Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Стасів Надія Юріївна

517.53+517.55

ДИСЕРТАЦІЯ

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПАДКОВИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _____ Н.Ю. Стасів

Науковий керівник:
Скасків Олег Богданович
доктор фізико-математичних
наук, професор

Львів – 2019

ЗМІСТ

Анотація 3

Abstract 8

Перелік умовних позначень 13

Вступ 15

Розділ 1. Вихідні положення, огляд літератури та основні напрямки дослідження 23

1.1 Огляд відомих результатів, які відносяться до тематики дисертаційного дослідження 23

1.2 Основні напрямки та результати дослідження 29

Розділ 2. Абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле 40

2.1 Абсциси збіжності рядів Діріхле з довільними дійсними невід'ємними показниками 40

2.2 Твердження про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з випадковими показниками і випадковими коефіцієнтами. 61

2.3 Абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими попарно незалежними показниками 68

2.4 Ряди з випадковими показниками і коефіцієнтами 72

2.5 Числові характеристики зростання випадкових рядів Діріхле 92

Висновки до розділу 2 116

Розділ 3. Області збіжності випадкових кратних рядів Діріхле 118

3.1 Області збіжності кратних випадкових рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами 118

3.2 Області збіжності кратних випадкових рядів Діріхле з випадковими показниками 135

Висновки до розділу 3 142

Висновки 143

Список використаних джерел 145

АНОТАЦІЯ

Стасів Н.Ю. Асимптотичні властивості випадкових рядів Діріхле. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 “Математичний аналіз” (111 — Математика). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2019.

Дисертація складається зі вступу, 3 розділів, що охоплюють 8 підрозділів, висновків, списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми досліджень, сформульовано мету, завдання, предмет, об’єкт та методи дослідження, наведено наукову новизну, теоретичне значення отриманих результатів, зв’язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача. Також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

У роботі об’єктом дослідження є ряди Діріхле, як від однієї змінної, так і від багатьох змінних, з випадковими показниками та випадковими коефіцієнтами.

Досліджено абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле. Подібні твердження доведено стосовно областей збіжності для випадкових кратних рядів Діріхле. В термінах функцій розподілу випадкових коефіцієнтів описано R-порядки і R-типи випадкових цілих рядів Діріхле.

Дослідження властивостей аналітичних функцій в залежності від властивостей коефіцієнтів функціональних рядів, якими вони зображаються, є одним з важливих напрямів у теорії функцій від початку її виникнення наприкінці XIX ст. Поряд з цим, розгляд випадкових аналітичних функцій дає в руки дослідника потужний інструмент встановлення “кількості” аналітичних функцій з тими

чи іншими властивостями. Відносно добре дослідженими є випадкові ряди Діріхле змонотонно зростаючою до нескінченності послідовністю показників чи степеневі ряди, коефіцієнти яких утворені у вигляді добутків елементів числової послідовності і послідовності незалежних випадкових величин, бо тоді, за законом нуля і одиниці Колмогорова, наприклад, абсциси збіжності випадкового ряду Діріхле (відповідно, радіус збіжності випадкового степеневого ряду) є майже напевне сталими. Поряд з цим випадок загальних випадкових рядів, як степеневих, так і Діріхле, у яких послідовність показників є послідовністю незалежних випадкових величин, або обидві послідовності коефіцієнтів і показників одночасно, залишались практично зовсім не дослідженими.

Перший розділ дисертації містить огляд основних результатів попередників за темою дисертаційного дослідження, а також опис основних результатів даного дисертаційного дослідження.

У другому розділі дисертації містяться 4 підрозділи. У першому підрозділі проведені дослідження абсцис збіжності рядів Діріхле здовільною послідовністю попарно різних невід'ємних показників. При цьому, наскільки це взагалі є можливим, у своєму дослідженні ми уникаємо яких би то не було апріорних умов, крім умови, що множина існування максимального члена ряду є непорожньою, іншими словами, що існують точки, в яких виконується необхідна умова збіжності ряду – прямування загального члена ряду до нуля. Всі доведені тут твердження для зручності формулюються і доводяться для випадкових рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами і показниками, хоча частина з них є фактично новими твердженнями для детермінованих рядів Діріхле з довільною послідовністю попарно різних невід'ємних показників. Підрозділ 2.2 по-суті є логічним продовженням попереднього підрозділу. Тут реалізовано таку схему дослідження абсцис збіжності рядів Діріхле з випадко-

вими показниками, що є сумою елементів числової послідовності і послідовності випадкових величин, і випадковими коефіцієнтами, утвореними у вигляді добутків елементів числової послідовності і послідовності випадкових величин. Доведена тут теорема 2.1 пов'язує випадкову абсцису збіжності випадкового ряду з абсцисою абсолютної збіжності детермінованого ряду Діріхле, утвореного з квадратів детермінованих елементів початкового випадкового ряду, а теорема 2.2 пов'язує абсцису абсолютної збіжності випадкового ряду з абсцисою абсолютної збіжності детермінованого ряду Діріхле, утвореного з тих самих, що і у випадку теореми 2.1. детермінованих елементів початкового випадкового ряду. Твердження такого вигляду в літературі не мають попередників. Підрозділ 2.3 присвячено опису абсцис збіжності випадкових рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами спеціального, описаного вище вигляду, і випадковими показниками, в термінах обмежень, які накладаються на функції розподілу попарно незалежних випадкових показників. Всі з доведених тут теорем 2.5 – 2.10 є новими і не мають попередників та є аналогами тверджень, встановлених у 2015 р. (О.Б. Скасків і Л.О.Шаповаловська) в термінах обмежень на функції розподілу попарно незалежних випадкових коефіцієнтів у випадку випадкових рядів з монотонно зростаючою послідовністю показників. У підрозділі 2.4 в термінах обмежень, що накладаються на функції розподілу випадкових коефіцієнтів, описано випадкові R-порядки і R-типи зростання. Власне, у теоремі 2.11 встановлено критерій того, що випадковий R-порядок зростання $\rho_F(\omega)$ дорівнює довільному наперед заданому значенню $\rho \in [0, +\infty]$.

Розділ 3 присвячено дослідженню областей збіжності випадкових кратних рядів Діріхле як з випадковими коефіцієнтами (підрозділ 3.1), так і з випадковими показниками (підрозділ 3.2). Отримані тут теореми 3.1 і 3.2 мають характер критеріїв, а за формою, є поді-

бними на відповідні теореми для рядів Діріхле від однієї змінної, як встановлені у попередньому розділі, так і, згадані вище результати Скасківа-Шаповаловської.

Ключові слова: аналітична функція, випадкові ряди Діріхле, кратні ряди Діріхлне, абсциса збіжності, функції розподілу, незалежні випадкові змінні, R - порядок зростання, R - тип зростання .

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2017. – Вип.84. – С.96–112.
2. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv O.Yu. *On the convergence of Dirichlet series with random exponents* // Int. Journal of Appl. Math. – 2017. – V.30, №3. – P.229–238.
3. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками і коефіцієнтами* // Буковинський матем. журн. – 2017. – Т.5, №3—4. – С.90–97.
4. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Абсциси збіжності випадкових кратних рядів Діріхле* // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2018. – № 1(42). – С.1—11.
5. Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Про зростання випадкових цілих рядів Діріхле* // Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 2018. – Вип.85. – С.66—82.
6. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. *On the convergence of random multiple Dirichlet series* // Mat. Stud. – 2018. – V.49, №2. – P.122–137

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ, ЯКІ ДОДАТКОВО ВІДОБРАЖАЮТЬ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv O.Yu. *On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random pairwise independent exponents* // ArXiv:1703.03280v1[math.CV]
12 Mar 2017. – 12 p.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Stasiv N., Skaskiv O. On the growth of the entire Dirichlet series of several variables // Міжнародна математична конф.ім. В.Я. Скоробогатька: Тези. – Міжнародна конф. (Дрогобич, 25.08—29.08.2015). — Інститут ППММ ім. Я.С.Підстригача: Львів, 2015. — С.157.
2. Stasiv N.Yu. On the growth of the Dirichlet series of several variables // Complex Analysis and Related Topics: Abstracts. – International conf. (Lviv, 30.05–4.06, 2016). – Lviv, 2016. – P. 88.
3. Kuryliak A., Skaskiv O., Stasiv N. On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random exponents // Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 р.): Тези доповідей.—Івано-Франківськ, 2017. — С.12–13.
4. Kuryliak A., Skaskiv O., Stasiv N. The abscissa of absolute convergence of Dirichlet series with random exponents // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach.- Lviv, Ukraine.- 2017.- P. 136-137.
5. Skaskiv O., Stasiv N. The abscissas of convergence of random Dirichlet series // Міжн. наук. конф. «Сучасн проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях». - Чернівці, 2018. – С.161.

ABSTRACT

Stasiv N.Yu. *Asymptotic properties of random Dirichlet series.* — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 — Mathematical analysis (111 - Mathematics), Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018.

The thesis consists of an introduction, 3 sections, conclusions, references. The introduction consists of the relevance of research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods. The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

The objects of investigations are Dirichlet series with random exponents and random coefficients and random Dirichlet series.

In this work, the object of the study is the Dirichlet series, both from the one variable, and from several variables, with random exponentes and random coefficients.

The abscissa of the convergence of random Dirichlet series is studied. Similar statements are proved about the convergence regions for random multiple Dirichlet series. In the terms of the distribution functions of random coefficients, we describe the R-order and the R-types of the growth of random entire Dirichlet series.

Investigation of the properties of analytic functions, depending on the properties of the coefficients of the functional series, which they are depicted, is one of the important directions in the theory of functions since its inception at the end of the nineteenth century. Along with this, the consideration of random analytic functions gives the researcher a powerful tool for establishing "quantity" of analytic functions with one or

other properties. Relatively well investigated are random Dirichlet series with monotonically increasing to infinity sequence of exponents or power series, the coefficients of which are formed in the form of products of elements of the numerical sequence and the sequence of independent random variables, because then, according to the zero-one law of Kolmogorov, for example, the abscissa of the convergence of the random series Dirichlet (respectively, the radius of the convergence of the random power series) are almost surely constant. Along with this, the case of common random series, both power and Dirichlet, in which the sequence of exponents is a sequence of independent random variables, or both sequences of coefficients and indicators at the same time, remained virtually unexplored.

The first section of the dissertation contains an overview of the main results of the predecessors on the topic of the dissertation research, as well as a description of the main results of this dissertation study.

The second section of the dissertation contains 4 subdivisions. In the first subdivision studies the abscissa of the convergence of Dirichlet series with a satisfactory sequence of pairwise different exponents. At the same time, insofar as it is possible at all, in our study we avoid any a priori conditions, except that the plurality of the existence of a maximal term of a series is non-negative, in other words, there are points in which the necessary condition for the convergence of a series is satisfied – passing the common term of a row to zero. All the statements proved here for convenience are formulated and proved for random Dirichlet series with random coefficients and indices, although some of them are actually new assertions for deterministic Dirichlet series with arbitrary sequence of pairwise different exponents. Subdivision 2.2 is in essence a logical extension of the previous unit. Here is a scheme for studying the abscissa of the convergence of the Dirichlet series with random variables, which is the sum of the elements of the numerical sequence and the sequence

of random variables, and the random coefficients formed in the form of products of the elements of the numerical sequence and the sequence of random variables. The theorem 2.1 proved here implies a random abscissa of the convergence of a random series with an abscissa of absolute convergence of a deterministic Dirichlet series formed from squares of deterministic elements of the initial random series, and Theorem 2.2 binds to the abscissa of the absolute convergence of a random series with the abscissa of absolute convergence of the deterministic Dirichlet series formed by the same as in the case of Theorem 2.1. deterministic elements of the initial random series. The assertions of this kind in the literature do not have predecessors. Subsection 2.3 describes the abscissa of the convergence of random Dirichlet series with random coefficients of the special form, described above, and random variables, in terms of restrictions imposed on the function of distribution of pairwise independent random variables. All the theorems 2.5 - 2.10 proved here are new and do not have predecessors and are analogues of the assertions established in 2015 (O.B. Skaskiv and L.O.Shapovalovska) in terms of the restrictions on the function of the distribution of pairwise independent random coefficients in the case random series with a monotonically growing sequence of exponents. In Section 2.4, in terms of the restrictions imposed by the distribution function of random coefficients, random R-order and R-types of the growth are described. Actually, in Theorem 2.11, the criterion is established that the random R-order $\rho_F(\omega)$ is equal to an arbitrary predetermined value $\rho \in [0, +\infty]$.

Section 3 is devoted to the study of the domains of convergence of random multiples Dirichlet series with random coefficients (subsection 3.1) and random exponents (subsection 3.2). Theorems 3.1 and 3.2 obtained here have the character of the criteria, and in the form are similar to the corresponding theorems for the Dirichlet series of one variable, as established in the previous section, and, the above-mentioned results of

Skaskiv-Shapovalovska.

Keywords: analytic function, random Dirichlet series, abscissa of convergence, independent random variables, R-order of the growth, R-types of the growth.

LIST OF PUBLICATIONS:

1. Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. *Abscissas of convergence of Dirichlet series with random exponents* // Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. – 2017. – Issue.84. – P.96–112.
2. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. *On the convergence of Dirichlet series with random exponents* // Int. Journal of Appl. Math. – 2017. – V.30, No. 3. – P.229–238.
3. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. *About the abscissac of convergence of Dirichlet series with random exponents and coefficients* // Bukovinian Mathematical Journal – 2017. – V.5, No. 3—4. – P.90–97.
4. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. *Abscissas of convergence of multiple random Dirichlet series* // Precarpatian bulletin of the Shevchenko Scientific Society. Number. – 2018. – No. 1(42). – C.1—11.
5. Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. *About the growth of random Dirichlet series* // Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. – 2018. – Issue.85. –P.66—82.
6. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. *On the convergence of random multiple Dirichlet series* // Mat. Stud. – 2018. – V.49, No. 2. – P.122–137

LIST OF CONFERENCE ABSTRACTS:

1. Stasiv N.Yu., Skaskiv O.B. On the growth of the entire Dirichlet series of several variables // International V.Skorobohatko Math. Conf.: Drogobych, 2015. – P.157.

2. Stasiv N.Yu. On the growth of the Dirichlet series of several variables // Complex analysis ans Related topics: Abstracts. – Internat. conf. (Lviv, 30.05–4.06, 2016). – Lviv, 2016. – P. 88.
3. Kuryliak A., Skaskiv O., Stasiv N. On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random exponents // Vseukr. nauk. conf. “Contemporary. probl. probabil. theory and math. anal.” (Vorokhta, 22 – 25.02.2017): Abstracts. — Ivano-Frankivsk, 2017. — P.12–13.
4. Kuryliak A., Skaskiv O., Stasiv N. The abscissa of absolute convergence of Dirichlet series with random exponents // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach.- Lviv, Ukraine.- 2017.- P. 136-137.
5. Skaskiv O., Stasiv N. The abscissas of convergence of random Dirichlet series // International sc. conf. “Contemporary probl. math. and its applications in natur. sc. and inform. technolog”. - Chernivtsi, 2018. – P.161.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел; $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ — множина натуральних чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — множина дійсних чисел; $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$;
- $\mathbb{R}^p = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ — $p-$вимірний дійсний векторний (евклідів) простір;
- $\mathbb{R}^p_+ = \mathbb{R}_+ \times \ldots \times \mathbb{R}_+$;
- $\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел (комплексна площина);
- $\mathbb{C}^p$, $p \geq 2$ — p-вимірний векторний комплексний простір
- $\|x\| = x_1 + \ldots + x_p$, $\|x \ln x\| = x_1 \ln x_1 + \ldots + x_p \ln x_p$, $\|e^x\| = e^{x_1} + \ldots + e^{x_p}$ для $x = (x_1, \ldots, x_p)$
- $\mathbb{C}^p = \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}$ — $p-$вимірний комплексний векторний простір;
- $M(x, F) = \max\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$ — максимум модуля цілого ряду Діріхле $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $x \in \mathbb{R}$
- $\mu(x, F) = \max\{|a_n| e^{z\lambda_n} : n \geq 0\}$ — максимальний член цілого ряду Діріхле $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $x \in \mathbb{R}$
- $\rho_f = \overline{\lim\limits_{r \to +\infty}} \dfrac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}$ — величина порядку цілої функції f
- $\sigma_f = \overline{\lim\limits_{r \to +\infty}} \dfrac{\ln M_f(r)}{r^\rho}$, $\rho = \rho_f$, — величина типу цілої функції f
- $\rho_F = \overline{\lim\limits_{x \to +\infty}} \dfrac{\ln \ln M(x, F)}{x}$ — величина R -порядку цілого ряду Діріхле
- $\sigma_F = \overline{\lim\limits_{r \to +\infty}} \dfrac{\ln M(x, F)}{e^{x\rho}}$, $\rho = \rho_F$, — величина R-типу цілого ряду Діріхле
- $\mathcal{D}(\Lambda)$ — клас формальних випадкових рядів Діріхле вигляду $F(z) = F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)}$;

- $\tau(\Lambda) := \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\lambda_n}$;
- $\beta(\Lambda) := \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\lambda_n \ln \lambda_n}$;
- $\Lambda_+ = \big(\lambda_k\big)_{k=0}^{+\infty}$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$;
- $\sigma_\mu(F,\omega)$ — абсциса існування максимального члена випадкового ряду Діріхле;
- $\sigma_{\text{зб}}(F,\omega)$ — абсциса збіжності випадкового ряду Діріхле;
- $\sigma(F,\omega) = \sigma_a(F,\omega)$ — абсциса абсолютної збіжності випадкового ряду Діріхле $F_\omega(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(\omega) e^{z\lambda_n(\omega)}$

В окремих підрозділах вводяться також додаткові позначення, які дійсні лише в них.

ВСТУП

Актуальність теми. Різноманітні збіжні функціональні ряди природно виникають при спробі узагальнення властивостей алгебраїчних поліномів (а також скінченних агрегатів іншого вигляду: експоненційних поліномів, інтерполяційних поліномів і т.п.) на більш загальні класи функцій. Так, зокрема, появилося поняття аналітичної функції як функції на комплексній площині, яка в околі кожної точки зображається степеневим рядом, тобто, як рівномірна на компакті границя поліномів (часткових сум ряду Тейлора). Вони стали засобом введення в розгляд так званих трансцендентних функцій, у тому числі тих, які у даний час називають елементарними ([1, с.5]). М.А.Євграфов у вступі до свого огляду ([1, с.5-6]) зазначає також, що за їх допомогою були знайдені розв'язки як звичайних диференційних рівнянь, так і в частинних похідних, а багато абстрактних розділів математики (наприклад, функціональний аналіз) виникли і розвивались заради дослідження рядів. При цьому протягом всього існування теорії функціональних рядів розвивалися два взаємно пов'язаних напрямки досліджень: обгрунтування властивостей рядів (зокрема дослідження областей їхньої збіжності) і пошук їх застосувань до задач з різноманітних розділів математики (зокрема, дослідження асимптотичних властивостей аналітичних функцій в залежності від властивостей елементів рядів, якими вони зображаються).

