \Longleftrightarrow x_j \ge b_j$ $(\forall j \in \{1, \ldots, p\})$.

Нехай $G_a = \{x \in \mathbb{R}^p :$ ряд (3) абсолютно збіжний в $\mathbf{\Pi}_x\}$. У випадку послідовності Λ_+^p область існування максимального члена визначається (див. [10]) (як множина тих $\sigma \in \mathbb{R}^p$, що $\mu(\sigma, F) = \mu(\sigma_1, \ldots, \sigma_p, F) = \max\{|a_{(n)}| \exp(\lambda_{(n)}, \sigma)\colon (n) \in \mathbb{Z}_+^p\} < +\infty$. В загальному, область існування максимального члена G_μ визначимо як внутрішність множини тих $\sigma \in \mathbb{R}^p$, для яких виконується умова (4). Як і у випадку рядів Діріхле від однієї змінної проміжні твердження про опис множини існування максимального члена ряду Діріхле, становлять одну з опорних точок всієї конструкції доведень у цьому розділі. Базовими у цьому розділі є твердження 3.3, 3.10 і 3.13, а основні результати розділу містяься у Теоремах 3.1 і 3.2.

Теорема 3.1. *Нехай* $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$. *Припустимо, що* $\big(|f_{(n)}(\omega)|\big)$ *послідовність попарно незалежних випадкових величин з функцією розподілу* $\Phi_{(n)}(x) := \mathbf{P}\{\omega : |f_{(n)}(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $(n) \in \mathbb{Z}_+^p$. *Виконуються наступні твердження:*
a) *Для того, щоб* $\sigma \in \partial G_a \cap \big(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\big)^p$ *м.н., необхідно і досить, щоб* $(\forall \varepsilon > 0)$:

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}\big)\Big) < +\infty \ \wedge \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1-\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})} + 0\big)\Big) = +\infty.$$

[10] Задорожна О.Ю., Скасків О.Б. *Про спряжені абсциси збіжності кратного ряду Діріхле* // Карпатські мат. публ./ Carpathian Math. Publ. – 2009. – Т.1, №2. – С.152–160.

b) *Для того, щоб* $\sigma \in \partial G_a \cap \big(-\infty, 0)^p$ *м.н., необхідно і досить, щоб* $(\forall \varepsilon > 0)$:

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1-\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}\big)\Big) < +\infty \ \wedge \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}\big)\Big) = +\infty.$$

c) *Для того, щоб* $G_a = \mathbb{R}^p$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \Delta > 0)\colon \ \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \big(1 - \Phi_{(n)}\big(\exp(-\Delta \|\lambda_{(n)}\|)\big)\big) < +\infty.$$

Розглянемо ряди Діріхле вигляду

$$F(s) = F_\omega(s) = F(s,\omega) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_{(n)} \exp\{(\lambda_{(n)}(\omega), s)\}, \tag{5}$$

де $\big(a_{(n)}\big)$ - послідовність комплексних значень, і $\Lambda^p = (\lambda_{(n)}(\omega))_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$, $\lambda_{(n)}(\omega)\colon \Omega \to \mathbb{R}_+^p$ послідовність випадкових векторів з невід'ємними випадковими компонентами на ймовірнісному просторі $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$. Через $\mathcal{D}_{ex}^p$ позначимо клас рядів Діріхле вигляду (3) таких, що $F_\omega \in D^p(\Lambda^p)$ м.н.

Теорема 3.2. *Нехай* $f \in \mathcal{D}_{ex}$ *і* $\Lambda = \big(\lambda_{(n)}(\omega)\big)_{(n)\in\mathbb{Z}_+^p}$ *- послідовність, така, що послідовність* $\big(\|\lambda_{(n)}(\omega)\|\big)_{(n)\in\mathbb{Z}_+^p}$ *- послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $\Phi_{(n)}(x) := \mathbf{P}\{\omega : \|\lambda_{(n)}(\omega)\| < x\}$, $x \in \mathbb{R}^p$, $(n) \in \mathbb{Z}_+^p$. *Для того, щоб* $G_a = \mathbb{R}^p$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \ \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \big(1 - \Phi_{(n)}\big(\exp(-\varepsilon \ln |a_{(n)}|)\big)\big) < +\infty. \tag{6}$$

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена дослідженню абсцис і областей збіжності випадкових рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами і випадковими показниками, як від однієї змінної, так і від багатьох комплексних змінних, а також випадкових R-порядків зростання випадкових рядів Діріхле.