Дослідження властивостей аналітичних функцій в залежності від властивостей коефіцієнтів функціюнальних рядів, якими вони зображаються, є одним з важливих напрямів у теорії функцій від початку її виникнення наприкінці XIX ст. Поряд з цим, розгляд випадкових аналітичних функцій дає в руки дослідника потужний інструмент встановлення "кількості" аналітичних функцій

з тими чи іншими властивостями. Відносно добре дослідженими є випадкові ряди Діріхле чи степеневі ряди, коефіцієнти яких утворюють послідовність незалежних випадкових величин, бо тоді, за законом нуля і одиниці Колмогорова, наприклад, абсциси збіжності випадкового ряду Діріхле (відповідно, радіус збіжності випадкового степеневого ряду) є майже напевне сталими. Разом з цим виникає питання про можливість обчислення цієї сталої за коефіцієнтами і показниками відповідного випадкового ряду Діріхле. У випадку детермінованих степеневих рядів радіус їхньої збіжності обчилюється за формулою Коші-Адамара, а у випадку детермінованих рядів Діріхле $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{z\lambda_k}$ з монотонно зростаючою до нескінченності послідовністю показників $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ таких, що $\tau(\Lambda_+) := \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \ln k/\lambda_k = 0$ – за формулою Валірона. При цьому вже для степеневих рядів Е.Борель висловив припущення (1896) про те, що коло збіжності майже напевне є природною межею аналітичності суми ряду у тому сенсі, що майже для всіх степеневих рядів їхню суму не можна безпосередньо аналітично продовжити ні через одну точку кола збіжності. Це припущення пізніше у строгому вигляді сформулював і довів Г.Штейнгауз (1929). При цьому у нього випадкова аналітична функція – це функція, яка отримується зі звичайного степеневого ряду зі скінченним і відмінним від нуля радіусом збіжності після почленного домноження кожного коефіцієнта цього ряду на елементи деякої послідовності (послідовності Штейнгауза) $\mathcal{H} = (e^{i2\pi\eta_n(\omega)})$, де $(\eta_n(\omega))$ – послідовність незалежних рівномірно розподілених на відрізку $[0,1]$ дійсних випадкових величин. У подальшому виявилось, що є випадкові степеневі ряди у яких коефіцієнти є послідовністю незалежних випадкових величин загального вигляду і з єдиною особливою точкою на колі збіжності, які після додавання до них деякого детермінованого степеневого ряду отримують м.н. більший радіус збіжності, а коло збіжності

нового ряду стає природною межею аналітичності для його суми. У цьому зв'язку Блекуел (див. [45, с.38]) висловив припущення, що в загальному є лише ці дві можливості, або для степеневого ряду м.н. коло збіжності є природною межею аналітичності його суми, або після додавання деякого детермінованого ряду таким стає коло більшого радіуса для суми нового ряду.

У статтях [28, 47] для послідовності незалежних випадкових величин $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$, зокрема, узагальнювалось на клас випадкових рядів Діріхле з показниками $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ твердження гіпотези Блекуела, для випадкових степеневих рядів доведеної Риль-Нарджевським в [46]. Крім цього, в [28, 48] для рядів Діріхле $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k e^{z\lambda_k}$ з $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, таких, що $\tau(\Lambda_+) < +\infty$, $0 < c_1 \le |Z_k(\omega)| \le c_2 < +\infty$ м.н. і математичним сподіванням $\mathbf{E}Z_k = 0$ $(k \ge 0)$, доведено, що $\sigma_{\text{зб}}(F, \omega) \le \sigma_a(F, \omega) + \tau(\Lambda)/2$ м.н., а у статті [48] те ж саме доведено у випадку послідовності показників $\lambda_k = \ln(k+1)$ і системи $(Z_k(\omega))$, такої, що $Z_{m\cdot n}(\omega) = Z_m(\omega) \cdot Z_n(\omega)$ $(\forall m, n \in \mathbb{N}, \forall \omega)$ (у цьому випадку $\tau(\Lambda_+) = 1$). У статтях [9, 10] результати з [28] переносились на випадкові кратні ряди Діріхле з векторною послідовністю покомпонентно монотонно зростаючих і невід'ємних показників.

У деяких випадках після статей Риль-Нарджевського (1953) і П.В.Філевича (2003), сукупну незалежність коефіцієнтів вдається замінити на властивість, що послідовність коефіцієнтів утворює мультиплікативну систему, зокрема, одна з властивостей якої, що елементи системи мають нульові середні. Остання вимога, як встановив у 1996 році Філевич, відповідаючи на запитання проф. М.М. Шеремети, є в деяких питаннях принциповою. О.Б.Скасків і Л.О.Шаповаловська (2015, [26, 27]) описували розподіл абсцис збіжності випадкових рядів Діріхле з показниками Λ_+ і з послідовністю випадкових коефіцієнтів загального вигляду в термінах вла-

стивостей послідовності функцій розподілу їхніх абсолютних величин. Зазначимо, що Л. Арнольд (1966, [52, 53]) досліджував умови збіжності випадкових лакунарних стеневих рядів з коефіцієнтами $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ такими, що $(Z_k(\omega))$ є послідовністю одинаково розподілених випадкових величин. К. Ротерс (1990, [54]) помітив, що радіси збіжності випадкових степеневих рядів можна досліджувати з попарно незалежними коефіцієнтами. У ряді статей Т. Фанжі (1998-2000, [12, 13]) були розглянуті питання про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами.

З огляду на сказане, не повинно виникнути сумнівів в актуальності дослідження розподілу абсцис збіжності рядів Діріхле у випадках, що раніше не розглядалися. Зокрема, опису розподілу абсцис збіжності випадкових рядів Діріхле, як з лише випадковими показниками, так і у випадку випадкових коефіцієнтів і показників в термінах властивостей послідовності функцій розподілу випадкових показників відповідного ряду. Те ж саме стосується дослідження областей збіжності випадкових кратних рядів Діріхле. З цієї ж точки зору цікавим є дослідити розподіл R-порядків випадкових рядів Діріхле в термінах функцій розподілу їхніх випадкових компонент.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Львівського національного університету імені Івана Франка.

Дисертаційна робота є складовою частиною досліджень за держбюджетною темою Мг–145Ф "Нові комплексно–ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами" (номер держреєстрації 0113 U 003051).

Мета й завдання дослідження. *Мета дослідження* — встановлення нових результатів в термінах функцій розподілу випадкових компонент випадкових рядів Діріхле про опис абсцис збіжності та R-порядків їхнього зростання, а також областей збіжності випадкових кратних рядів Діріхле.

Об'єкт дослідження: ряди Діріхле від однієї та багатьох змінних з випадковими показниками та коефіцієнтами.

Предмет дослідження: абсциси збіжності і R-порядки зростання випадкових рядів Діріхле та області збіжності кратних рядів Діріхле.

Завдання дослідження:

1) В термінах функцій розподілу випадкових попарно незалежних показників ряду Діріхле отримати оцінки абсцис його збіжності;
2) Дослідити абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з випадковими показниками та випадковими коефіцієнтами;
3) В термінах функцій розподілу випадкових компонент рядів Діріхле описати R-порядки їхнього зростання;
4) В термінах функцій розподілу випадкових коефіцієнтів описати області збіжності випадкових кратних рядів Діріхле;

Методи дослідження: Для розв'язання поставлених задач використовуються методи математичного і комплексного аналізу, теорії функцій, теорії ймовірностей, а також деякі ідеї і підходи з досліджень, які виконали О.Ю. Задорожна, О.Б. Скасків, П.В. Філевич, Л.О. Шаповаловська, L. Arnold, T. Fanji, K. Roters.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. У роботі вперше отримано такі результати:

1) Вперше в термінах функцій розподілу випадкових попарно незалежних показників ряду Діріхле отримано оцінки абсцис його збіжності;
2) Вперше досліджено абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з випадковими показниками та випадковими коефіцієнтами;
3) Вперше в термінах функцій розподілу випадкових компонент рядів Діріхле описані R-порядки їхнього зростання;
4) Вперше в термінах функцій розподілу випадкових коефіцієнтів описано області збіжності випадкових кратних рядів Діріхле;

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть бути застосованими у подальших дослідженнях в теорії аналітичних функцій та в інших галузях математики.

Особистий внесок здобувача. Зі статей, виконаних у співавторстві, у дисертацію включені з повними доведеннями лише результати, які належать авторові дисертації. Доведення кількох тверджень допоміжного характеру, отриманих співавторами здобувача, наводяться для повноти картини у рукописі дисертації з люб'язного дозволу співавторів. У статтях, виконаних у співавторстві, науковому керівнику належать постановки задач і загальна ідея застосування уточненої другої частини леми Бореля-Кантелі для отримання результатів в термінах обмежень на відповідні функції розподілу – випадкових коефіцієнтів чи випадкових показників. А.О. Куриляку належать: у статті [16] остаточні варіанти доведень наслідків 10 і 13 (Corollary 10, 13), у статті [17] – Твердження 5, у статті [20] – Твердження 1.4, а у статті [21] – Твердження 10

(Proposition 10), та в однаковій мірі всім авторам статті доведення Твердження 7 (Proposition 7). Решта тверджень з вказаних праць належать здобувачці.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на таких міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях та наукових семінарах:

1) Міжнародній математичній конф.ім.В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 25.08—29.08.2015);
2) Міжнародній конференції "Complex analysis and related topics" (Львів, 30.05–4.06.2016);
3) Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22.02-25.02.2017);
4) Міжнародній конференції з функціонального аналізу присвяченій 125-річчю Стефана Банаха (Львів, 18–23.09.2017);
5) Міжнародній наук. конф. Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях, присв. 50-річчю ф-ту мат. та інформ. (Чернівці, 17-19 вересня 2018);
6) науковому семінарі з теорії потенціалу та застосувань у Львівському національному університеті ім. Івана Франка (керівники проф. О. Б. Скасків, доктор фіз.-мат. наук І. Е. Чижиков, 2016-2018);
7) львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. А.А. Кондратюк і проф. О. Б. Скасків, 2015, тепер – проф. О. Б. Скасків, проф. І.Е. Чижиков, проф. М.В. Заболоцький, проф. П.В. Філевич у 2017-2018);
8) науковому семінарі з теорії функцій у Дрогобицькому державному педуніверситеті ім. І. Франка (керівник проф. Б. В. Винницький, 2019).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 12 статтях і наукових повідомленнях, з яких 6 ([16–21]) — у виданнях з переліку видань, у яких слід опублікувати результати дисертації; зокрема 1 ([16]) – у закордонному виданні, 2 ([16, 21]) у виданнях, відображених в Scopus і 5 у тезах конференцій різного рівня.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, 3 розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 152 ст. Список використаних джерел містить 80 найменувань та займає 8 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ВИХІДНІ ПОЛОЖЕННЯ, ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНІ НАПРЯМКИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У цьому розділі зробимо огляд результатів, які як безпосередньо стосуються результатів дисертації, так і є причетними до виникнення постановок конкретних задач, що розглядаються у ній, а також наведемо огляд основних результатів дисертаційної роботи.

1.1 Огляд відомих результатів, які відносяться до тематики дисертаційного дослідження

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — ймовірнісний простір, тобто, $\mathcal{A}$ – σ-алгебра підмножин Ω, а $\mathbf{P}$ – зліченно-адитивна ймовірнісна міра на $\mathcal{A}$. Крім цього, нехай $\Lambda = \big(\lambda_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ та $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$, відповідно, послідовності невід'ємних та комплекснозначних випадкових величин на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Нехай також $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ позначає числову послідовність таку, що $0 \le \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow +\infty$ $(1 \le k \uparrow +\infty)$.

Через $\mathcal{D}(\Lambda)$ позначимо клас формальних випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F_\omega(z) = F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega).$$

При фіксованому $\omega = \omega_0$ він є звичайним (детермінованим) формальним рядом Діріхле. Нехай

$$\mathcal{D} := \bigcup_{\Lambda} \mathcal{D}(\Lambda),$$

а $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ – підклас рядів з класу $\mathcal{D}$ з фіксованою послідовністю показників Λ_+, тобто, рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами і монотонно зростаючою необмеженою послідовністю показників.
Позначимо $\sigma_{\text{зб}}(F, \omega)$, $\sigma(F, \omega) = \sigma_a(F, \omega)$, $\sigma_u(F)$ і $\sigma_b(F)$ – відповідно абсциси збіжності, абсолютної збіжності, рівномірної збіжності

і обмеженості цього ряду; $\sigma_\mu(F,\omega)$ – абсциса існування максимального члена тряду Діріхле. Крім цього, у випадку детермінованих рядів Діріхле, тобто, рядів з послідовністю невід'ємних показників і числовою послідовністю коефіцієнтів писатимемо $\sigma_{\text{зб}}(F)$, $\sigma(F)$, $\sigma_\mu(F)$ замість $\sigma_{\text{зб}}(F,\omega)$, $\sigma(F,\omega)$, $\sigma_\mu(F,\omega)$.
Позначимо

$$\tau(\omega,\Lambda) := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n(\omega)},$$

а для послідовності дійсних чисел $\Lambda = (\lambda_k)$

$$\tau(\Lambda) := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}.$$

Для класичних рядів Діріхле (рядів Діріхле з показниками $\lambda_n = \ln(n+1)$) Г. Бор у статті [56] отримав рівність абсцис рівномірної збіжності і обмеженості суми

$$\sigma_u(F) = \sigma_b(F).$$

У статті [57] доведено, що

$$\sigma_u(F) \le \sigma(F) + 1/2,$$

а у статті [58] встановлено точність сталої $1/2$ у цій нерівності.

У випадку $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ доведення нерівності

$$\sigma(F) \le \sigma_u(F) \le \sigma_b(F),$$

знаходимо в [58], [40, с. 132].
Для $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ виконуються нерівність Ж. Валірона

$$\sigma_{\text{зб}}(F) \le \sigma(F) + \tau(\Lambda_+)$$

(див. [59, p. 9], [60], [40, с. 114–115], [24], [25, с. 13]), а також нерівність ([58, p. 621], [40, с. 132])

$$\sigma_b(F) \le \sigma(F) + \tau(\Lambda_+)/2.$$

Остання нерівність є точною. У випадку $\tau(\Lambda_+) = 0$ звідси, зокрема, випливає, що

$$\sigma(F) = \sigma_u(F) = \sigma_b(F) = \sigma_{\text{зб}}(F).$$

Відомо також ([24, 40, 42, 43]), що для ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ вигляду $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k e^{z\lambda_k}$

$$\sigma(F) \le \sigma_{\text{зб}}(F) \le \alpha_0 := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k|}{\lambda_k} \le \sigma(F) + \tau(\Lambda_+),$$

У ряді статей [12, 13, 27, 28, 46–48] розглядалось питання про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з класу $\mathcal{D}$, коли послідовність $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ є зростаючою послідовністю додатних чисел і $0 = \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \to +\infty$ $(1 \le k \to +\infty)$ і $\tau(\Lambda_+) < +\infty$.

Якщо послідовність $\mathbf{f}$ є послідовністю незалежних випадкових величин $(f_k(\omega))$, то за законом нуля і одиниці Колмогорова ([45, с.43]) випадкова величина $\sigma(F, \omega)$ є майже напевно (м.н.) сталою, тобто, $\sigma(F, \omega) = \sigma \in [0, +\infty]$ м.н.

У роботах [13, 28, 47, 48] розглянуто питання про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з класу $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ при $\tau(\Lambda_+) < +\infty$. Так, у статті [13, Theorem 1] доведено, що за умов $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, $\tau(\Lambda_+) < +\infty$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \dfrac{-\ln|a_k|}{\lambda_k} = +\infty$, якщо для математичних сподівань виконується

$$(\exists \alpha > 0)\colon \ \sup\{\mathbf{E}|Z_k|^\alpha \colon k \ge 0\} < +\infty, \tag{1.1}$$

то $\sigma_a(F, \omega) = +\infty$ м.н. Якщо додатково виконується $\varlimsup\limits_{k\to+\infty} k/\lambda_k < +\infty$ (звідси слідує, що $\tau(\Lambda_+) = 0$) і

$$(\exists \beta > 0)(\forall k \ge 0)\colon \ \mathbf{E}|Z_k|^{-\beta} < +\infty, \tag{1.2}$$

то ([13, Theorem 3]) з умови $\varliminf\limits_{k\to+\infty}\dfrac{-\ln|a_k|}{\lambda_k}=0$ випливає, що $\sigma_a(F,\omega)=0$ м.н. Оскільки за нерівністю Маркова при $\gamma=\max\{2/\alpha,2/\beta\}$ з умов (1.1) і (1.2) випливає, що

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}\{\omega\colon |Z_k(\omega)|\geq k^{\gamma}\}\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathbf{E}|Z_k(\omega)|^{\alpha}}{k^2}<+\infty,$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}\{\omega\colon |Z_k(\omega)|^{-1}\geq k^{\gamma}\}\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathbf{E}|Z_k(\omega)|^{-\beta}}{k^2}<+\infty,$$

то за лемою Бореля-Кантелі отримаємо, що м.н. для всіх достатньо великих k виконуються нерівності $k^{-\gamma}\leq|Z_k(\omega)|<k^{\gamma}$, $\gamma>0$. У загальному випадку те ж саме правильне за умови

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k}=0\ \text{ м.н.} \tag{1.3}$$

Так, у статті [27] наведено таке твердження.

Твердження 1.1 ([27]). *Нехай $F\in\mathcal{D}(\Lambda_+)$ і має коефіцієнти вигляду $f_k(\omega)=a_kZ_k(\omega)$.*
1^0. *Якщо виконуються умови $\tau(\Lambda_+)=0$ і (1.3), то м.н.*

$$\sigma_{зб}(F,\omega)=\sigma(F,\omega)=\alpha_0\overset{def}{=}\varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k}.$$

2^0. *У випадку $\alpha_0=+\infty$ для рівності $\sigma(F,\omega)=+\infty$ м.н. достатньо, щоб замість умови $\tau(\Lambda_+)=0$ виконувалось $\tau(\Lambda_+)<+\infty$, а замість умови (1.3), щоб*

$$\varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k}>-\infty\ \text{ м.н.} \tag{1.4}$$

З Твердження 1.1, зокрема випливають цитовані вище теореми 1 (при $\alpha_0=+\infty$) і 3 (при $\alpha_0=0$) з [13].

У працях [28,47] для послідовності незалежних випадкових величин $\mathbf{f}=(f_k(\omega))$, зокрема, узагальнювалось на клас $\mathcal{D}(\Lambda)$ твердження відомої гіпотези Блекуела для випадкових степеневих рядів,

доведеної в [46] (див. також [45, с.38]). Крім цього, в [28, 48] для $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, $\tau(\Lambda_+) < +\infty$, $0 < c_1 \le |Z_k(\omega)| \le c_2 < +\infty$ м.н. і $\mathbf{E}Z_k = 0$ $(k \ge 0)$, доведено, що $\sigma_{зб}(F,\omega) \le \sigma_a(F,\omega) + \tau(\Lambda_+)/2$ м.н., а у статті [48] те ж саме доведено у випадку послідовності показників $\lambda_k = \ln(k+1)$ і системи $(Z_k(\omega))$ такої, що $Z_{m\cdot n}(\omega) = Z_m(\omega)\cdot Z_n(\omega)$ $(\forall m,n \in \mathbb{N}, \forall\omega)$ (у цьому випадку $\tau(\Lambda_+) = 1$).

У статтях [9, 10] результати з [28] переносились на випадкові кратні ряди Діріхле.

У статті [27] відзначається, що за достатньою умовою збіжності послідовності випадкових величин до нуля м.н., для того, щоб виконувалась умова (1.3) достатньо, щоб

$$(\forall\varepsilon > 0)\colon \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k^*((1+\varepsilon)^{\lambda_k}) + F_k^*(e^{-\varepsilon\lambda_k})\Big) < +\infty,$$

де $F_k^*(x) := \mathbf{P}\{\omega\colon |Z_k(\omega)| < x\}$ — функція розподілу $|Z_k(\omega)|$.
У загальному випадку рядів з класу $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ у статті [27] в термінах подібних обмежень на функції розподілу, встановлено умову (що виявлятиметься і у певному сенсі близькою до необхідної), яка гарантує, що абсциса збіжності ряду Діріхле $F(z,\omega)$ м.н. дорівнює наперед заданому дійсному числу. Власне, в [27] доведено такі теореми, які ідейно є найближчими до основних тверджень дисертаційної роботи.

Теорема 1.1 ([27]). *Нехай виконується умова $\tau(\Lambda_+) = 0$ і $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$. Припустимо, що $\big(|f_k(\omega)|\big)$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $\Phi_k(x) \overset{def}{=} \mathbf{P}\{\,\omega : |f_k(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \ge 0$. Виконуються наступні твердження:*
a) $\sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \ge \rho \in (-\infty,+\infty)$ *м.н.* $\Longrightarrow (\forall\varepsilon > 0)\colon \sum_{k=2}^{+\infty}(1 - \Phi_k((e^{-\rho}+\varepsilon)^{\lambda_k})) < \infty$;
b) *Якщо існує послідовність (δ_k) така, що $\delta_k > -\infty$ $(k \ge 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \delta_k = e^{-\rho}$, $\rho \in (-\infty,+\infty]$, і $\sum_{k=2}^{+\infty}(1 - \Phi_k(\delta_k^{\lambda_k})) = +\infty$, то $\sigma(F,\omega) \le \rho$ м.н.*

Теорема 1.2 ([27]). *Нехай виконується умова* $\tau(\Lambda_+) = 0$ *і* $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$.
a) *Якщо існують* $\rho \in (-\infty, +\infty)$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ *і* $\sum_{k=2}^{+\infty}(1 - \Phi_k((e^{-\rho} + \varepsilon_k)^{\lambda_k})) < \infty$, *то* $\sigma(F, \omega) \geq \rho$ *м.н.*
b) $\sigma(F, \omega) = -\infty$ *м.н.* $\Longrightarrow (\forall E > 1)\colon \sum_{k=2}^{+\infty}(1 - \Phi_k(E^{\lambda_k})) = +\infty$.

Твердження цих теорем можна переформулювати для випадкових степеневих рядів вигляду

$$f(z) = f(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) z^{m_k} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega),$$

де $\mathbf{m} = \big(m_k\big)_{k=0}^{+\infty}$ – зростаюча до нескінченності послідовність цілих чисел $m_k \in \mathbb{Z}_+$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$. При цьому $(|f_k(\omega)|)$ є попарно незалежні і, взагалі кажучи, не є однаково розподілені випадкові величини. Випадок, коли $(|f_k(\omega)|)$ – однаково розподілені незалежні випадкові величини розглянуто для послідовності $m_k = k$ $(k \geq 0)$ в [52], для довільної послідовності $\mathbf{m} = (m_k)$ в [53], а випадок попарно незалежних випадкових величин $(|f_k|)$ та $m_k = k$ $(k \geq 0)$ розглянуто в [54].

Зазначимо, що базисність системи експонент $\left\{e^{it\lambda_k(\omega)}\right\}$ з послідовністю незалежних в алгебраїчному сенсі показників $\lambda_k(\omega)$ розглядав Є.Нікішін в [55], а ряди Діріхле з випадковими показниками $(\lambda_k(\omega))$ і навіть лише з детермінованими коефіцієнтами $\mathbf{f} = (f_k)$, $f_k \in \mathbb{C}$, $k \geq 0$ раніше не розглядалися зовсім. Вкажемо лише на те, що у статті [49] розглянуто степеневі ряди вигляду

$$\sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} z^{X_k(\omega)},$$

де $(X_k(\omega))$ є строго зростаючим цілочисельним стохастичним процесом, зокрема, таким, що $X_k(\omega) = X_{k-1}(\omega) + \xi_k(\omega)$ $(k \geq 1)$, де $X_0(\omega) = 0$ м.н., а $(\xi_k(\omega))$ – послідовність додатних одинаково розподілених незалежних випадкових величин $\xi_k(\omega)\colon \Omega \to \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$.

Області збіжності кратних рядів Діріхле з показниками Λ_+^p досліджувались у статтях [2–10]. У випадку $p = 2$ А.І. Янушаускас ([5]) (у статті [8] відзначається, що загальний випадок класу $\mathcal{D}^p(\Lambda_+^p)$, $p \geq 2$, розглядається цілком подібно) серед іншого довів: *якщо кратний ряд Діріхле з показниками Λ_+^p збіжний в околі точки $(\sigma_1^0 + it_1^0, ..., \sigma_p^0 + it_p^0) \in \mathbb{C}^p$, то він збіжний у прямому добуткові півплощин $\mathbf{\Pi}_{\sigma^0} = \{z_1 \colon \mathrm{Re}\ z_1 < \sigma_1^0\} \times \ldots \times \{z_p \colon \mathrm{Re}\ z_p < \sigma_p^0\}$, при цьому збіжність є рівномірною на кожному компакті з цього прямого добутку.*

У статті [44] отримане певне узагальнення твердження про умови, за яких правильна формула Валірона для знаходження абсциси збіжності ряду Діріхле від однієї змінної. Також досліджено зв'язок між абсцисою збіжності і абсцисою існування максимального члена ряду Діріхле (див. [24, 25]). У статті [8] отримано $p-$ вимірний ($p \geq 2$) аналог твердження з [44] (випадок $p = 2$ розглянуто в [7]).

За подальшими коментарями стосовно результатів інших авторів відсилаємо читача до відповідних підрозділів цієї дисертаційної роботи.

1.2 Основні напрямки та результати дослідження

Введемо такі позначення. Через $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ позначаємо, відповідно, множини дійсних, комплексних, натуральних і цілих чисел, а $\mathbb{R}_+ \stackrel{def}{=} [0, +\infty)$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для $x \in \mathbb{R}$ позначатимемо $\Pi_x := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z \leq x\}$ – півплощину.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — ймовірнісний простір, тобто, $\mathcal{A}$ – σ-алгебра підмножин Ω, а $\mathbf{P}$ – зліченно-адитивна ймовірнісна міра на $\mathcal{A}$. Крім цього, нехай $\Lambda = \big(\lambda_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ та $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$, відповідно, послідовності невід'ємних та комплекснозначних випадкових величин на

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Нехай також $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ позначає числову послідовність таку, що $0 \le \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow +\infty$ $(1 \le k \uparrow +\infty)$.

Через $\mathcal{D}(\Lambda)$ позначимо клас формальних випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F_\omega(z) = F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega) \tag{1.5}$$

При фіксованому $\omega = \omega_0$ він є звичайним (детермінованим) формальним рядом Діріхле. Нехай

$$\mathcal{D} := \bigcup_{\Lambda} \mathcal{D}(\Lambda),$$

а $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ – підклас рядів з класу $\mathcal{D}$ з фіксованою послідовністю показників Λ_+, тобто, рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами і монотонно зростаючою необмеженою послідовністю показників. При цьому вважатимемо, що означення класу $\mathcal{D}$ містить умову, що для кожного ряду F_ω вигляду (1.5) з класу $\mathcal{D}$ і для кожного ω існує $x_1 = x_1(\omega) = x_1(F_\omega) < 0$ таке, що

$$f_k(\omega) e^{x_1 \lambda_k(\omega)} \to 0 \quad (k \to +\infty) \text{ м.н.}$$

Позначимо $\sigma_{\text{зб}}(F, \omega)$, $\sigma(F, \omega) = \sigma_a(F, \omega)$ – відповідно абсциси збіжності, абсолютної збіжності, рівномірної збіжності і обмеженості цього ряду; $\sigma_\mu(F, \omega)$ – абсциса існування максимального члена ряду Діріхле. Власне, при фіксованому $\omega \in \Omega$ визначимо їх наступними рівностями:

$$\sigma_{\text{зб}}(F, \omega) := \sup\{x\colon \text{ ряд (1.5) збіжний у півплощині } \Pi_x\},$$

$$\sigma(F, \omega) := \sup\{x\colon \text{ ряд (1.5) абсолютно збіжний у півплощині } \Pi_x\},$$

а вслід за П.В.Філевичем[3], $\sigma_\mu(F, \omega)$ визначимо рівністю

$$\sigma_\mu(F, \omega) := \sup\{\sigma\colon (\forall x < \sigma)[f_k(\omega) e^{x\lambda_k(\omega)} \to 0\ (k \to +\infty)]\}.$$

Крім цього, у випадку детермінованих рядів Діріхле, тобто, рядів з послідовністю невід'ємних показників і числовою послідовністю коефіцієнтів писатимемо $\sigma_{\text{зб}}(F)$, $\sigma(F)$, $\sigma_\mu(F)$ замість $\sigma_{\text{зб}}(F, \omega)$,

$\sigma(F,\omega)$, $\sigma_\mu(F,\omega)$.
Позначимо

$$\tau(\omega,\Lambda) := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n(\omega)}$$

і $\tau(\Lambda) := \tau(\omega,\Lambda)$ для послідовності дійсних чисел $\Lambda = (\lambda_k)$.

У цьому розділі спочатку доведено ряд тверджень про співвідношення між різними абсцисами збіжності рядів Діріхле вигляду (1.5). Характерними тут є такі твердження.

Твердження 2.2. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ має вигляд* (1.5) *і* $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) := \lambda(\omega) > 0$ *м.н. Тоді*

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} \quad \text{м.н.}$$

Твердження 2.6. *Нехай $F \in \mathcal{D}$, має вигляд* (1.5) *і* $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) > 0$ *м.н. Якщо для довільних функцій $\gamma, \delta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ і всіх $\omega \in \Omega$ таких, що $\gamma(\omega) \geq 0$ м.н. виконується умова*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty, \tag{1.6}$$

то м.н. виконуються нерівності

$$\sigma(F,\omega) \geq \gamma(\omega)\alpha_0(\omega) - \delta(\omega) = \gamma(\omega)\sigma_\mu(F,\omega) - \delta(\omega) \geq \gamma(\omega)\sigma_{зб}(F,\omega) - \delta(\omega$$

Твердження 2.6 є ключовим при доведенні інших тверджень як з даного, так і наступного підрозділу.

Варто зауважити, що для рядів Діріхде з послідовністю показників Λ_+, твердження 2.6 доведене в [24] (див. також [25]) . А для рядів Діріхле з монотонно зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників Λ_+ в статті [44] нерівності з Твердження 2.6 фактично доведені за умови

$$h(\gamma,\delta,\omega) \stackrel{def}{=} \varliminf_{k\to\infty} \frac{(\gamma(\omega)-1)\ln|f_k(\omega)| + \delta(\omega)\lambda_k(\omega)}{\ln k} > 1,$$

з якої умова (1.6) випливає, а навпаки, в загальному, імплікації нема.

Другий підрозділ розділу 2 присвячено дослідженню рядів Діріхле з випадковими показниками та випадковими коефіцієнтами.

Для $F \in \mathcal{D}$ вигляду (1.5) з коефіцієнтами $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$ розглянемо ряди Діріхле

$$F_3(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 e^{2x\lambda_k}, \quad F_4(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| e^{x\lambda_k}.$$

Через Θ позначимо клас послідовностей комплекснозначних випадкових величин ξ_n таких, що

$$(\exists c_j \in (0, +\infty))(\forall n)\colon \quad c_1 \le |\xi_n(\omega)| \le c_2 \text{ м.н.}$$

Через Δ позначимо клас невід'ємних випадкових величин δ_n таких, що

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\colon \quad \mathbf{E}(e^{x\delta_n}) \le C_1 = C_1(x) < +\infty.$$

З доведеного у цьому підрозділі Твердження 2.14 за допомогою теореми про три ряди отримано таке твердження про абсцису збіжності випадкового ряду.

Теорема 2.1. *Нехай* $(\xi_n) \in \Theta$, $(\delta_n) \in \Delta$, *а* $F \in \mathcal{D}$ *з коефіцієнтами* $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ *і показниками* $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k\colon k \ge 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$.

1. *Якщо* $\mathbf{E}\big(\xi_n e^{x\delta_n}\big) = 0$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *і довільного* $x \in \mathbb{R}$, $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ *– послідовність незалежних випадкових величин для кожного* $x \in \mathbb{R}$, *то* $\sigma_{зб}(F, \omega) \ge \sigma(F_3)$ *м.н.*
2. *Якщо додатково припустити, що* $(\exists C_2(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ \mathbf{E}(e^{x\delta_n}) \ge C_2(x)$, *то* $\sigma_{зб}(F, \omega) = \sigma(F_3)$ *м.н.*

Наступне твердження стосується абсциси абсолютної збіжності випадкового ряду. Якщо абсциса збіжності випадкового ряду вигляду (1.5) пов'язана з абсцисою збіжності (абсолютної) ряду F_3, то його абсциса абсолютної збіжності пов'язана з абсцисою збіжності (абсолютної) ряду F_4.

Теорема 2.2. *Нехай* $(\xi_n) \in \Theta$, $(\delta_n) \in \Delta$, *а* $F \in \mathcal{D}$ *з коефіцієнтами* $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ *і показниками* $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k \colon k \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $f_k(\omega) = a_k \xi_k(\omega)$.

1. *Якщо* $\left(\xi_k e^{x\delta_k}\right)$ *– послідовність незалежних випадкових величин для кожного* $x \in \mathbb{R}$, *то* $\sigma(F, \omega) \geq \sigma(F_4)$ *м.н.*

2. *Якщо додатково припустити, що*

$$(\forall x, x < \sigma(F, \omega))(\exists a > 0)(\forall n \geq 1) \colon \mathbf{P}\{\omega \colon |a_n| e^{x\lambda_n(\omega)} < a\} = 1$$

і $(\forall n \in \mathbb{N}) \colon |\xi_n(\omega)| = c \neq \infty$ *м.н., а також* $(\exists C_3(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}) : \ \mathbf{D} e^{x\delta_n} \geq C_3(x)$, *то* $\sigma(F, \omega) = \sigma(F_4)$ *м.н.*

У третьому підрозділі другого розділу доведено ряд тверджень для рядів Діріхле з випадковими попарно незалежними коефіцієнтами.

Зокрема, там встановлено таке твердження.

Твердження 2.15. *Нехай* $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ *і має коефіцієнти вигляду* $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. *Якщо виконуються умови* $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{\ln k}{\ln |a_k|} = 0$,

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{-\ln |Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = 0, \ \overline{\lim_{k \to \infty}} \left| \frac{\ln |Z_k(\omega)|}{\ln |a_k|} \right| \leq \delta(\omega) < 1 \text{ м.н.},$$

то м.н. $\sigma_{зб}(F, \omega) = \sigma(F, \omega) = \alpha_0^*(\omega) := \underline{\lim}_{k \to +\infty} \dfrac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)}$.

Використовуючи твердження 2.15 ми довели такі теорему 2.5 і теорему 2.6.

Теорема 2.5. *Нехай* $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ *і має вигляд* (1.5), *а її коефіцієнти мають вигляд* $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ *і виконуються умови Твердження 2.15. Припустимо, що* $\left(\lambda_k(\omega)\right)$ *— послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу*

$$\Phi_k(x) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\omega : \lambda_k(\omega) < x\}, \ x \in \mathbb{R}, \ k \geq 0.$$

Виконуються наступні твердження:

а) *i) Якщо* $\sigma(\omega) = \sigma(F, \omega) \geq \rho \in (0, +\infty)$ *м.н., то*

$$(\forall \varepsilon \in (0, \rho)) \colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \Phi_k\left(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon}\right)\right) < \infty;$$

ii)Якщо $0 \geq \sigma(\omega) = \sigma(F, \omega) \geq \rho \in (-\infty, 0]$ *м.н., то*

$$(\forall \varepsilon > 0): \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon}) < \infty;$$

b) *i) Якщо існує послідовність* (δ_k) *така, що* $\delta_k \in (-\infty, 0)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k \to +\infty} \delta_k = -\rho$, $\rho \in (0, +\infty]$, *і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - \Phi_k(\frac{\ln |a_k|}{\delta_k})\big) = +\infty,$$

то $\sigma(F, \omega) \leq \rho$ *м.н.*
ii) Якщо існує послідовність (δ_k) *така, що* $\delta_k \in (0, +\infty)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k \to +\infty} \delta_k = \rho$, $\rho \in [0, +\infty]$, *і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Phi_k(\frac{\ln |a_k|}{\delta_k}) = +\infty,$$

то $\sigma(F, \omega) \leq -\rho$ *м.н.*

Теорема 2.6. *Нехай* $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *її коефіцієнти мають вигляд* $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ *і виконуються умови Твердження 2.15. Тоді виконуються твердження:*
a) *i) Якщо існують* $\rho \in (0, +\infty)$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ *і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - \Phi_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k})\big) < +\infty,$$

то $\sigma(F, \omega) \geq \rho$ *м.н.*
ii) Якщо існують $\rho \in (-\infty, 0]$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ *і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Phi_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k}) < +\infty,$$

то $\sigma(F, \omega) \geq \rho$ *м.н.*

b) *Якщо* $\sigma(F,\omega) = -\infty$ *м.н., то* $(\forall E > 1)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \Phi_k(\frac{1}{E}\ln|a_k|) = +\infty$.

Доведення теорем 2.7 та 2.8 проведено аналогічно доведенню відповідних теорем 2.5 і 2.6.

Теорема 2.7. *Нехай* $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *її коефіцієнти мають вигляд* $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ *і виконуються умови*

$$\ln k = o(\ln|a_k|) \;\; i \;\; \ln|Z_k(\omega)| = o(\ln|a_k|) \quad (k \to +\infty) \;\; \text{м.н.}$$

Припустимо, що $\big(\lambda_k(\omega)\big)$ *— послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $\Phi_k(x) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\omega : \lambda_k(\omega) < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$. *Тоді виконуються наступні твердження:*
a) *i)* $\sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \geq \rho \in (0,+\infty)$ *м.н.* $\Longrightarrow (\forall \varepsilon \in (0,\rho))$: $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1 - \Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon})\big) < \infty$;
ii) $0 \geq \sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \geq \rho \in (-\infty,0]$ *м.н.* $\Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0)$: $\sum_{k=0}^{+\infty}\Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon}) < \infty$;
b) *i) Якщо існує послідовність* (δ_k) *така, що* $\delta_k \in (-\infty,0)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \delta_k = -\rho$, $\rho \in (0,+\infty]$, *і* $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1 - \Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k})\big) = +\infty$, *то* $\sigma(F,\omega) \leq \rho$ *м.н.*
ii) Якщо існує послідовність (δ_k) *така, що* $\delta_k \in (0,+\infty)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \delta_k = \rho$, $\rho \in [0,+\infty]$, *і* $\sum_{k=0}^{+\infty}\Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k}) = +\infty$, *то* $\sigma(F,\omega) \leq -\rho$ *м.н.*

Теорема 2.8. *Нехай* $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *її коефіцієнти мають вигляд* $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ *і виконуються умови*

$$\ln k = o(\ln|a_k|) \;\; i \;\; \ln|Z_k(\omega)| = o(\ln|a_k|) \quad (k \to +\infty) \;\; \text{м.н.}$$

Тоді виконуються наступні твердження:
a) *i) Якщо існують* $\rho \in (0,+\infty)$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ *і* $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1 - \Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k})\big) < +\infty$, *то* $\sigma(F,\omega) \geq \rho$ *м.н.*
ii) Якщо існують $\rho \in (-\infty,0]$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ *і* $\sum_{k=0}^{+\infty}\Phi_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}) < +\infty$, *то* $\sigma(F,\omega) \geq \rho$ *м.н.*
b) $\sigma(F,\omega) = -\infty$ *м.н.* $\Longrightarrow (\forall E > 1)$: $\sum_{k=0}^{+\infty}\Phi_k(\frac{1}{E}\ln|a_k|) = +\infty$.

За допомогою доведеного у цьому підрозділі Твердження 2.18, отримано теореми 2.9 і 2.10, що є повними аналогами теорем 2.7 і 2.8, у випадку, коли умови

$$\ln k = o(\ln|a_k|) \ \text{ і } \ \ln|Z_k(\omega)| = o(\ln|a_k|) \quad (k \to +\infty) \ \text{ м.н.}$$

замінити на умови

$$\tau(\omega, \Lambda) = 0 \ \text{ і } \ \lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = 0 \quad \text{м.н.}$$

У четвертому підрозділі розглянуто числові характеристики зростання випадкових рядів Діріхле. Отримано нові твердження про обчислення R-порядків і R-типів для випадкових цілих рядів Діріхле з показниками Λ_+ і коефіцієнтами вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$.

В теоремі 2.11 встановлено умови, які повинні задовольняти випадкові величини $f_k(\omega)$ для того, щоб для довільного наперед заданого $\rho \in [0, +\infty]$ виконувалась рівність $\rho_F(\omega) = \rho$ м.н.