У дослідженні як областей збіжності випадкових рядів Діріхле основною лінією дослідження є відмова від апріорних умов на послідовність показників. У тому числі ряд результатів стосуються випадку рядів Діріхле з довільною, взагалі кажучи немонотонною, послідовністю невід'ємних показників. У дисертаційній роботі на основі нових тверджень про співвідношення між абсцисами для таких загальних рядів Діріхле з вперше в термінах умов, що накладаються на функції розподілу випадкових попарно незалежних показників ряду, отримано оцінки абсцис його збіжності, а також вперше досліджено абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з випадковими показниками та випадковими коефіцієнтами. Раніше подібні результати про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами і монотонною послідовністю показників в термінах обмежень, що накладаються на функції розподілу випадкових попарно незалежних коефіцієнтів ряду, роглянули О.Б.Скасків і Л.О.Шаповаловська (2015 р.).

У дисертації також вперше в термінах функцій розподілу випадкових компонент рядів Діріхле описані випадкові R-порядки їхнього зростання. На основі нових тверджень про співвідношення між областями збіжності кратних рядів Діріхле вперше в термінах функцій розподілу випадкових коефіцієнтів описано області збіжності випадкових кратних рядів Діріхле. Ряд тверджень, доведених у дисертації для рядів Діріхле з довільною послідовністю показників, і які відіграють у дисертаційному дослідженні допоміжну роль, узагальнюють відповідні як одновимірні твердження, так і твердження для кратних рядів Діріхле, доведені раніше у випадку рядів з монотонно зростаючою послідовністю показників О.М.Мулявою (1998), Х.Хеденмальмом (2000), П.Філевичем (2003), Т.Фанжі (1998–2003), О.Ю.Задорожною і О.Б.Скасківим (2009, 2013) та іншими.

Основні результати дисертації є новими і мають завершений характер. Отримані результати про випадкові ряди Діріхле з випадковими показниками є принципово новими і можуть стати основою для подальших результативних досліджень, як самих рядів, так і появи нових їхніх застосувань в інших розділах математики.

Достовірність результатів дисертації підтверджується чіткими і детальними доведеннями, а також тим, що вони опубліковані у фахових журналах і апробовані на багатьох міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях і спеціалізованих наукових семінарах.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

[1] Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2017. – Вип.84. – С.96–112.

[2] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv O.Yu. *On the convergence of Dirichlet series with random exponents* // Int. Journal of Appl. Math. – 2017. – V.30, №3. – P.229–238.

[3] Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками і коефіцієнтами* // Буковинський матем. журн. – 2017. – Т.5, №3—4. – С.90–97.

[4] Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Абсциси збіжності випадкових кратних рядів Діріхле* // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2018. – № 1(42). – С.1–11.

[5] Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Про зростання випадкових цілих рядів Діріхле* // Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 2018. – Вип.85. – С.66–82.

[6] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. *On the convergence of random multiple Dirichlet series* // Mat. Stud. – 2018. – V.49, №2. – P.122–137

Список праць здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

[1] Stasiv N., Skaskiv O. On the growth of the entire Dirichlet series of several variables // Міжнародна математична конф.ім. В.Я. Скоробогатька: Тези. – Міжнародна конф. (Дрогобич, 25.08—29.08.2015). — Інститут ППММ ім. Я.С.Підстригача: Львів, 2015. — С.157.

[2] Stasiv N.Yu. On the growth of the Dirichlet series of several variables // Complex Analysis and Related Topics: Abstracts. – International conf. (Lviv, 30.05–4.06, 2016). – Lviv, 2016. – P. 88.

[3] Kuryliak A., Skaskiv O., Stasiv N. On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random exponents // Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 р.): Тези доповідей.—Івано-Франківськ, 2017. — С.12–13.

[4] Kuryliak A., Skaskiv O., Stasiv N. The abscissa of absolute convergence of Dirichlet series with random exponents // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach.- Lviv, Ukraine.- 2017.- P. 136-137.

[5] Skaskiv O., Stasiv N. The abscissas of convergence of random Dirichlet series // Міжн. наук. конф. «Сучасн проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях». - Чернівці, 2018. – С.161.

АНОТАЦІЯ

Стасів Н. Ю. Асимптотичні властивості випадкових рядів Діріхле. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 "математичний аналіз" (111 — математика). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2019.

У дисертаційній роботі основним об'єктом дослідження є ряди Діріхле з випадковими показниками і випадковими коефіцієнтами, випадкові кратні ряди Діріхле.