Теорема 2.11. *Нехай* $F_\omega \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *має вигляд* $F_\omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k}$, *а* $\big(|f_k(\omega)|\big)$ *– послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $\Phi_k(x) := \mathbf{P}\{\omega\colon |f_k(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. *Якщо* $\beta(\Lambda) = \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k \ln \lambda_k} = 0$, *то:*

a) *Для того, щоб* $\rho_F(\omega) = \rho \in (0, +\infty)$ *м.н., необхідно і досить, щоб* $(\forall \varepsilon \in (0, \rho)\colon$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_k\big(e^{-\frac{1}{\rho+\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) < +\infty \ \wedge \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_k\big(e^{-\frac{1}{\rho-\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) = +\infty.$$

b) *Для того, щоб* $\rho_F(\omega) = 0$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_k\big(e^{-\varepsilon\lambda_k \ln \lambda_k} + 0\big)\Big) < +\infty.$$

c) *Для того, щоб* $\rho_F(\omega) = +\infty$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_k\big(e^{-\varepsilon\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) = +\infty.$$

Теорема 2.12, яка стосується R-типів для випадкових цілих рядів Діріхле, доводиться подібно до Теореми 2.11 з використанням Твердження 2.22.

У третьому розділі досліджуються області збіжності кратних рядів Діріхле.

Нехай $\Lambda^p = (\lambda_{(n)})_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$, де $\lambda_{(n)} = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \ldots, \lambda_{n_p}^{(p)}) \in \mathbb{R}_+^p = [0, +\infty)^p$, $(n) = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \in \mathbb{N}$. У випадку, коли $(\lambda_k^{(j)})_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $1 \le j \le p$, зростаючі до $+\infty$ послідовності невід'ємних чисел, тобто, $0 = \lambda_0^{(j)} < \lambda_k^{(j)} < \lambda_{k+1}^{(j)} \uparrow +\infty$ $(1 \le k \uparrow +\infty,\ 1 \le j \le p)$, використовуємо позначення Λ_+^p. Через $\mathcal{D}^p(\Lambda^p)$ позначимо клас формальних кратних рядів Діріхле вигляду

$$F(s) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_{(n)} \exp\{(\lambda_{(n)}, s)\}, \tag{1.7}$$

$$s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{C}^p,\ s_j = \sigma_j + it_j\ (j \in \{1, \ldots, p\}),$$

таких, що існує $\sigma \in \mathbb{R}^p$ таке, що

$$a_{(n)} \exp(\lambda_{(n)}, \sigma) \to 0 \quad (\|n\| := n_1 + \ldots + n_p \to +\infty), \tag{1.8}$$

де $(a_{(n)})$ – послідовність комплексних чисел, $(\lambda_{(n)}, s) = \lambda_{n_1}^{(1)} s_1 + \ldots + \lambda_{n_p}^{(p)} s_p$, $(n) = (n_1, n_2, ..., n_p)$.

Для $\sigma \in \overline{\mathbb{R}}^p := [-\infty, +\infty]^p$ позначимо $\mathbf{\Pi}_\sigma := \{s \in \mathbb{C}^p : \operatorname{Re} s < \sigma\}$, де $\operatorname{Re} s = (\operatorname{Re} s_1, \ldots, \operatorname{Re} s_p)$, $x = (x_1, \ldots, x_p) < b = (b_1, \ldots, b_p) \iff x_j < b_j$ $(\forall j \in \{1, \ldots, p\})$, а $x \ge b \iff x_j \ge b_j$ $(\forall j \in \{1, \ldots, p\})$.

Нехай $G_a = \{x \in \mathbb{R}^p :$ ряд (1.7) абсолютно збіжний в $\mathbf{\Pi}_x\}$. У випадку послідовності Λ_+^p область існування максимального члена визначається [8] (як множина тих $\sigma \in \mathbb{R}^p$, що $\mu(\sigma, F) = \mu(\sigma_1, \ldots, \sigma_p, F) = \max\{|a_{(n)}| \exp(\lambda_{(n)}, \sigma) \colon (n) \in \mathbb{Z}_+^p\} < +\infty$. В загальному, область існування максимального члена G_μ визначимо

як внутрішність множини тих $\sigma \in \mathbb{R}^p$, для яких виконується умова (1.8). Як і у випадку рядів Діріхле від однієї змінної проміжні твердження про опис множини існування максимального члена ряду Діріхле, становлять одну з опорних точок всієї конструкції доведень у цьому розділі. Базовими у цьому розділі є твердження 3.3, 3.10 і 3.13, а основні результати розділу містяться у Теоремах 3.1 і 3.2.

Теорема 3.1. *Нехай $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$. Припустимо, що $\big(|f_{(n)}(\omega)|\big)$ послідовність попарно незалежних випадкових величин з функцією розподілу $\Phi_{(n)}(x) := \mathbf{P}\{\omega : |f_{(n)}(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $(n) \in \mathbb{Z}_+^p$. Виконуються наступні твердження:*
a) *Для того, щоб $\sigma \in \partial G_a \cap \big(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\big)^p$ м.н., необхідно і досить, щоб $(\forall \varepsilon > 0)$:*

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}\big)\Big) < +\infty \wedge$$
$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1-\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})} + 0\big)\Big) = +\infty.$$

b) *Для того, щоб $\sigma \in \partial G_a \cap \big(-\infty, 0)^p$ м.н., необхідно і досить, щоб $(\forall \varepsilon > 0)$:*

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1-\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}\big)\Big) < +\infty \wedge$$
$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}\big)\Big) = +\infty.$$

c) *Для того, щоб $G_a = \mathbb{R}^p$ м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \Delta > 0)\colon \quad \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \big(1 - \Phi_{(n)}\big(\exp(-\Delta\|\lambda_{(n)}\|)\big)\big) < +\infty.$$

Розглянемо ряди Діріхле вигляду

$$F(s) = F_\omega(s) = F(s,\omega) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_{(n)} \exp\{(\lambda_{(n)}(\omega), s)\}, \tag{1.9}$$

де $\big(a_{(n)}\big)$ - послідовність комплексних значень, і $\Lambda^p = (\lambda_{(n)}(\omega))_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$, $\lambda_{(n)}(\omega)\colon \Omega \to \mathbb{R}_+^p$ послідовність випадкових векторів з невід'ємними випадковими компонентами на ймовірнісному просторі $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$. Через $\mathcal{D}_{ex}^p$ позначимо клас рядів Діріхле вигляду (1.9) таких, що $F_\omega \in D^p(\Lambda^p)$ м.н.

Теорема 3.2. *Нехай $F \in \mathcal{D}_{ex}$ і $\Lambda = \big(\lambda_{(n)}(\omega)\big)_{(n)\in\mathbb{Z}_+^p}$ - послідовність, така, що послідовність $\big(\|\lambda_{(n)}(\omega)\|\big)_{(n)\in\mathbb{Z}_+^p}$ - послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $\Phi_{(n)}(x) := \mathbf{P}\{\omega : \|\lambda_{(n)}(\omega)\| < x\}$, $x \in \mathbb{R}^p$, $(n) \in \mathbb{Z}_+^p$. Для того, щоб $G_a = \mathbb{R}^p$ м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(\exp(-\varepsilon \ln |a_{(n)}|)\big)\Big) < +\infty. \tag{1.10}$$

РОЗДІЛ 2. АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

2.1 Абсциси збіжності рядів Діріхле з довільними дійсними невід'ємними показниками

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — фіксований ймовірнісний простір, тобто $\mathbf{P}$ – ймовірність (зліченно-адитивна ймовірнісна міра), визначена на деякій σ-алгебрі $\mathcal{A}$ підмножин простору Ω.

Введемо такі позначення. Через $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ позначаємо, відповідно, множини дійсних, комплексних, натуральних і цілих чисел, а

$$\mathbb{R}_+ \stackrel{def}{=} [0, +\infty), \quad \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Для $x \in \mathbb{R}$ позначатимемо

$$\Pi_x := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z \leq x\}$$

– півплощину.

Нехай $\Lambda = \big(\lambda_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ та $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$, відповідно, послідовності невід'ємних та комплекснозначних випадкових величин на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Через $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ позначатимемо числову послідовність таку, що

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow +\infty \quad (1 \leq k \uparrow +\infty).$$

Через $\mathcal{D}(\Lambda)$ позначимо клас формальних випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F_\omega(z) = F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega), \tag{2.1}$$

що при фіксованому $\omega = \omega_0$ є звичайним (детермінованим) формальним рядом Діріхле. Нехай

$$\mathcal{D} := \bigcup_{\Lambda} \mathcal{D}(\Lambda),$$

а $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ – підклас рядів з класу $\mathcal{D}$ з фіксованою послідовністю показників Λ_+, тобто, рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами і монотонно зростаючою необмеженою послідовністю показників. При цьому вважатимемо, що означення класу $\mathcal{D}$ містить умову, що для кожного ряду F_ω вигляду (2.1) з класу $\mathcal{D}$ і для кожного ω існує $x_1 = x_1(\omega) = x_1(F_\omega) < 0$ таке, що

$$f_k(\omega)e^{x_1\lambda_k(\omega)} \to 0 \quad (k \to +\infty) \text{ м.н.} \tag{2.2}$$

Зауважимо, що для формального ряду Діріхле

$$\sum_{k=3}^{+\infty} ke^{z\ln\ln k}$$

такого x_1 не існує, позаяк $ke^{z\ln\ln k} \not\to 0$ при $k \to +\infty$ для кожного $z \in \mathbb{C}$.

Вслід за П.В.Філевичем ([28]), для $\omega \in \Omega$ і ряду $F \in \mathcal{D}$ вигляду (2.1) через $\sigma_\mu(F,\omega)$ позначимо абсцису існування його максимального члена, тобто,

$$\sigma_\mu(F,\omega) := \sup\{\sigma\colon (\forall x < \sigma)[f_k(\omega)e^{x\lambda_k(\omega)} \to 0 \ (k \to +\infty)]\}.$$

Через

$$\mu(x,F,\omega) := \sup\{|f_k(\omega)|e^{x\lambda_k(\omega)}\colon k \geq 0\} \quad (x < \sigma_\mu(F,\omega))$$

позначаємо максимальний член ряду (2.1). Зрозуміло, що

$$(\forall x < \sigma_\mu(F,\omega))\colon \quad \mu(x,F,\omega) < +\infty.$$

Визначимо абсциси збіжності і абсолютної збіжності $\sigma_{\text{зб}}(F,\omega)$ і $\sigma(F,\omega)$, відповідно, а також абсциси рівномірної збіжності і обмеженості $\sigma_u(F,\omega)$ і $\sigma_b(F,\omega)$, відповідно, ряду вигляду (2.1) при фіксованому $\omega \in \Omega$ наступними рівностями:

$$\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) := \sup\{x\colon \text{ ряд (2.1) збіжний у півплощині } \Pi_x\},$$

$$\sigma(F,\omega) := \sup\{x\colon \text{ ряд (2.1) абсолютно збіжний у півплощині } \Pi_x\},$$
$$\sigma_u(F,\omega) := \sup\{x\colon \text{ ряд (2.1) рівномірно збіжний у півплощині } \Pi_x\},$$
$$\sigma_b(F,\omega) := \sup\{x\colon \text{ ряд (2.1) обмежений у півплощині } \Pi_x\}$$

З теореми Веєрштрасса про рівномірно збіжні ряди аналітичних функцій випливає, що в означенні абсцис абсолютної $\sigma(F,\omega)$ і рівномірної збіжності $\sigma_u(F,\omega)$ сума F ряду (2.1) є аналітичною функцією і відповідних відкритих півплощинах. Вважатимемо також, що сума F ряду (2.1) є аналітичною у відповідних відкритих півплощинах, тобто, означення абсцис $\sigma_u(F,\omega)$ і $\sigma_b(F,\omega)$ вводимо лише для рядів Діріхле, суми яких є аналітичними функціями у відповідних відкритих півплощинах. Наприклад, $\sigma_b(F,\omega)$ – це inf множини тих x, що сума ряду (2.1) є аналітичною і обмеженою у півплощині Π_x.

Для детермінованих рядів Діріхле вживатимемо ті ж позначення, але при цьому не вживатимемо у позначенні літери ω. Наприклад, $\sigma(F)$ позначає абсцису абсолютної збіжності детермінованого ряду Діріхле F.

Позначимо також

$$\tau(\Lambda,\omega) := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k(\omega)}, \quad \tau(\Lambda_+) := \tau(\Lambda_+,\omega).$$

Зауваження 2.1. 1^0. З умови (2.2) випливає, що $\sigma_\mu(F,\omega) \geq x_1 > -\infty$ для кожного ряду $F \in \mathcal{D}$ м.н., де $x_1 = x_1(F,\omega)$ з умови (2.2). Тобто, клас $\mathcal{D}$ містить лише ті ряди Діріхле F вигляду (2.1), що $\sigma_\mu(F,\omega) > -\infty$ м.н.
2^0. Якщо $\sigma_\mu(F,\omega) = -\infty$, то й $\sigma_{зб}(F,\omega) = -\infty$.
3^0. Якщо ряд (2.1) абсолютно збіжний в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, то $x_0 \leq \sigma(F,\omega) \leq \sigma_u(F,\omega)$.

Для класичних рядів Діріхле (рядів Діріхле з показниками $\lambda_n = \ln(n+1)$) Г. Бор у статті [56] отримав рівність абсцис рівномірної

збіжності і обмеженості суми

$$\sigma_u(F) = \sigma_b(F),$$

а у статті [57] він довів, що

$$\sigma_u(F) \le \sigma(F) + 1/2$$

(це, так званий, ефект Бора). Боненбласт і Хілле [58] встановили точність сталої 1/2 у цій нерівності.

У випадку $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ доведення нерівності

$$\sigma(F) \le \sigma_u(F) \le \sigma_b(F),$$

знаходимо в [58], [40, с. 132].
Для $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ виконуються нерівність Ж. Валірона

$$\sigma_{\text{зб}}(F) \le \sigma(F) + \tau(\Lambda_+)$$

(див. [59, p. 9], [60], [40, с. 114–115], [24], [25, с. 13]), а також нерівність ([58, p. 621], [40, с. 132])

$$\sigma_b(F) \le \sigma(F) + \tau(\Lambda_+)/2.$$

Остання нерівність є точною.

Справді, в загальному

$$\sigma_u(F) - \sigma(F) \le \sigma_b(F) - \sigma(F) \le \tau(\Lambda_+)/2,$$

але в статті [58, p. 622] побудовано приклад ряду Діріхле, для якого

$$\sigma_u(F) - \sigma(F) = \tau(\Lambda_+)/2,$$

звідки отримуємо, що й

$$\sigma_b(F) - \sigma(F) = \tau(\Lambda_+)/2$$

для цієї ж функції з [58].

Наступне твердження, на противагу до щойно цитованих, не містить апріорної умови монотонності послідовності показників $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$.

Твердження 2.1. *Нехай $F \in \mathcal{D}$.*

1^0. *Для кожного ω виконуються нерівності*

$$\sigma(F,\omega) \le \sigma_u(F,\omega) \le \sigma_b(F,\omega) \le \sigma_{зб}(F,\omega) \le \sigma_\mu(F,\omega).$$

2^0. *Якщо додатково припустити, що для кожного фіксованого $x < \sigma_b(F,\omega)$ функція $g(y) = F(x+iy)$ є майже періодичною в метриці Безіковича ([61–63]), то*

$$\sigma_b(F,\omega) \le \sigma(F,\omega) + \tau(\Lambda,\omega)/2.$$

Зауваження 2.2. 1. Якщо для функції $F \in \mathcal{D}$ існує підпослідовність часткових сум її ряду Діріхле рівномірно збіжна на $\Pi(\alpha,\beta) = \{z = x+iy\colon \alpha \le x \le \beta,\ y \in \mathbb{R}\}$, то F є рівномірно майже періодичною функцією в $\Pi(\alpha,\beta)$ (тим паче, майже періодичною в метриці Безіковича).

2. Як випливає з наведеного нижче доведення, замість майже періодичності за Безіковичем, досить вимагати, щоб для $x < \sigma_b(F,\omega)$ виконувалась рівність Парсеваля.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(\omega)|^2 e^{2x_0\lambda_n(\omega)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |F(x_0+iy,\omega)|^2 dy, \qquad (2.3)$$

Доведення. Справді, збіжний ряд $\sum |f_n(\omega)| e^{x\lambda_n(\omega)}$ для кожного фіксованого $x < \sigma(F,\omega)$ є збіжною мажорантою для ряду $\sum f_n(\omega) e^{z\lambda_n(\omega)}$ у півплощині $\{z : \mathrm{Re}\ z \le x\}$. Звідси, за ознакою Веєрштрасса рівномірної збіжності випливає, що $\sigma(F,\omega) \le \sigma_u(F,\omega)$. Нерівності $\sigma_b(F,\omega) \le \sigma_{зб}(F,\omega) \le \sigma_\mu(F,\omega)$ очевидні.

Далі, доведемо нерівність $\sigma_u(F,\omega) \le \sigma_b(F,\omega)$. Оскільки для $x < \sigma_u(F,\omega)$

$$R_N := \sup\{|F(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n(\omega) e^{z\lambda_n(\omega)}|\colon \mathrm{Re}\ z \le x\} \to 0\ (N \to +\infty),$$

а $|F(z)| \le |\sum_{n=0}^{N} f_n(\omega) e^{z\lambda_n(\omega)}| + R_N$, то

$$\sup\{|F(z)|\colon \mathrm{Re}\ z \le x\} \le$$

$$\leq \sup\{|\sum_{n=0}^{N} f_n(\omega)e^{z\lambda_n(\omega)}|\colon \mathrm{Re}\ z \leq x\} + R_N < +\infty.$$

Отже, $\sigma_u(F,\omega) \leq \sigma_b(F,\omega)$. Нерівність $\sigma_b(F,\omega) \leq \sigma(F,\omega)+\tau(\Lambda,\omega)/2$ по-суті є цитованою вище нерівністю з [58, p. 621], [40, с. 132], бо у випадку $\tau(\Lambda,\omega) = +\infty$ вона є очевидною. А у випадку $\tau(\Lambda,\omega) < +\infty$ для всіх досить великих $n \geq n_0(\omega) = n_0$ маємо $\lambda_n(\omega) > \frac{\ln n}{\tau(\Lambda,\omega)-\varepsilon}$, де $\varepsilon > 0$ – довільне. Тому, за нерівністю Коші-Буняковського при $x_0 = \sigma_b(F,\omega) - \varepsilon,\ x = x_0 - \varepsilon - \tau(\Lambda,\omega)/2$

$$\Big(\sum_{n\geq n_0} |f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)}\Big)^2 \leq \sum_{n\geq n_0} |f_n(\omega)|^2 e^{2x_0\lambda_n(\omega)} \sum_{n\geq n_0} e^{-(\tau(\Lambda,\omega)+2\varepsilon)\lambda_n(\omega)}.$$

Другий ряд у правій частині останньої нерівності є збіжним. Якщо переконаємося у збіжності першого ряду у правій частині, то отримаємо, що

$$\sigma(F,\omega) \geq x = \sigma_b(F,\omega) - 2\varepsilon - \tau(\Lambda,\omega)/2,$$

звідки при $\varepsilon \to +0$ отримаємо, що

$$\sigma(F,\omega) \geq \sigma_b(F,\omega) - \tau(\Lambda,\omega)/2.$$

Бажана збіжність першого ряду у точці x_0 випливатиме при $x = x_0$ з рівності Парсеваля (2.3) ([61–63]), позаяк $M(x_0,F) := \sup\{|F(x_0+iy,\omega)|\colon y \in \mathbb{R}\} < +\infty$ при кожному фіксованому ω за вибором $x_0 < \sigma_b(F,\omega)$. □

Твердження відомої гіпотези Блекуела для випадкових степеневих рядів

$$f_\omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)z^k$$

у випадку послідовності незалежних випадкових величин $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ доведеної в [46] (див. також [45]), узагальнювалось на клас випадкових рядів Діріхле $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ з такою ж послідовністю випадкових коефіцієнтів у статтях [28, 47].

У випадку, коли $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, $\tau(\Lambda_+) = \overline{\lim}_{k\to+\infty} \ln k/\lambda_k < +\infty$, а також

$$0 < c_1 \le |Z_k(\omega)| \le c_2 < +\infty \quad \text{м.н.}$$

і математичні сподівання

$$\mathbf{E}Z_k = 0 \quad (k \ge 0),$$

у статті [28] доведено, що

$$\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) \le \sigma(F,\omega) + \tau(\Lambda_+)/2 \quad \text{м.н.},$$

а у статті [48] те ж саме доведено у випадку послідовності показників $\lambda_k = \ln(k+1)$ і мультиплікативної системи $(Z_k(\omega))$, тобто, такої, що $Z_{m\cdot n}(\omega) = Z_m(\omega)\cdot Z_n(\omega)$ $(\forall m,n \in \mathbb{N}, \forall\omega)$ (у цьому випадку $\tau(\Lambda_+) = 1$).

У статтях [9, 10] результати з [28] переносились на випадкові кратні ряди Діріхле.

У цілому ряді статей [12, 13, 26, 27] також розглядалось питання про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з класу $\mathcal{D}(\Lambda_+)$, $\tau(\Lambda_+) < +\infty$, з коефіцієнтами вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ ([12, 13]). У випадку, коли $\tau(\Lambda_+) = 0$, а коефіцієнти ряду Діріхле $(f_k(\omega))$ є попарно незалежними в [26, 27] твердження про абсцису абсолютної збіжності отримані в термінах умов на функції розподілу $F_k(x) := \mathbf{P}\{\ \omega : |f_k(\omega)| < x\},\ x \in \mathbb{R},\ k \ge 0$. При цьому в [26, 27] умова попарної незалежності забезпечує можливість застосування уточненої другої леми Бореля-Кантелі (див. [37], [32, p. 84]), де на відміну від її варіанту для послідовності незалежних в сукупності подій, який вже став класичним, сукупна незалежність зі збереженням висновку замінена на умову попарної незалежності.

Доведемо далі ряд тверджень про співвідношення між абсцисами збіжності для рядів з $\mathcal{D}$, уникаючи (наскільки це взагалі є можливим) апріорних умов окремо як на показники, так і на ко-

ефіцієнти. У цьому нашому розгляді від показників вимагається лише їхня невід'ємність.

Твердження 2.2. *Нехай* $F \in \mathcal{D}$ *має вигляд* (2.1) *і* $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) := \lambda(\omega) > 0$ *м.н. Тоді*

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} \quad \text{м.н.}$$

Зауваження 2.3. *Якщо* $F \in \mathcal{D}$, *множина* $J \subset \mathbb{N}$ *необмежена і* $|f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty,\ k \in J)$, *то* $\lambda_k(\omega) \to +\infty$ $(k \to +\infty,\ k \in J)$, *бо інакше* $\sigma_\mu(F,\omega) = -\infty$.

Доведення твердження 2.2. **i**). У випадку $\alpha_0(\omega) = +\infty$ для кожного $\Delta > 0$ і для всіх $k \geq k_0(\omega)$ виконуються нерівності

$$\ln|f_k(\omega)|/\lambda_k(\omega) < -2\Delta, \quad \lambda_k(\omega) > \lambda(\omega)/2 > 0 \ \text{ м.н.},$$

звідки, зокрема,

$$|f_k(\omega)|e^{\Delta\lambda_k(\omega)} < e^{-\Delta\lambda_k(\omega)} \quad (k \geq k_0(\omega)),$$

а тому, для кожного $\Delta \in (\frac{2}{\lambda(\omega)}\ln\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$ і довільного $\varepsilon \in (0,1)$

$$|f_k(\omega)|e^{\Delta\lambda_k(\omega)} < \varepsilon \quad (k \geq k_0(\omega)) \quad \text{м.н.}$$

Звідси,

$$\lim_{k\to+\infty} |f_k(\omega)|e^{\Delta\lambda_k(\omega)} = 0 \quad \text{м.н.}$$

Отже,

$$\sigma_\mu(F,\omega) \geq \Delta \quad \text{м.н.},$$

де $\Delta \in (\frac{2}{\lambda(\omega)}\ln\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$ – довільне. Звідси,

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(\omega) = +\infty \quad \text{м.н.}$$

ii). У випадку $\alpha_0(\omega) = -\infty$, якщо би виконувалось $\sigma_\mu(F,\omega) > -\infty$, то для $\sigma \leq \sigma_\mu(F,\omega),\ \varepsilon > 0$ ми би отримали

$$|f_k(\omega)|e^{(\sigma-\varepsilon)\lambda_k(\omega)} < c = c(\sigma,\omega) \in (1,+\infty) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} > \sigma - \varepsilon + \frac{-\ln c}{\lambda_k(\omega)}.$$

Останнє, у випадку $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) := \lambda(\omega) > 0$, суперечить тому, що $\alpha_0(\omega) = -\infty$.

iii). Нехай тепер $\alpha_0(\omega) \neq \infty$. Зауважимо, що у цьому випадку для кожної послідовності $k_j \to +\infty$ такої, що

$$\lim_{\substack{j\to+\infty,\\ k=k_j}} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = \alpha_0(\omega)$$

виконується

$$\ln|f_k(\omega)| \to \infty \ (k = k_j \to +\infty) \Longrightarrow \lambda_k(\omega) \to +\infty \ (k = k_j \to +\infty).$$

Якщо додатково припустити, що $\alpha_0(\omega) \neq 0$, то й

$$\lambda_k(\omega) \to +\infty \ (k = k_j \to +\infty) \Longrightarrow \ln|f_k(\omega)| \to \infty \ (k = k_j \to +\infty).$$

З іншого боку, якщо для деякого $x_1 = x_1(\omega) = x_1(F,\omega) \neq 0$ виконується (2.2), то

$$\ln|f_k(\omega)| + x_1\lambda_k(\omega) \to -\infty \quad (k \to +\infty).$$

Тому, не існує такої послідовності $k_j \to +\infty$, що при $k = k_j \to +\infty$ виконуються всі наступні три співвідношення

$$\frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} \to \alpha_0(\omega) \text{ і } \ \ln|f_k(\omega)| = O(1), \quad \lambda_k(\omega) = O(1).$$

Далі, для довільного $\varepsilon > 0$ і послідовності $k_j \to +\infty$ такої, що при $k = k_j \to +\infty$

$$\frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = \alpha_0(\omega) + o(1),$$

при $k = k_j \to +\infty$ маємо

$$|f_k(\omega)|e^{(\alpha_0(\omega)+2\varepsilon)\lambda_k(\omega)} = e^{(o(1)+2\varepsilon)\lambda_k(\omega)} > e^{\varepsilon\lambda_k(\omega)} \to +\infty.$$

Звідси, $\sigma_\mu(F,\omega) < \alpha_0(\omega) + 2\varepsilon$ і, спрямовуючи $\varepsilon \to +0$, отримуємо, що

$$\sigma_\mu(F,\omega) \le \alpha_0(\omega).$$

Доведемо тепер протилежну нерівність $\sigma_\mu(F,\omega) \ge \alpha_0(\omega)$. Нехай спочатку $\lambda_k(\omega) \to +\infty$ $(k \to +\infty)$. Міркуючи від супротивного, припустимо, що $\sigma_\mu(F,\omega) < \alpha_0(\omega)$, а $\varepsilon > 0$ нехай таке, що $\sigma_\mu(F,\omega) + 2\varepsilon < \alpha_0(\omega)$. За означенням $\alpha_0(\omega)$, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $k_0(\omega)$ таке, що нерівність

$$\ln|f_k(\omega)|/\lambda_k(\omega) < -(\alpha_0(\omega) - \varepsilon)$$

виконується для всіх $k \ge k_0(\omega)$. Тоді,

$$|f_k(\omega)| < \exp\{-(\alpha_0(\omega) - \varepsilon)\lambda_k(\omega)\} \quad (k \ge k_0(\omega)).$$

Звідси, у випадку $\lambda_k(\omega) \to +\infty$ $(k \to +\infty)$

$$|f_k(\omega)|e^{(\alpha_0(\omega)-2\varepsilon)\lambda_k(\omega)} < e^{-\varepsilon\lambda_k(\omega)} \to 0 \quad (k \to +\infty),$$

тобто,

$$\sigma_\mu(F,\omega) \ge \alpha_0(\omega) - 2\varepsilon > \sigma_\mu(F,\omega).$$

Суперечність.

Припустимо тепер, що $f_k(\omega) \to 0$ $(k \to +\infty)$. Тоді, $\sigma_\mu(F,\omega) \ge 0$ і $\alpha_0(\omega) \ge 0$. Тому, у випадку $\alpha_0(\omega) > 0$ і $\varepsilon \in \big(0, (\alpha_0(\omega) - \sigma_\mu(F,\omega))/2\big)$ маємо

$$\lambda_k(\omega) < \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\alpha_0(\omega) - \varepsilon}$$

і, тому, при $k =\to +\infty$

$$|f_k(\omega)|e^{(\sigma_\mu(F,\omega)+\varepsilon)\lambda_k(\omega)} < \exp\left\{\left(1 - \frac{\sigma_\mu(F,\omega) + \varepsilon}{\alpha_0(\omega) - \varepsilon}\right)\ln|f_k(\omega)|\right\} \to 0.$$

Суперечність з означенням $\sigma_\mu(F,\omega)$. Залишається розглянути випадок

$$\alpha_0(\omega) = 0 > \sigma_\mu(F,\omega).$$

Тоді,

$$\frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} > -2\varepsilon \ (k \ge k_0(\omega)),$$

звідки,

$$|f_k(\omega)|e^{-\varepsilon\lambda_k(\omega)} < \exp\left\{\frac{1}{2}\ln|f_k(\omega)|\right\} \to 0 \quad (k \to +\infty).$$

Отже, $\sigma_\mu(F,\omega) \geq -\varepsilon$, але $\varepsilon > 0$ – довільне. Тому, $\alpha_0(\omega) = 0 > \sigma_\mu(F,\omega) \geq 0$. Знову отримуємо суперечність.

Нехай тепер існує $x_1 \neq \infty$ таке, що

$$\ln|f_k(\omega)| + x_1\lambda_k(\omega) \to -\infty \quad (k \to +\infty),$$

але $f_k(\omega) \not\to 0$ і $\lambda_k(\omega) \not\to +\infty$ $(k \to +\infty)$. Тоді, існують такі дві необмежені множини натуральних чисел $J_1,\ J_2$, що $J_1 \cup J_2 = \mathbb{N}$, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ і

$$f_k(\omega) \to 0\ (k \to +\infty, k \in J_1), \quad \lambda_k(\omega) \to +\infty\ (k \to +\infty, k \in J_2).$$

Позначимо $E_k(\omega) := \ln|f_k(\omega)| + x_1\lambda_k(\omega) \to -\infty$. Означимо тепер потрібні множини індексів так:

$$J_1 = \{k \in \mathbb{N} : -\ln|f_k(\omega)| \geq |E_k(\omega)|/2\},$$
$$J_2 = \{k \in \mathbb{N} \setminus J_1 : |x_1|\lambda_k(\omega) \geq |E_k(\omega)|/2\}.$$

Якщо припустити, що $k \notin J_1 \cup J_2$, то

$$-\ln|f_k(\omega)| < |E_k(\omega)|/2, \quad |x_1|\lambda_k(\omega) < |E_k(\omega)|/2$$

і, тому,

$$|E_k(\omega)| = -\ln|f_k(\omega)| + |x_1|\lambda_k(\omega) < |E_k(\omega)|,$$

що неможливо. Тобто, $J_1 \cup J_2 = \mathbb{N}$.

Позначимо

$$\alpha_0^{(l)}(\omega) \stackrel{def}{=} \varliminf_{\substack{k\to+\infty,\\ k\in J_l}} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}, \quad l \in \{1,2\},$$

а також

$$F_{(l)}(z) = \sum_{k\in J_l} f_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)},\ l \in \{1,2\}.$$

Тоді $F = F_{(1)} + F_{(2)}$ і за доведеним

$$\sigma_\mu(F_{(l)}, \omega) = \alpha_0^{(l)}(\omega), \quad l \in \{1, 2\} \quad \text{м.н.}$$

Зауважимо тепер, що

$$\alpha_0(\omega) = \inf\{\alpha_0^{(1)}(\omega), \alpha_0^{(2)}(\omega)\}.$$

Крім цього,

$$\sigma_\mu(F, \omega) = \inf\{\sigma_\mu(F_{(1)}, \omega), \sigma_\mu(F_{(2)}, \omega)\}.$$

Це остаточно доводить твердження 2.2. □

Наступне твердження у випадку детермінованих рядів Діріхле з послідовністю показників Λ_+, тобто, $f_k(\omega) \equiv f_k \in \mathbb{C}$ $(k \geq 0)$ і $\lambda_k(\omega) \equiv \lambda_k$, $0 \leq \lambda_k < \lambda_{k+1} \to +\infty$ $(0 \leq k \to +\infty)$, доведене в [24, Наслідок 5], [25] (інша версія [44, Theorem 1]).

Твердження 2.3. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ і має вигляд (2.1). Тоді, для довільних функцій $\gamma, \delta \colon \Omega \to \mathbb{R}$ і всіх $\omega \in \Omega$ таких, що $\gamma(\omega) \geq 0$ і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty \tag{2.4}$$

виконуються нерівності

$$\sigma(F, \omega) \geq \gamma(\omega)\alpha_0(\omega) - \delta(\omega) \geq \gamma(\omega)\sigma_{зб}(F, \omega) - \delta(\omega). \tag{2.5}$$

Далі ми доповнимо це твердження (див. далі твердження 2.6).

Зауваження 2.4. 1^0. Якщо $F \in \mathcal{D}$ (тобто, виконується умова (2.2)), то при $\gamma(\omega) = 0$, $\delta(\omega) = -x_1$, $k \to +\infty$

$$(\gamma(\omega) - 1) \ln |f_k(\omega)| + \delta(\omega)\lambda_k(\omega) \to +\infty \quad \text{м.н.} \tag{2.6}$$

Клас таких пар функцій (γ, δ), для яких виконується умова (2.6), позначимо через $\mathcal{L}$.

2^0. Зрозуміло, що з умови (2.4) також випливає, що виконується умова (2.6), але при цьому, взагалі кажучи, нема жодних окремих умов на послідовності $\mathbf{f}$ та Λ.

Відзначимо, що для рядів Діріхле з монотонно зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників Λ в [44] нерівності з Твердження 2.3 доведені у випадку, коли для ω замість умови (2.4) виконується умова

$$h(\gamma,\delta,\omega) \stackrel{def}{=} \varliminf_{k\to\infty} \frac{(\gamma(\omega)-1)\ln\,|f_k(\omega)| + \delta(\omega)\lambda_k(\omega)}{\ln k} > 1 \qquad (2.7)$$

або з огляду на підстановку $\delta = (\gamma-1)\alpha_0$, умова

$$h(\gamma,\delta,\omega) \stackrel{def}{=} \varliminf_{k\to\infty} \frac{(\gamma(\omega)-1)\big(\ln\,|f_k(\omega)| + \alpha_0(\omega)\lambda_k(\omega)\big)}{\ln k} > 1. \qquad (2.8)$$

Зрозуміло, що умова (2.4) є слабшою за умову (2.7), а умова (2.10) за умову (2.8).

Доведення Твердження 2.3. Зрозуміло, що $\sigma(f,\omega) \le \sigma_{зб}(f,\omega)$. Доведемо тепер, що $\sigma_{зб}(f,\omega) \le \alpha_0(\omega)$. Справді, припустимо спочатку, що $\alpha_0(\omega) \ne \infty$ і позначимо $x_0 = \alpha_0(\omega) + \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – довільне. Тоді,

$$|f_k(\omega)|e^{x_0\lambda_k(\omega)} = \exp\{\lambda_k(\omega)(\ln|f_k(\omega)|/\lambda_k(\omega) + x_0)\}.$$

Але за означенням $\alpha_0(\omega)$, існує послідовність $k_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$, для якої

$$\ln|f_k(\omega)|/\lambda_k(\omega) > -(\alpha_0(\omega) + \varepsilon/2) \quad (k = k_j,\ j \ge 1).$$

Тому,

$$\ln|f_k(\omega)|/\lambda_k(\omega) + x_0 > \varepsilon/2 \quad (k = k_j,\ j \ge 1),$$

звідки

$$|f_k(\omega)|e^{x_0\lambda_k(\omega)} \ge e^{\lambda_k(\omega)\varepsilon/2} \ge 1 \quad (k = k_j,\ j \ge 1).$$

Звідси, $\sigma_{зб}(f,\omega) \le \alpha_0(\omega) + \varepsilon$. Залишається спрямувати $\varepsilon \to +0$.

Випадок $\alpha_0(\omega) = +\infty$ – очевидний. У випадку $\alpha_0(\omega) = -\infty$ для кожного $E > 0$ і деякої послідовності $k_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$ за означенням $\alpha_0(\omega)$ маємо

$$\ln|f_k(\omega)|/\lambda_k > E \quad (k = k_j,\ j \ge 1).$$

Отже, $|f_k(\omega)|\exp\{-E\lambda_k\} > 1$ $(k = k_j,\ j \ge 1)$, тобто, в точці $z = -E$ ряд Діріхле є розбіжним, але $E > 0$ – довільне. Тому, $\sigma_{зб} = -\infty$.

Нехай тепер $x_0 = \gamma(\omega)(\alpha_0(\omega) - \varepsilon) - \delta(\omega)$, де $\varepsilon > 0$ – довільне. Тоді,

$$|f_k(\omega)|e^{x_0\lambda_k(\omega)} = |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)}e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)}\times$$
$$\times\left(|f_k(\omega)|e^{(\alpha_0(\omega)-\varepsilon)\lambda_k(\omega)}\right)^{\gamma(\omega)}. \tag{2.9}$$

За означенням $\alpha_0(\omega)$ для всіх $k \ge k_0(\omega)$ маємо

$$\alpha_0(\omega) < \frac{-\ln f_k(\omega)}{\lambda_k(\omega)} + \varepsilon/2$$

і, тому,

$$|f_k(\omega)|e^{(\alpha_0(\omega)-\varepsilon)\lambda_k(\omega)} < \exp\{-\lambda_k\varepsilon/2\} \le 1 \quad (k \ge k_0(\omega)).$$

Звідси і з (2.9) отримуємо, що

$$|f_k(\omega)|e^{x_0\lambda_k(\omega)} \le |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)}e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)}$$

і за умовою (2.4) маємо

$$\sigma(f,\omega) \ge x_0 = \gamma(\omega)(\alpha_0(\omega) - \varepsilon) - \delta(\omega).$$

Залишається скористатися довільністю $\varepsilon > 0$. □

За умови (2.6), зокрема, маємо таке твердженн

Твердження 2.4. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ має вигляд* (2.1).

1^0. *Якщо* $\omega \in \Omega$ *таке, що для деяких* $\delta(\omega) \in \mathbb{R}$, $\gamma(\omega) \in [0,1)$ *виконується умова* (2.6), *то*

$$\sigma_\mu(F,\omega) \geq -\inf\left\{\frac{\delta(\omega)}{1-\gamma(\omega)} \colon (\gamma,\delta) \in \mathcal{L}\right\} \quad \text{м.н.}$$

2^0. *Якщо* $\omega \in \Omega$ *таке, що для деяких* $\delta(\omega) \in \mathbb{R}$ *і* $\gamma(\omega) \in [0,1)$ *умова* (2.6) *не виконується, то*

$$\sigma_\mu(F,\omega) \leq -\sup\left\{\frac{\delta(\omega)}{1-\gamma(\omega)} \colon (\gamma,\delta) \notin \mathcal{L}\right\} \quad \text{м.н.}$$

Доведення. 1^0. З умови (2.6) випливає, що

$$|f_k(\omega)| \exp\left\{-\frac{\delta(\omega)}{1-\gamma(\omega)}\lambda_k(\omega)\right\} \to 0 \quad (k \to +\infty).$$

Залишається пригадати зауваження 2.1

2^0. Якщо умова (2.6) не виконується, то

$$\varliminf_{n\to+\infty} (\gamma(\omega)-1)\ln|f_k(\omega)| + \delta(\omega)\lambda_k(\omega) < +\infty.$$

Тому, існує послідовність (k_n) така, що $k_n \to +\infty$ і

$$(\gamma(\omega)-1)\ln|f_k(\omega)| + \delta(\omega)\lambda_k(\omega) \leq C < +\infty$$

$(k = k_n,\ n \geq 1)$, звідки

$$|f_k(\omega)| \exp\left\{-\frac{\delta(\omega)}{1-\gamma(\omega)}\lambda_k(\omega)\right\} \not\to 0 \quad (k = k_n \to +\infty).$$

А тому, $\sigma_\mu(F,\omega) \leq \frac{-\delta(\omega)}{1-\gamma(\omega)}$. □

Вибираючи $\delta = (\gamma-1)\alpha_0$, Твердження 2.3 переписуємо у такому вигляді.