Отримано оцінки абсцис збіжності рядів Діріхле з довільною послідовністю невід'ємних показників в термінах умов, що накладаються на функції розподілу попарно незалежних показників ряду. Досліджено абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з випадковими показниками та випадковими коефіцієнтами. У термінах обмежень, які накладаються на послідовність функцій розподілу попарно незалежних показників встановлено умови, за яких абсциса абсолютної збіжності дорівнює майже напевно (м.н.) наперед заданому числу або є нескінченною. Отримано умови у термінах функцій розподілу послідовності випадкових коефіцієнтів, за яких R-порядки і R-типи зростання випадкових рядів Діріхле дорівнюють м.н. наперед заданим невід'ємним числам або нескінченності. Для випадкових кратних рядів Діріхле в термінах функцій розподілу випадкових коефіцієнтів описано області збіжності та встановлено співвідношення між ними. Вивчено питання про опис R-порядків випадкових цілих рядів Діріхле у термінах функцій розподілу послідовності їхніх випадкових коефіцієнтів.

Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими, вони мають теоретичний характер та можуть бути використані як в теорії рядів Діріхле, так і в її застосуваннях.

Ключові слова: випадкові ряди Діріхле, кратні ряди Діріхле, абсциса збіжності, R-порядок зростання, ціла функція.

АННОТАЦИЯ

Стасив Н. Ю. Асимптотические свойства случайных рядов Дирихле. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Дисертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 "математический анализ" (111 — математика). — Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2019.

В диссертационной работе основным объектом исследования являются ряды Дирихле со случайными показателями и случайными коэффициентами, а также случайные кратные ряды Дирихле.

Получены оценки абсцис сходимости рядов Дирихле с произвольной последовательностью неотрицательных показателей в терминах условий, налагаемых на функции распределения попарно независимых показателей ряда. Исследованы абсциссы сходимости случайных рядов Дирихле со случайными показателями и случайными коэффициентами. В терминах ограничений, налагаемых на последовательность функций распределения попарно независимых показателей получены условия, при которых абсцисса абсолютной сходимости почти наверное равняется (м.н.) наперед заданному значению или равняется бесконечности. Получены условия в терминах функций распределения последовательности случайных коэффициентов, при которых R-порядки роста целых случайных рядов Дирихле почти наверное равняются наперед заданному неотрицательному числу или бесконечности. Для случайных кратных рядов Дирихле в терминах функций распределения случайных коэффициентов описаны области сходимости.

Все выносимые на защиту результаты диссертации новые, имеют теоретический характер и могут быть использованы как в теории рядов Дирихле, так и в её приложениях.

Ключевые слова: случайные ряды Дирихле, кратные ряды Дирихле, абсцисса сходимости, R-порядок роста, целая функция.

ABSTRACT

Stasiv N. Yu. *Asymptotic properties of random Dirichlet series.* — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 — Mathematical analysis (111 - Mathematics), Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018.

The dissertation consists of an introduction, 3 chapters, conclusions to each section and general conclusions, list of sources used. The introduction substantiates the relevance of the research topic, formulates the purpose, task, subject, object and methods of the research, presents the scientific novelty, the practical significance of the results obtained, the relationship of work with scientific themes and the personal contributions of the author of

the dissertation, a list of conferences and scientific seminars, on which the results of the dissertation research are tested; List of publications in which the main results of the dissertation are published.

In the dissertation, the main object of investigations are Dirichlet series with random exponents and random coefficients and also random multiple Dirichlet series.

There were obtained the estimates of the abscissa of convergence of Dirichlet series with arbitrary sequence of positive exponents in terms of conditions imposed on the distribution functions of pairwise independent exponents of such series. The abscissas of convergence of random Dirichlet series with random exponents and random coefficients are investigated. In terms of restrictions imposed on the sequence of the distribution functions of pairwise independent exponents are established conditions in which the abscissa of absolute convergence almost surely (a.s.) is equal to the predetermined number or is infinite. Conditions in terms of the distribution functions of the sequence of random coefficients, in which R-types and R-orders of the growth of random Dirichlet series are equal to the predetermined nonnegative number or are infinities are given. For random multiple Dirichlet series in terms of the distribution functions of random coefficients, the domains of convergence are described and the relationship between them are established. The question of the description of R-orders of random Dirichlet series in terms of the distribution functions of the sequence of their random coefficients is investigated.

All results of the thesis are new. They have theoretical meaning and can be used both in Dirichlet series theory and in the it's applications.

Keywords: random Dirichlet series, multiple Dirichlet series, abscissa of convergence, R-order of the growth, entire function.

Підписано до друку 23.05.2019 р.
Формат 60×84/16
Папір офсетний. Друк офсетний
Тираж 100 прим.

Видавець: друкарня "Коло"
м. Дрогобич, вул. Бориславська, 8
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 498, від 20.06.2001 р.
Тел. +38(03-244)29060, ел.пошта: koloopera@gmail.com