Твердження 2.5. *Нехай* $F \in \mathcal{D}$ *і* $\omega \in \Omega$ *таке, що для деякого* $\gamma(\omega) \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(|f_k(\omega)|e^{\alpha_0(\omega)\lambda_k(\omega)}\right)^{1-\gamma(\omega)} < +\infty. \tag{2.10}$$

Тоді

$$\sigma_a(F,\omega) = \sigma_{зб}(F,\omega) = \alpha_0(\omega). \tag{2.11}$$

З тверджень 2.2 і 2.3 негайно отримуємо таке твердження.

Твердження 2.6. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ має вигляд* (2.1) *і*

$$\varliminf_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) := \lambda(\omega) > 0 \quad \text{м.н.}$$

Якщо для довільних функцій $\gamma, \delta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ і всіх $\omega \in \Omega$ таких, що $\gamma(\omega) \geq 0$ м.н. виконується умова (2.4), *то м.н. виконуються співвідношення*

$$\begin{gathered}\sigma(F,\omega) \geq \gamma(\omega)\alpha_0(\omega) - \delta(\omega) = \\ = \gamma(\omega)\sigma_\mu(\omega) - \delta(\omega) \geq \gamma(\omega)\sigma_{зб}(F,\omega) - \delta(\omega). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Вибираючи у твердженні 2.6 $\delta(\omega) = 0,\ \gamma(\omega) = 1 - \gamma_1(\omega)$, отримуємо такий наслідок.

Твердження 2.7. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ має вигляд* (2.1), $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) := \lambda(\omega) > 0$ *м.н., а для деякої функції $\gamma_1(\omega)\colon \Omega \to (-\infty, 1]$*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{\gamma_1(\omega)} < +\infty \quad \text{м.н.} \tag{2.13}$$

Тоді

$$\begin{gathered}\sigma(F,\omega) \geq (1-\gamma_1(\omega))\alpha_0(\omega) = \\ = (1-\gamma_1(\omega))\sigma_\mu(F,\omega) \geq (1-\gamma_1(\omega))\sigma_{зб}(F,\omega) \quad \text{м.н.} \end{gathered} \tag{2.14}$$

Вибираючи у твердженні 2.6 $\gamma(\omega) = 1$, отримуємо такий наслідок.

Твердження 2.8. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty \quad \text{м.н.} \tag{2.15}$$

Тоді

$$\begin{gathered}\sigma(F,\omega) \geq \alpha_0(\omega) - \delta(\omega) = \\ = \sigma_\mu(F,\omega) - \delta(\omega) \geq \sigma_{зб}(F,\omega) - \delta(\omega) \quad \text{м.н.} \end{gathered} \tag{2.16}$$

Доведення. Оскільки $\lambda_k(\omega) \geq 0$ $(k \geq 0)$, то з умови (2.15) випливає, що $\delta(\omega) > 0$ м.н. і $\lambda_k(\omega) \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ м.н. Залишається застосувати твердження 2.6 з $\gamma(\omega) = 1$. □

З твердження 2.8 отримуємо таке твердження.

Твердження 2.9. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ і $\tau(\Lambda, \omega) < +\infty$ м.н. Тоді*

$$\sigma(F, \omega) \geq \alpha_0(\omega) - \tau(\Lambda, \omega) = \\ = \sigma_\mu(F, \omega) - \tau(\Lambda, \omega) \geq \sigma_{зб}(F, \omega) - \tau(\Lambda, \omega) \quad \text{м.н.}, \tag{2.17}$$

а у випадку, коли $(\lambda_k(\omega))$ – послідовність незалежних випадкових величин, таких, що $\tau(\Lambda, \omega) < +\infty$ м.н., існує таке $\tau \in [0, +\infty)$, що $\tau(\Lambda, \omega) = \tau$ м.н. і

$$\sigma(F, \omega) \geq \alpha_0(\omega) - \tau = \sigma_\mu(F, \omega) - \tau \geq \sigma_{зб}(F, \omega) - \tau \quad \text{м.н.} \tag{2.18}$$

Доведення. Якщо $\omega \in \Omega$ таке, що $\tau(\Lambda, \omega) < +\infty$, то умова (2.15) виконується з $\delta(\omega) = \tau(\Lambda, \omega) + \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – довільне. Залишається застосувати нерівності (2.16) з твердження 2.8 і перейти до границі при $\varepsilon \to +0$.

За законом нуля і одиниці Коломогорова $\tau(\Lambda, \omega) \equiv \tau \in [0, +\infty]$ м.н., але за умовою $\tau(\Lambda, \omega) < +\infty$ м.н. Тому, з нерівностей (2.17) негайно отримуємо (2.18). □

Позначимо

$$h_1(\omega) = \overline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\ln k}, \quad h_2(\omega) = \underline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\ln k}.$$

З твердження 2.7, подібно до твердження 2.9, отримуємо таке твердження.

Твердження 2.10. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ і має вигляд* (2.1).

1^0. *Якщо $\omega \in \Omega$ таке, що $h_1(\omega) \in [-\infty, 0)$, то нерівності* (2.14) *виконуються з $\gamma_1(\omega) = \frac{1}{h_1(\omega)}$, якщо $h_2(\omega) \in (1, +\infty]$, то нерівності* (2.14) *виконуються з $\gamma_1(\omega) = \frac{1}{h_2(\omega)}$. При цьому вважаємо, що $1/\infty = 0$.*

2^0. *Якщо* $(|f_k(\omega)|)$ *– послідовність незалежних випадкових величин, то у випадку, коли* $h_1(\omega) \in (-\infty, 0)$ *м.н. або* $h_2(\omega) \in (1, +\infty)$ *м.н., відповідно, існують* $h_1 \in (-\infty, 0)$ *або* $h_2 \in (1, +\infty)$*, відповідно, такі, що* $h_1(\omega) = h_1$ *м.н. або* $h_2(\omega) = h_2$ *м.н., відповідно, і нерівності* (2.14) *виконуються м.н. з* $\gamma_1(\omega) = \frac{1}{h_1}$ *або з* $\gamma_1(\omega) = \frac{1}{h_2}$*, відповідно.*

Доведення. Нехай спочатку $h_1(\omega) < 0$. Переконаємось, що твердження 2.7 можна застосувати з

$$\gamma_1(\omega) = h_2(\omega) = 1/(h_1(\omega)(1 - \varepsilon/2)), \tag{2.19}$$

де $0 < \varepsilon < 1$ – довільне. Зауважимо, що у випадку $h_1(\omega) = -\infty$, в рівності (2.19) вважаємо, що $h_1(\omega) < 0$ – довільне. Далі, за умовою, для кожного $\varepsilon \in (0, 1)$ існує $k_0(\omega)$ таке, що для всіх $k \geq k_0(\omega)$

$$\frac{\ln |f_k(\omega)|}{\ln k} > -h_1(\omega)(1 - \varepsilon).$$

Тоді, при

$$h_2(\omega) = 1/(h_1(\omega)(1 - \varepsilon/2)), \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

оскільки $h_2(\omega) < 0$, то

$$|f_k(\omega)|^{h_2(\omega)} \leq \exp\Big\{ - h_2(\omega)h_1(\omega)(1 - \varepsilon) \ln k \Big\} =$$
$$= \exp\Big\{ - \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon/2} \ln k \Big\},$$

але

$$\frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon/2} > 1.$$

Тому, за твердженням 2.7

$$\sigma(F, \omega) \geq (1 - \gamma_1(\omega))\alpha_0(\omega) =$$
$$= (1 - \gamma_1(\omega))\sigma_\mu(F, \omega) \geq (1 - \gamma_1(\omega))\sigma_{\text{зб}}(F, \omega) \quad \text{м.н.},$$

де $\gamma_1(\omega) = 1/(h_1(\omega)(1 - \varepsilon/2))$. Залишається спрямувати $\varepsilon \to +0$.

У випадку $h_2(\omega) > 1$, вибираємо

$$\gamma_1 = h_0(\omega) + 2\varepsilon, \quad h_0(\omega) = 1/h_2(\omega)$$

($h_0(\omega) = 0$ у випадку $h_2(\omega) = +\infty$) і розкриваємо означення нижньої границі з $h_0 + \varepsilon$. Справді, за умовою, для кожного $\varepsilon > 0$ такого, що $h_0(\omega) + \varepsilon < 1$ існує $k_0(\omega)$ таке, що для всіх $k \geq k_0(\omega)$

$$\frac{\ln|f_k(\omega)|}{\ln k} < \frac{-1}{h_0(\omega) + \varepsilon}.$$

Тоді,

$$|f_k(\omega)|^{h_0(\omega)+2\varepsilon} = \exp\Big\{(h_0(\omega) + 2\varepsilon)\ln|f_k(\omega)|\Big\} \leq$$
$$\leq \exp\Big\{-\frac{h_0(\omega) + 2\varepsilon}{h_0(\omega) + \varepsilon}\ln k\Big\}.$$

Тому, знову за твердженням 2.7

$$\sigma(F, \omega) \geq (1 - \gamma_1(\omega))\alpha_0(\omega) =$$
$$= (1 - \gamma_1(\omega))\sigma_\mu(F, \omega) \geq (1 - \gamma_1(\omega))\sigma_{зб}(F, \omega) \quad \text{м.н.},$$

де $\gamma_1(\omega) = h_0(\omega) + 2\varepsilon$. Залишається знову спрямувати $\varepsilon \to +0$.

Доведення п. 2^0 завершуємо цілком так само, як і у доведенні твердження 2.9, посиланням на закон нуля і одиниці. Справді, за законом нуля і одиниці Коломогорова $h_1(\omega) \equiv h_1 \in [-\infty, 0)$ м.н. або $h_2(\omega) \equiv h_2 \in (1, +\infty]$ м.н., але за умовою $h_1(\omega) > -\infty$ м.н. або $h_2(\omega) < +\infty$ м.н. Це повністю завершує доведення п. 2^0. □

Зауваження 2.5. Твердження, подібні до п. 1^0 твердження 2.10, у випадку рядів Діріхле з послідовністю показників Λ_+ знаходимо у статті [44, наслідки 2 і 3], а перша частина твердження 2.9, по-суті, є іншою формою запису наслідку 1 з [44], встановленого також у випадку рядів Діріхле з послідовністю показників Λ_+.

З тверджень 2.9 і 2.10 випливає таке твердження (у цьому зв'язку див. також [24, 25, 40, 42–44, 59].

Твердження 2.11. *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Якщо $\omega \in \Omega$ таке, що $\tau(\Lambda, \omega) \stackrel{def}{=} \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k(\omega)} = 0$ або $\ln k = o(\ln|f_k(\omega)|)$ $(k \to +\infty)$, то виконуються рівності*

$$\sigma_{зб}(F, \omega) = \sigma(F, \omega) = \sigma_\mu(F, \omega) = \alpha_0(\omega).$$

Доведемо тепер таке твердження.

Твердження 2.12. *Нехай* $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ *і має коефіцієнти вигляду* $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ $(k \geq 0)$. *Якщо виконуються умови* $(\exists c_1,\ c_2 \in (0, +\infty))\colon c_1 \leq |Z_k(\omega)| \leq c_2$ *м.н.*,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = Z(\omega) \text{ м.н.}, \tag{2.20}$$

а $\gamma_1 = 1/h_1$ *у випадку* $h_1 < 0$ *і* $\gamma_1 = 1/h_2$ *у випадку* $h_2 > 1$ *то*

$$\sigma(F,\omega) \geq (1-\gamma_1)(\alpha_0^*(\omega) - Z(\omega)) = (1-\gamma_1)\sigma_\mu(F,\omega) \tag{2.21}$$

$$\geq (1-\gamma_1)\sigma_{зб}(F,\omega) \quad \text{м.н.}, \tag{2.22}$$

де

$$\alpha_0^*(\omega) := \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n(\omega)}, \quad h_1 := \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\ln k}, \quad h_2 := \varliminf_{k\to\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\ln k}.$$

Доведення твердження 2.12. Зауважимо, що як з умови $h_1 < 0$, так і з умови $h_2 > 1$ випливає, що $\ln k = O(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$. Тому з умови $(\exists c_1,\ c_2 \in (0, +\infty))\colon c_1 \leq |Z_k(\omega)| \leq c_2$ м.н. випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|} = 0 \quad \text{м.н..} \tag{2.23}$$

Оскільки $\varlimsup_{n\to+\infty} c_n d_n = \varlimsup_{n\to+\infty} c_n \cdot \lim_{n\to+\infty} d_n$ у випадку довільної дійсної послідовності c_n, і дійсної послідовності $d_n \geq 0$ $(n \geq n_0)$, то

$$h_1(\omega) := \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\ln k} =$$

$$= \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\ln k} \lim_{k\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right) = h_1,$$

а також

$$h_2(\omega) := \varliminf_{k\to\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\ln k} =$$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\ln k} \lim_{k\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right) = h_2.$$

Далі, за умовою (2.20)

$$\alpha_0(\omega) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|f_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} =$$

$$= \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n(\omega)} - \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln|Z_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} = \alpha_0^*(\omega) - Z(\omega).$$

Оскільки виконується умова (2.23), то звідси за твердженням 2.10 зі співвідношень (2.14) отримуємо (2.21).

2.2 Твердження про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з випадковими показниками і випадковими коефіцієнтами.

Почнемо з такого зауваження.

Зауваження 2.6. За законом нуля і одиниці Колмогорова випливає, що якщо $\left(\frac{\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}\right)$ – послідовність незалежних випадкових величин, то випадкова величина $\alpha_0(\omega)$ є майже напевне (м.н) сталою, тобто, існує $\sigma \in [-\infty, +\infty]$ таке, що $\alpha_0(\omega) = \sigma$ м.н. Звідси, за Твердженням 2.10, у випадку, коли м.н. $\tau(\Lambda, \omega) = 0$ або $\ln n = o(\ln|f_n(\omega)|)$ $(n \to +\infty)$, маємо, що випадкова величина $\sigma(f, \omega)$ також є майже напевне (м.н) сталою і $\sigma(f, \omega) = \sigma \in [-\infty, +\infty]$ м.н. Власне, звідси те ж саме твердження випливає у випадку, коли $(|f_k(\omega)|)$ є детермінованою числовою послідовністю, а Λ є послідовністю незалежних випадкових величин, а також у випадку детермінованої послідовності Λ, коли $(|f_k(\omega)|)$ є послідовністю незалежних випадкових величин. У книзі [45] останнє написано у випадку монотонно зростаючої до нескінченності послідовності Λ_+, коли $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ є послідовністю незалежних випадкових величин.

Для $F \in \mathcal{D}$ вигляду (2.1) з коефіцієнтами $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$ розглянемо ряди Діріхле

$$F_1(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{z\lambda_k(\omega)}, \quad F_2(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 e^{2z\lambda_k(\omega)} \quad (\omega \in \Omega)$$

$$F_3(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 e^{2x\lambda_k}, \quad F_3^*(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 e^{2x\lambda_k}, \quad F_4(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| e^{x\lambda_k}.$$

Зауважимо, що

$$\sigma(F_3) = \sigma(F_3^*) \text{ і } \sigma_\mu(F_3) = \sigma_\mu(F_3^*) = \sigma_\mu(F_4),$$
$$\sigma_\mu(F_1, \omega) = \sigma_\mu(F_2, \omega).$$

Наступне твердження – це фактично перша частини теореми 2 зі статті [28], яку там доведено для послідовності Λ_+ за апріорного

обмеження $\tau(\Lambda_+) < +\infty$. Сформулюємо його в дещо видозміненому вигляді.

Твердження 2.13. *Нехай $F_4 \in \mathcal{D}$. Тоді,*

$$\sigma(F_4) \le \frac{\sigma(F_4)+\sigma_\mu(F_4)}{2} \le \sigma(F_3) \le \inf\left\{\sigma(F_4)+\frac{\tau(\Lambda_+)}{2}, \sigma_\mu(F_4)\right\},$$

де $\tau(\Lambda_+) = \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln k}{\lambda_k}$.

Доведення. Першу нерівність отримуємо безпосередньо з нерівності $\sigma(F_4) \le \sigma_\mu(F_4)$, до якої вона є рівносильною.

Доведемо другу нерівність. Нехай x і x_0 такі, що

$$x_0 = \sigma_\mu(F_4) - \varepsilon < \sigma_\mu(F_4), \quad x = \sigma_\mu(F_4) + \sigma(F_4) - \varepsilon < \sigma_\mu(F_4) + \sigma(F_4),$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне. Тоді, $|a_n|e^{x_0\lambda_n} \to 0$ $(n \to +\infty)$ і, отже, послідовність $\left(|a_n|e^{x_0\lambda_n}\right)$ допускає впорядкування за монотонним незростанням. Позначатимемо це впорядкування $\left(|a_n^*|e^{x_0\lambda_n^*}\right)$. Але,

$$\sum |a_n^*|e^{(x-x_0)\lambda_n^*} = \sum |a_n|e^{(x-x_0)\lambda_n} < +\infty,$$

а також

$$\sum |a_n|^2 e^{x\lambda_n} = \sum |a_n^*|e^{x_0\lambda_n^*} \cdot |a_n^*|e^{(x-x_0)\lambda_n^*}.$$

Тому, за ознакою Діріхле ряд $\sum |a_n|^2 e^{x\lambda_n}$ збіжний. Звідси,

$$2\sigma(F_3) \ge x = \sigma_\mu(F_4) + \sigma(F_4) - \varepsilon,$$

а з довільності вибору $\varepsilon > 0$ випливає, що $2\sigma(F_3) \ge \sigma(F_4) + \sigma_\mu(F_4)$.

У статті [28] третю нерівність, як вже зазначалося вище, доведено у випадку послідовності Λ_+. Оскільки у випадку, коли $\tau(\Lambda_+) < +\infty$ послідовність нескладно впорядковується за зростанням зі збереженням цієї умови, а перестановка елементів рядів Діріхле F_3, F_4 не змінює їхніх абсцис абсолютної збіжності $\sigma(F_3)$, $\sigma(F_4)$, то залишається скористатися першою частиною теореми 2 зі статті [28]. Якщо ж $\tau(\Lambda_+) = +\infty$, то третя нерівність стає тривіальною, позаяк $\inf\left\{\sigma(F_4) + \frac{\tau(\Lambda_+)}{2}, \sigma_\mu(F_4)\right\} = \sigma_\mu(F_4)$ і $\sigma_\mu(F_4) = \sigma_\mu(F_3) \ge \sigma(F_3)$. $\square$

З твердження 2.13 отримуємо таке твердження.

Твердження 2.14. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ з коефіцієнтами $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$, де $(\xi_k(\omega))$ – послідовність випадкових величин таких, що $(\forall k)\colon\ 0 < c_1 \le |\xi_k(\omega)| \le c_2 < +\infty$ м.н. Тоді, м.н.*

$$\sigma(F,\omega) \le \frac{\sigma(F,\omega)+\sigma_\mu(F,\omega)}{2} \le \sigma(F_2,\omega) \le$$
$$\le \inf\left\{\sigma(F,\omega)+\frac{\tau(\Lambda,\omega)}{2}, \sigma_\mu(F,\omega)\right\}. \tag{2.24}$$

Доведення. За твердженням 2.13 при фіксованому ω

$$\sigma(F_1,\omega) \le \frac{\sigma(F_1,\omega)+\sigma_\mu(F_1,\omega)}{2} \le \sigma(F_2,\omega) \le$$
$$\le \inf\left\{\sigma(F_1,\omega)+\frac{\tau(\Lambda,\omega)}{2}, \sigma_\mu(F_1,\omega)\right\}.$$

Звідси отримуємо (2.24), оскільки за умовою

$$(\forall k)\colon\ 0 < c_1 \le |\xi_k(\omega)| \le c_2 < +\infty \text{ м.н.},$$

нескладно переконуємося, що

$$c_1|a_k|e^{x\lambda_k(\omega)} \le |f_k(\omega)|e^{x\lambda_k(\omega)} \le c_2|a_k|e^{x\lambda_k(\omega)} \quad \text{м.н.},$$

тому,

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \sigma_\mu(F_1,\omega) = \sigma_\mu(F_2,\omega),\ \sigma(F,\omega) = \sigma(F_1,\omega) \ \text{ м.н.} \tag{2.25}$$

□

Введемо тепер в розгляд два такі класи випадкових величин. Через Θ позначимо клас послідовностей комплекснозначних випадкових величин ξ_n таких, що

$$(\exists c_j \in (0,+\infty))(\forall n)\colon \quad c_1 \le |\xi_n(\omega)| \le c_2 \text{ м.н.}$$

Через Δ позначимо клас невід'ємних випадкових величин δ_n таких, що

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\colon \quad \mathbf{E}(e^{x\delta_n}) \le C_1 = C_1(x) < +\infty.$$

З твердження 2.14 за допомогою теореми про три ряди отримуємо таке твердження.

Теорема 2.1. *Нехай* $(\xi_n) \in \Theta$, $(\delta_n) \in \Delta$, *а* $F \in \mathcal{D}$ *з коефіцієнтами* $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ *і показниками* $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k \colon k \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $f_k(\omega) = a_k \xi_k(\omega)$.

1. *Якщо* $\mathbf{E}\big(\xi_n e^{x\delta_n}\big) = 0$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *і довільного* $x \in \mathbb{R}$, $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ *– послідовність незалежних випадкових величин для кожного* $x \in \mathbb{R}$, *то* $\sigma_{зб}(F, \omega) \geq \sigma(F_3)$ *м.н.*
2. *Якщо додатково припустити, що* $(\exists C_2(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}) : \ \mathbf{E}(e^{x\delta_n}) \geq C_2(x)$, *то* $\sigma_{зб}(F, \omega) = \sigma(F_3)$ *м.н.*

Зауваження 2.7. *i*) Оскільки $\mathbf{E}(e^{x\delta_n}) = \varphi_{\delta_n}(-ix)$, де φ_δ – характеристична функція відповідної випадкової величини, то, наприклад, у випадку, коли всі δ_n однаково розподілені, $\varphi_{\delta_n}(-ix) = \varphi_{\delta_0}(-ix) := C(x)$. Якщо тепер $(\forall x \in \mathbb{R})$: $C(x) \neq \infty$, то в умовах Теореми 2.1 досить взяти $C_1(x) = C_2(x) = C(x)$.

ii) Якщо $(\delta_k(\omega))$ і $(\xi_k(\omega))$ – дві послідовності незалежних випадкових величин, то такою ж є і послідовність $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ для кожного $x \in \mathbb{R}$.

Доведення Теореми 2.1. Скористаємось такою теоремою Колмогорова і Хінчіна ([64, с. 371]): *Нехай* (η_n) *послідовність дійсних незалежних випадкових величин таких, що* $\mathbf{E}\eta_n = 0$ $(n \geq 0)$. *Якщо* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}\eta_n^2 < +\infty$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \eta_n$ *збіжний м.н.*

Якщо тепер (ζ_n) – послідовність комплекснозначних незалежних випадкових величин таких, що

$$\mathbf{E}\zeta_n = 0 \ (n \geq 0)$$

і

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}|\zeta_n|^2 < +\infty,$$

то ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \zeta_n$ також збіжний м.н., позаяк за теоремою Колмогорова-

Хінчіна такими є обидва ряди

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\ \zeta_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\ \zeta_n.$$

Зауважимо, що

$$\mathbf{E}\big(f_n(\omega)e^{x\lambda_n(\omega)}\big) = a_n e^{x\lambda_n}\mathbf{E}\big(\xi_n(\omega)e^{x\delta_n(\omega)}\big) = 0$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in \mathbb{R}$. Крім цього,

$$\mathbf{E}\big(|f_n(\omega)|^2 e^{2x\lambda_n(\omega)}\big) = |a_n|^2 e^{2x\lambda_n}\mathbf{E}\big(|\xi_n(\omega)|^2 e^{2x\delta_n(\omega)}\big) \leq$$
$$\leq c_2^2 |a_n|^2 e^{2x\lambda_n}\mathbf{E}\big(e^{2x\delta_n(\omega)}\big) \leq c_2^2 |a_n|^2 e^{2x\lambda_n} C_1(2x).$$

Тому, за Теоремою Колмогорова-Хінчіна, якщо $x < \sigma(F_3)$, то ряд $\sum f_n(\omega)e^{x\lambda_n(\omega)}$ – збіжний м.н. Тому,

$$\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) \geq \sigma(F_3) \quad \text{м.н.}$$

Якщо припустити, що виконується умова $(\forall n)(\forall x) : \ \mathbf{E}(e^{x\delta_n}) \geq C_1(x) > 0$, то

$$\mathbf{D}\big(f_n(\omega)e^{x\lambda_n(\omega)}\big) = \mathbf{E}\big(|f_n(\omega)|^2 e^{2x\lambda_n(\omega)}\big) =$$
$$= |a_n|^2 e^{2x\lambda_n}\mathbf{E}\big(|\xi_n(\omega)|^2 e^{2x\delta_n(\omega)}\big) \geq$$
$$\geq c_1^2 |a_n|^2 e^{2x\lambda_n}\mathbf{E}\big(e^{2x\delta_n(\omega)}\big) \geq c_1^2 |a_n|^2 e^{2x\lambda_n} C_2(2x).$$

Якщо

$$x = \sigma_{\text{зб}}(F,\omega) - \varepsilon < \sigma_{\text{зб}}(F,\omega) \leq \sigma_\mu(F,\omega) \text{ м.н.},$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне, то ряд

$$\sum f_n(\omega)e^{x\lambda_n(\omega)}$$

– збіжний м.н. Тому, за Теоремою Колмогорова-Хінчіна, ряд

$$\sum \mathbf{D}\big(f_n(\omega)e^{x\lambda_n(\omega)}\big) < +\infty$$

і, отже, ряд

$$\sum |a_n|^2 e^{2x\lambda_n} < +\infty.$$

Звідси,

$$x = \sigma_{\text{зб}}(F, \omega) - \varepsilon < \sigma(F_3),$$

звідки, спрямовуючи $\varepsilon \to +0$, одержуємо, що

$$\sigma_{\text{зб}}(F, \omega) \le \sigma(F_3) \quad \text{м.н.}$$

Остаточно отримуємо, що $\sigma_{\text{зб}}(F, \omega) = \sigma(F_3)$ м.н. □

Теорема 2.2. *Нехай* $(\xi_n) \in \Theta$, $(\delta_n) \in \Delta$, *а* $F \in \mathcal{D}$ *з коефіцієнтами* $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ *і показниками* $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k \colon k \ge 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $f_k(\omega) = a_k \xi_k(\omega)$.

1. *Якщо* $\left(\xi_k e^{x\delta_k}\right)$ *– послідовність незалежних випадкових величин для кожного* $x \in \mathbb{R}$, *то* $\sigma(F, \omega) \ge \sigma(F_4)$ *м.н.*
2. *Якщо додатково припустити, що*

$$(\forall x, x < \sigma(F, \omega))(\exists a > 0)(\forall n \ge 1) \colon \mathbf{P}\{\omega \colon |a_n| e^{x\lambda_n(\omega)} < a\} = 1$$

і $(\forall n \in \mathbb{N}) \colon |\xi_n(\omega)| = c \ne \infty$ *м.н., а також* $(\exists C_3(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}) : \ \mathbf{D} e^{x\delta_n} \ge C_3(x)$, *то* $\sigma(F, \omega) = \sigma(F_4)$ *м.н.*

Доведення Теореми 2.2. Зауважимо, що

$$\mathbf{E}\left(|f_n(\omega)| e^{x\lambda_n(\omega)}\right) \le c_2 |a_n| e^{x\lambda_n} \mathbf{E}\left(e^{x\delta_n(\omega)}\right) \le c_2 |a_n| e^{x\lambda_n} C_1(x)$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in \mathbb{R}$, а також знову

$$\mathbf{D}\left(|f_n(\omega)| e^{x\lambda_n(\omega)}\right) \le \mathbf{E}\left(|f_n(\omega)|^2 e^{2x\lambda_n(\omega)}\right) \le c_2^2 |a_n|^2 e^{2x\lambda_n} C_1(2x).$$

Тому, за теоремою про два ряди ([64, с.373]), якщо $x < \min\{\sigma(F_3), \sigma(F_4)\}$, то ряд

$$\sum |f_n(\omega)| e^{x\lambda_n(\omega)}$$

– збіжний м.н. Тому, враховуючи, що за твердженням 2.13,

$$\min\{\sigma(F_3), \sigma(F_4)\} = \sigma(F_4),$$

отримуємо, що

$$\sigma(F, \omega) \ge \min\{\sigma(F_3), \sigma(F_4)\} = \sigma(F_4) \quad \text{м.н.}$$

Якщо додатково припустити, що $|f_n(\omega)| = c|a_n|$ м.н., то

$$\mathbf{E}\big(|f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)}\big) = c|a_n|e^{x\lambda_n}\mathbf{E}\big(e^{x\delta_n(\omega)}\big) \geq c|a_n|e^{x\lambda_n}C_2(x)$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in \mathbb{R}$, а також, що

$$\mathbf{D}\big(|f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)}\big) = c^2|a_n|^2e^{2x\lambda_k}\mathbf{D}\big(e^{x\delta_n(\omega)}\big) \geq C_3(x)c^2|a_n|^2e^{2x\lambda_k}.$$

Тобто, наступні два ряди збіжні

$$\sum \mathbf{E}\big(|f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)}\big) < +\infty, \ \sum \mathbf{D}\big(|f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)}\big) < +\infty \quad (2.26)$$

тоді і тільки тоді, коли збіжні такі два ряди

$$\sum |a_n|e^{x\lambda_n} < +\infty, \ \ \sum |a_n|^2e^{2x\lambda_n} < +\infty. \quad (2.27)$$

Якщо тепер $x = \sigma(F,\omega) - \varepsilon < \sigma(F,\omega)$, де $\varepsilon > 0$ – довільне, то

$$(\exists a > 0)(\forall n \geq 1)\colon \mathbf{P}\{\omega\colon |f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)} < ac\} = \\ = \mathbf{P}\{\omega\colon |a_n|e^{x\lambda_n(\omega)} < a\} = 1.$$

Отже, за теоремою про два ряди, ряди з дисперсій і математичних сподівань в (2.26) є збіжними, а тому, збіжними є обидва ряди в (2.27). Звідси,

$$x = \sigma(F,\omega) - \varepsilon \leq \min\{\sigma(F_3), \sigma(F_4)\} = \sigma(F_4).$$

Залишається спрямувати $\varepsilon \to +0$. □

Зауваження 2.8. Якщо крім всього припустити, що (δ_n) – однаково розподілені, то $\mathbf{D}\big(e^{x\delta_n(\omega)}\big) = d(x) \leq C_1(2x) \in (0, +\infty)$.

2.3 Абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими попарно незалежними показниками

Нехай як і вище $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — ймовірнісний простір, а $\Lambda = \big(\lambda_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ та $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$, відповідно, послідовності невід'ємних та комплекснозначних випадкових величин на ньому;
$\mathcal{D}(\Lambda)$ позначимо клас формальних випадкових рядів Діріхле вигляду (2.1)

$$F(z) = F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)}$$

($z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega$), що при фіксованому $\omega = \omega_0$ є звичайним (детермінованим) рядом Діріхле; $\mathcal{D} = \bigcup_\Lambda \mathcal{D}(\Lambda)$. Нагадаємо також, що через $\sigma_{\text{зб}}(F, \omega)$ і $\sigma(F, \omega)$ позначаємо відповідно абсциси збіжності і абсолютної збіжності цього ряду при фіксованому $\omega \in \Omega$, а $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ позначає числову послідовність таку, що $0 \le \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow +\infty$ ($1 \le k \uparrow +\infty$), а $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ – підклас рядів з класу $\mathcal{D}$ з фіксованою послідовністю показників Λ_+.

Вище ми довели таке твердження 2.3 (у випадку рядів Діріхле з монотонно зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників Λ_+ це твердження див. в [24, 25]):

Нехай $F \in \mathcal{D}$. Тоді

$$\sigma_{\text{зб}}(F, \omega) \le \alpha_0(\omega) \stackrel{def}{=} \varliminf_{k \to +\infty} \frac{-\ln |f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}$$

для всіх $\omega \in \Omega$, а для довільних функцій $\gamma, \delta \colon \Omega \to \mathbb{R}$ і всіх $\omega \in \Omega$ таких, що $\gamma(\omega) \ge 0$ і виконується умова (2.4)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty$$

виконуються нерівності

$$\sigma(F, \omega) \ge \gamma(\omega)\alpha_0(\omega) - \delta(\omega) \ge \gamma(\omega)\sigma_{\text{зб}}(F, \omega) - \delta(\omega).$$

Вище вже відзначалося, що з умови (2.4) випливає, що для такого ω виконується

$$(\gamma(\omega)-1)\ln|f_k(\omega)|+\delta(\omega)\lambda_k(\omega)\to+\infty$$

$(k\to+\infty)$, але при цьому, взагалі кажучи, нема жодних окремих умов на послідовності $\mathbf{f}$ та Λ.

У статтях [26, 27] доведено такі теореми.

Теорема 2.3 ([26, 27]). *Нехай $\tau(\Lambda_+)=0$ і $F\in\mathcal{D}(\Lambda_+)$. Припустимо, що $\big(|f_k(\omega)|\big)$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $F_k(x)\overset{def}{=}P\{\,\omega:|f_k(\omega)|<x\}$, $x\in\mathbb{R}$, $k\geq 0$. Виконуються наступні твердження:*

a) *Якщо $\sigma(\omega)=\sigma(F,\omega)\geq\rho\in(-\infty,+\infty)$ м.н., то*

$$(\forall\varepsilon>0):\quad \sum_{k=2}^{+\infty}(1-F_k((e^{-\rho}+\varepsilon)^{\lambda_k}))<\infty;$$

b) *Якщо існує послідовність (δ_k) така, що $\delta_k>-\infty$ $(k\geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty}\delta_k=e^{-\rho}$, $\rho\in(-\infty,+\infty]$, і*

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(1-F_k(\delta_k^{\lambda_k}))=+\infty,$$

то $\sigma(F,\omega)\leq\rho$ м.н.

Теорема 2.4 ([26, 27]). *Нехай $\tau(\Lambda_+)=0$ і $F\in\mathcal{D}(\Lambda_+)$.*

a) *Якщо існують $\rho\in(-\infty,+\infty)$ і послідовність (ε_k) такі, що $\varepsilon_k\to+0$ $(k\to+\infty)$ і*

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(1-F_k((e^{-\rho}+\varepsilon_k)^{\lambda_k}))<\infty,$$

то $\sigma(F,\omega)\geq\rho$ м.н.

b) *Якщо $\sigma(F,\omega)=-\infty$ м.н., то*

$$(\forall E>1):\quad \sum_{k=2}^{+\infty}(1-F_k(E^{\lambda_k}))=+\infty.$$

Виявляється, що у випадку рядів з класу $\mathcal{D}$ з випадковими показниками і випадковими коефіцієнтами можна довести подібні твердження. Власне, це і є нашою подальшою метою.

Зазначимо, що дане дослідження логічно продовжує виконані недавно дослідження про радіуси збіжності випадкових лакунарних степеневих рядів ([26]) та абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами ([27]).

Деякі приклади. Розглянемо формальний випадковий ряд Діріхле

$$F_0(z,\omega)=\sum_{k=2}^{+\infty} g_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)},$$

$$\lambda_k(\omega)=\ln(k+r_k(\omega)),\ g_k(\omega)=(-1)^k e^{a\lambda_k(\omega)},$$

де $a\in\mathbb{R}, a\notin(-1;0]$, $(r_k(\omega))$ — послідовність Радемахера. Для цього ряду

$$\alpha_0(\omega)=\varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln g_k(\omega)}{\lambda_k(\omega)}=$$

$$=\varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln|(-1)^k e^{a\lambda_k(\omega)}|}{\lambda_k(\omega)}=-a,$$

$$F_0(z,\omega)=\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k e^{a\lambda_k(\omega)+z\lambda_k(\omega)}=$$

$$=\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k(k+r_k(\omega))^{z+a},$$

$$\sigma_{\text{зб}}(F_0,\omega)=-a,\ \sigma_{\text{а}}(F_0,\omega)=-a-1.$$

Виберемо $\gamma_1(\omega)=-\frac{1}{a}-\varepsilon$, де ε — довільне число таке, що $\gamma_1(\omega)\le 1$ і $a\varepsilon>0$. Тоді

$$\sum_{k=2}^{+\infty}|g_k(\omega)|^{\gamma_1(\omega)}=\sum_{k=2}^{+\infty}(k+r_k(\omega))^{a(-\frac{1}{a}-\varepsilon)}=$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} (k + r_k(\omega))^{-1-a\varepsilon} < +\infty,$$

$$\sigma_{\text{a}}(F_0, \omega) - (1 - \gamma_1(\omega))\alpha_0(\omega) =$$

$$= \sigma_{\text{a}}(F_0, \omega) - (1 - \gamma_1(\omega))\sigma_{\text{зб}}(F_0, \omega) =$$

$$= -a - 1 - \Big(1 + \frac{1}{a} + \varepsilon\Big)(-a) = \varepsilon a \geq 0.$$

З довільності ε, а отже й $a\varepsilon$, отримуємо, що нерівність (2.14) є точною.

Вибравши $\gamma_1(\omega) = -\frac{1}{a} + \varepsilon$, де ε — довільне число таке, що $\gamma_1(\omega) \leq 1$ і $a\varepsilon > 0$, отримаємо, що, взагалі кажучи, умову (2.7) послабити не можна.

Тепер стосовно Твердження 2.8. Виберемо $\delta(\omega) = 1 + \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 > 0$. Тоді

$$\sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} = \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-(1+\varepsilon_0)\ln(k+r_k(\omega))} =$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k + r_k(\omega))^{1+\varepsilon_0}} < +\infty,$$

$$\sigma_{\text{a}}(F_0, \omega) - \sigma_{\text{зб}}(F_0, \omega) + \delta(\omega) =$$

$$= -a - 1 + a + 1 + \varepsilon_0 = \varepsilon_0.$$

З довільності ε_0 випливає точність нерівності (2.16). Вибираючи $\delta(\omega) = 1 - \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 \in (0; 1)$, отримаємо, що, взагалі кажучи, умову (2.15) послабити не можна.

Нескладно переконатись, що у твердженні 2.7: $\gamma_1(\omega) = h_1(\omega) = h_2(\omega) = -\frac{1}{a}$ і, отже,

$$\sigma(F_0, \omega) = (1 - \gamma_1(\omega))\sigma_{\text{зб}}(F_0, \omega),$$

тобто, нерівність (2.14) є точною.

2.4 Ряди з випадковими показниками і коефіцієнтами

У цьому пункті розглянемо ряди Діріхле з випадковими показниками і коефіцієнтами. Власне, розглянемо випадок

$$f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega) \ (k \geq 0).$$

Твердження 2.15. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має коефіцієнти вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Якщо виконуються умови*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{2.28}$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\ln|a_k|} = 0, \ \varlimsup_{k\to\infty} \left|\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right| \leq \delta(\omega) < 1 \quad \text{м.н.},$$

то м.н.

$$\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma(F,\omega) = \alpha_0^*(\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)}. \tag{2.29}$$

Доведення Твердження 2.15. Зауважимо спочатку, що

$$0 \leq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\big|\ln|f_k(\omega)|\big|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\big|\ln|a_k|\big|} \times$$
$$\times \left(\varliminf_{k\to+\infty} \left|1 + \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right| \right)^{-1} \leq$$
$$\leq \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\big|\ln|a_k|\big|} \times$$
$$\times \left(1 - \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{|\ln|Z_k(\omega)||}{|\ln|a_k||}\right)^{-1} \leq$$
$$\leq \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\big|\ln|a_k|\big|} \cdot \big(1 - \delta(\omega)\big)^{-1} = 0,$$

звідки $\ln k = o(\ln|f_k(\omega)|)$ $(k \to +\infty)$ м.н. Далі, за умовою (2.28) м.н.

$$\alpha_0(\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} =$$

$$= \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} + \lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} =$$
$$= \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} = \alpha_0^*(\omega).$$

Тому, за Твердженням 2.11 отримуємо, що $\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma_a(F,\omega) = \alpha_0(\omega) = \alpha_0^*(\omega)$ м.н. □

Відзначимо також такий варіант Твердження 2.15.

Твердження 2.16. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має коефіцієнти вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Якщо виконуються умови*

$$\ln k = o(\ln|a_k|) \quad і \quad \ln|Z_k(\omega)| = o(\ln|a_k|) \quad (k\to+\infty) \quad \text{м.н.},$$

то м.н. виконуються рівності (2.29).

Доведення Твердження 2.16. Зауважимо, що за умовою

$$\alpha_0(\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} =$$
$$= \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} \cdot (1+o(1)) = \alpha_0^*(\omega) \quad \text{м.н.},$$

а також

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\big|\ln|a_k Z_k(\omega)|\big|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{|\ln|a_k||} \cdot (1+o(1)) = 0 \quad \text{м.н.}$$

Тому, за Твердженням 2.11 знову отримуємо, що $\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma_a(F,\omega) = \alpha_0(\omega) = \alpha_0^*(\omega)$ м.н. □

З люб'язного дозволу співавтора Куриляка А.О. наведемо наступне твердження зі статті [17, Твердження 5].

Твердження 2.17. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, має коефіцієнти вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Якщо виконуються умови $\lim\limits_{k\to\infty} \ln k/\ln|a_k| = 0$, $\alpha_0^*(\omega) > 0$ м.н.,*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|} = \delta_1(\omega) < +\infty \quad \text{м.н.},$$

$$\varliminf_{k\to\infty}\left|1+\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right|\neq 0 \quad \text{м.н.},$$

то м.н.

$$\sigma_{зб}(F,\omega)=\sigma(F,\omega)\leq(1+\delta_1(\omega))\alpha_0^*(\omega).$$

Твердження 2.15 дає змогу довести такі теореми 2.5 і 2.6.

Теорема 2.5. *Нехай $F\in\mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд (2.1), а її коефіцієнти мають вигляд $f_k(\omega)=a_kZ_k(\omega)$ і виконуються умови Твердження 2.15. Припустимо, що $\big(\lambda_k(\omega)\big)$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу*

$$F_k(x)\stackrel{def}{=}\mathbf{P}\{\omega:\lambda_k(\omega)<x\},\ x\in\mathbb{R},\ k\geq 0.$$

Виконуються наступні твердження:

a) *i) Якщо $\sigma(\omega)=\sigma(F,\omega)\geq\rho\in(0,+\infty)$ м.н., то*

$$(\forall\varepsilon\in(0,\rho)):\quad \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1-F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon})\Big)<\infty;$$

ii)Якщо $0\geq\sigma(\omega)=\sigma(F,\omega)\geq\rho\in(-\infty,0]$ м.н., то

$$(\forall\varepsilon>0):\quad \sum_{k=0}^{+\infty}F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon})<\infty;$$

b) *i) Якщо існує послідовність (δ_k) така, що $\delta_k\in(-\infty,0)$ $(k\geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty}\delta_k=-\rho$, $\rho\in(0,+\infty]$, і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1-F_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k})\Big)=+\infty,$$

то $\sigma(F,\omega)\leq\rho$ м.н.

ii) Якщо існує послідовність (δ_k) така, що $\delta_k\in(0,+\infty)$ $(k\geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty}\delta_k=\rho$, $\rho\in[0,+\infty]$, і

$$\sum_{k=0}^{+\infty}F_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k})=+\infty,$$

то $\sigma(F,\omega)\leq-\rho$ м.н.

Теорема 2.6. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, її коефіцієнти мають вигляд $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ і виконуються умови Твердження 2.15. Тоді виконуються твердження:*
a) *i) Якщо існують $\rho \in (0, +\infty)$ і послідовність (ε_k) такі, що $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho + \varepsilon_k})\big) < +\infty,$$

то $\sigma(F, \omega) \geq \rho$ м.н.
ii) Якщо існують $\rho \in (-\infty, 0]$ і послідовність (ε_k) такі, що $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ і

$$\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho + \varepsilon_k}) < +\infty,$$

то $\sigma(F, \omega) \geq \rho$ м.н.
b) *Якщо $\sigma(F, \omega) = -\infty$ м.н., то*

$$(\forall E > 1)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{1}{E}\ln|a_k|) = +\infty.$$

Доведення Теореми 2.5. За Твердженням 2.15 маємо рівність (2.29).

a) *i)* Оскільки $\sigma(F, \omega) \geq \rho \in (0, +\infty)$ м.н., то з (2.29) маємо, що $(\exists B \in \mathcal{A}, \mathbf{P}(B) = 1)(\forall \omega \in B)\colon$

$$\varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq -\rho,$$

а за означенням верхньої границі

$$(\forall \omega \in B)(\forall \varepsilon \in (0, \rho))(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant k^*(\omega))\colon$$

$$\lambda_k(\omega) < \frac{1}{(-\rho + \varepsilon)} \ln|a_k|, \tag{2.30}$$

Позначимо

$$A_k \stackrel{def}{=} \Big\{\omega\colon \lambda_k(\omega) \geq \frac{1}{(-\rho+\varepsilon)} \ln|a_k|\Big\}.$$

Зрозуміло, що

$$B \subset \overline{C} \stackrel{def}{=} \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k,$$

звідки

$$\mathbf{P}(\overline{C}) = 1,$$

а подія $\overline{C}$ полягає в тому, що "серед подій послідовності (A_k) відбувається скінченна їх кількість". Оскільки з попарної незалежності випадкових величин $(\lambda_k(\omega))$ випливає попарна незалежність подій (A_k), то за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі ([37–39], [32, с.84])

$$\sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) < +\infty.$$

Залишається врахувати, що

$$\mathbf{P}(A_k) = 1 - F_k\Big(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon}\Big).$$

a) *ii)* Якщо $0 \geq \sigma(\omega, F) \geq \rho \in (-\infty, 0]$ м.н., то замість нерівності (2.30) отримаємо

$$(\forall\omega \in B, \mathbf{P}(B) = 1)(\forall\varepsilon > 0)(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*(\omega))$$

нерівність

$$\lambda_k(\omega) > \frac{1}{(-\rho+\varepsilon)} \ln|a_k|,$$

а, отже, ввівши позначення

$$A_k \stackrel{def}{=} \Big\{\omega\colon \lambda_k(\omega) \leq \frac{1}{(-\rho+\varepsilon)} \ln|a_k|\Big\}$$

й міркуючи як і вище, за другою частиною леми Бореля-Кантелі отримаємо, що

$$\sum_{k=0}^{+\infty} F_k\Big(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon}\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) < +\infty$$

Цим завершується доведення п.**a)**.

b) $i)$ Позначимо

$$A_k \stackrel{def}{=} \Big\{\omega\colon \lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln|a_k|}{\delta_k}\Big\}.$$

Тоді

$$\sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k})\big) = +\infty$$

і за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі ([32,37–39]) $\mathbf{P}(\overline{C}) = 0$, тобто, $\mathbf{P}(C) = 1$, де

$$C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k.$$

Звідси,

$$(\forall\omega \in C)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists k_N(\omega) \geq N)\colon$$
$$\lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln|a_k|}{\delta_k} \quad (k = k_N(\omega)),$$

тому,

$$\frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq -\delta_k \quad (k = k_N(\omega),\ N \geq 1),$$

звідки, остаточно $\forall\omega \in C$:

$$\sigma(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq$$
$$\leq \varliminf_{\substack{N\to+\infty,\\ k=k_N(\omega)}} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq \varliminf_{\substack{N\to+\infty,\\ k=k_N(\omega)}} (-\delta_k) \leq$$

$$\leq -\varlimsup_{\substack{N\to+\infty,\\ k=k_N(\omega)}} \delta_k \leq -\varliminf_{k\to+\infty} \delta_k = \rho.$$

b) *ii*) Позначимо тепер

$$A_k \stackrel{def}{=} \left\{\omega\colon \lambda_k(\omega) < \frac{\ln|a_k|}{\delta_k}\right\}$$

і повторимо міркування з доведення п.**b)** *i*). Тоді

$$\sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k}) = +\infty$$

і за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі $\mathbf{P}(\overline{C}) = 0$, тобто, $\mathbf{P}(C) = 1$, де

$$C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k.$$

Звідси,

$$(\forall\omega \in C)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists k_N(\omega) \geq N)\colon$$
$$\lambda_k(\omega) < \frac{\ln|a_k|}{\delta_k} \quad (k = k_N(\omega)),$$

тому,

$$\frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} < -\delta_k \quad (k = k_N(\omega),\ N \geq 1),$$

звідки, остаточно $\forall\omega \in C$, тобто, м.н.

$$\sigma(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq$$
$$\leq \varliminf_{\substack{N\to+\infty,\\ k=k_N(\omega)}} \frac{-\ln|a_k(\omega)|}{\lambda_k} \leq \varliminf_{\substack{N\to+\infty,\\ k=k_N(\omega)}} (-\delta_k) \leq$$
$$\leq -\varlimsup_{\substack{N\to+\infty,\\ k=k_N(\omega)}} \delta_k \leq -\varliminf_{k\to+\infty} \delta_k = -\rho.$$

Теорему 2.5 повністю доведено.

Доведення Теореми 2.6. Знову, як і вище у доведенні Теореми 2.5, за Твердженням 2.15 маємо рівність (2.29).

i) Позначимо

$$A_k = \big\{\omega\colon \lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}\big\}.$$

Враховуючи, що

$$1 - F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}) = \mathbf{P}(A_k),$$

з умови отримаємо, що

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) < \infty,$$

і за першою частиною леми Бореля-Кантелі (див., наприклад, [50, 51]) $\mathbf{P}(\overline{C}) = 1$, $C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$. Оскільки,

$$\overline{C} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k,$$

то для кожного $\omega \in \overline{C}$ існує $k = k^*(\omega)$ таке, що $\omega \in \overline{A}_k$ і $-\rho+\varepsilon_k < 0$ для всіх $k \geq k^*(\omega)$, тобто,

$$(\forall k \geq k^*(\omega))\colon \lambda_k(\omega) < \frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}.$$

Звідки,

$$\frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} > \rho - \varepsilon_k$$

і, тому, м.н.

$$\sigma(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} \geq \varliminf_{k\to+\infty} (\rho - \varepsilon_k) = \rho. \tag{2.31}$$

а) ii) Введемо позначення

$$A_k \stackrel{def}{=} \Big\{\omega\colon \lambda_k(\omega) < \frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}\Big\}.$$

За умовою

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) < +\infty.$$

Тому, за першою частиною леми Бореля-Кантелі

$$\mathbf{P}(\overline{C}) = 1, \quad C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k.$$

Звідки, як і вище для кожного $\omega \in \overline{C} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k$ існує $k = k^*(\omega)$ таке, що $\omega \in \overline{A}_k$ і $-\rho + \varepsilon_k > 0$ для всіх $k \geq k^*(\omega)$, тобто,

$$(\forall k \geq k^*(\omega))\colon \lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k}.$$

Звідки,

$$\frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} > \rho - \varepsilon_k$$

і, тому, знову маємо ланцюжок співвідношень (2.31).

Пункт **a)** Теореми 2.6 доведено повністю.

b) За умовою $\sigma(F, \omega) = -\infty$ м.н. Тому, за означенням верхньої границі

$$\varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} = +\infty \text{ м.н.}$$

маємо, що $(\exists B \in \mathcal{A},\ \mathbf{P}(B) = 1)(\forall \omega \in B)(\forall E > 1)(\forall N \in \mathbb{Z}_+)(\exists k_N(\omega) \geq N, k_N(\omega) \in \mathbb{N})\colon$

$$\lambda_k(\omega) < \frac{1}{E} \ln |a_k| \quad (k = k_N(\omega)).$$

Звідси,

$$B \subset C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k,$$

де

$$A_k = \{\omega : \lambda_k(\omega) < \frac{1}{E} \ln |a_k|\},$$

а, тому, $\mathbf{P}(C) = 1$, звідки $\mathbf{P}(\overline{C}) = 0$. Отже, за першою частиною леми Бореля-Кантелі отримуємо, що

$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) = +\infty.$$

Залишається пригадати знову, що $\mathbf{P}(A_k) = F_k(\frac{1}{E}\ln|a_k|)$. Теорему 2.6 доведено повністю.

Деякі наслідки. Наведемо деякі наслідки. Якщо в теоремах 2.5 і 2.6 вибрати $Z_k(\omega) \equiv 1$, то пункт **a)** Теореми 2.5 дає Теорему 7 з [16] (див. також [15, Theorem 3] та див. нижче п.**a)** Теореми 2.7), а п. **a)** теореми 2.6 дає Теорему 9 з [16] (див. також [15, Theorem 4] та див. нижче п.**a)** Теореми 2.8). Зрозуміло, що те ж саме отримаємо, якщо $|Z_k(\omega)| = 1$ м.н., або $0 < c_1 \le |Z_k(\omega)| < c_2 < +\infty$ м.н., або ще загальніше, коли

$$\ln|Z_k(\omega)| = o(\ln|a_k|) \quad (k \to +\infty) \quad \text{м.н.}$$

Отже, отримуємо у вигляді наслідків такі твердження.

Наслідок 2.1. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд (2.1), а її коефіцієнти мають вигляд $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ і виконуються умови*

$$\ln k = o(\ln|a_k|) \;\; i \;\; 0 < c_1 \le |Z_k(\omega)| \le c_2 < +\infty \quad (k \to +\infty) \;\; \text{м.н.}.$$

Нехай також $\big(\lambda_k(\omega)\big)$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу

$$F_k(x) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\omega : \lambda_k(\omega) < x\}, \; x \in \mathbb{R}, \; k \ge 0.$$

Тоді виконуються всі твердження з Теореми 2.5, тобто:
a) *i) Якщо $\sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \ge \rho \in (0,+\infty)$ м.н., то*

$$(\forall \varepsilon \in (0,\rho)): \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon})\big) < \infty;$$

ii) Якщо $0 \ge \sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \ge \rho \in (-\infty,0]$ м.н., то

$$(\forall \varepsilon > 0): \quad \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon}) < \infty;$$

b) *i) Якщо існує послідовність* (δ_k) *така, що* $\delta_k \in (-\infty, 0)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \delta_k = -\rho$, $\rho \in (0, +\infty]$, *і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k})\big) = +\infty,$$

то $\sigma(F, \omega) \leq \rho$ *м.н.*
ii) Якщо існує послідовність (δ_k) *така, що* $\delta_k \in (0, +\infty)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \delta_k = \rho$, $\rho \in [0, +\infty]$, *і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k}) = +\infty,$$

то $\sigma(F, \omega) \leq -\rho$ *м.н.*

Наслідок 2.2. *Нехай* $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *її коефіцієнти мають вигляд* $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ *і виконуються умови*

$$\ln k = o(\ln|a_k|) \;\; і \;\; 0 < c_1 \leq |Z_k(\omega)| \leq c_2 < +\infty \quad (k \to +\infty) \;\; \text{м.н.}.$$

Нехай також $\big(\lambda_k(\omega)\big)$ *— послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу*

$$F_k(x) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\omega : \lambda_k(\omega) < x\}, \; x \in \mathbb{R}, \; k \geq 0.$$

Тоді виконуються всі твердження з Теореми 2.6, тобто:
a) *i) Якщо існують* $\rho \in (0, +\infty)$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ *і* $\sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k})\big) < +\infty$, *то* $\sigma(F, \omega) \geq \rho$ *м.н.*
ii) Якщо існують $\rho \in (-\infty, 0]$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ *і* $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}) < +\infty$, *то* $\sigma(F, \omega) \geq \rho$ *м.н.*
b) $\sigma(F, \omega) = -\infty$ *м.н.* $\Longrightarrow (\forall E > 1)\colon \; \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{1}{E}\ln|a_k|) = +\infty$.

Зауваження 2.9. Якщо $\sigma(f, \omega) > \rho \in [0, +\infty)$ м.н., тоді з Твердження 2.11 за означенням $\alpha_0^*(\omega)$ отримуємо, що $\exists B, \; \mathbf{P}(B) = 1\colon$ $(\forall \omega \in B)(\exists \varepsilon^* = \varepsilon^*(\omega) > 0)(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant k^*(\omega))\colon$

$$\lambda_k(\omega) < \ln|f_k|/-(\rho + \varepsilon^*),$$

і подібними міркуваннями до міркувань, проведених вище, отримуємо, що $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1 - F_k(-\ln|f_k|/\rho)\big) < +\infty$, звідки у випадках $\rho > 0$ і $\rho = 0$ маємо, що $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1 - F_k(+0)\big) < +\infty$, тобто, зокрема, $\lim_{k\to+\infty} F_k(+0) = 1$. А саме, якщо $\varliminf\limits_{k\to+\infty} F_k(+0) < 1$, то $\sigma(f,\omega) \le 0$ м.н.

Наслідок 2.3. *Нехай $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$ послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $F_k(x)$, $k \ge 0$. Якщо $\varliminf\limits_{k\to+\infty} F_k(+0) < 1$ і $f_k \to 0$ $(k \to +\infty)$, тоді $\sigma(f,\omega) = 0$ м.н.*

Доведення Наслідку 2.3. За зауваженням 2.9, $\sigma(f,\omega) \le 0$ м.н. Залишається довести, що $\sigma(f,\omega) \ge 0$ м.н. Справді, $\lambda_k(\omega) \ge 0$, звідки

$$F_k(0) = \mathbf{P}\{\omega\colon \lambda_k(\omega) < 0\} = 0.$$

Отже,

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} F_k(\ln|f_k|/\varepsilon_k) < +\infty,$$

бо

$$\ln|f_k|/\varepsilon_k < 0 \quad (k \ge k_0).$$

Тому, за теоремою 2.6, $\sigma(f,\omega) \ge 0$ м.н. □

З Наслідку 2.3 негайно випливає твердження Наслідку 2.4.

Наслідок 2.4. *Нехай $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$ - послідовність попарно незалежних випадкових величин із функціями розподілу $F_k(x)$, $k \ge 0$. Якщо існує додатня випадкова величина $a(\omega)$ така, що*

$$(\forall x \ge 0)(\forall k \in \mathbb{Z}_+)\colon \quad F_k(x) \le F_a(x) := \mathbf{P}\{\omega\colon a(\omega) < x\}$$

і $F_a(+0) < 1$ та $f_k \to 0$ $(k \to +\infty)$, то $\sigma(f,\omega) = 0$ м.н.

Наслідок 2.5. *Нехай $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$ - послідовність випадкових величин із функціями розподілу $F_k(x)$, $k \geq 0$. Якщо $f_k \to 0$ $(k \to +\infty)$ і існують додатна випадкова величина $b(\omega)$ і $\rho > 0$ такі, що*

$$(\forall x \geq 0)(\forall k \in \mathbb{Z}_+)\colon \ F_k(x) \geq F_b(x) := \mathbf{P}\{\omega\colon b(\omega) < x\},$$

а також

$$\int_0^{+\infty} n_\mu(t\rho)\, dF_b(t) < +\infty,$$

де $n_\mu(t) = \sum_{\mu_k \leq t} 1$ є лічильною функцією послідовності $\mu_k = -\ln|f_k|$, то $\sigma(f,\omega) \geq \rho$ м.н.

Доведення Наслідку 2.5. Зауважимо, що

$$\sum_{k=k_0}^{n} \big(1 - F_k(\frac{\ln|f_k|}{-\rho+\varepsilon_k})\big) \leq \int_{\mu_{k_0}}^{\mu_n} \big(1 - F_k\big(t/\rho\big)\big) dn_\mu(t) \leq$$

$$\leq \int_{\mu_{k_0}}^{\mu_n} (1 - F_b(t/\rho)) dn_\mu(t) + O(1) =$$

$$= \int_{\mu_{k_0}/\rho}^{\mu_n/\rho} n_\mu(t\rho)\, dF_b(t) + O(1) \quad (n \to +\infty),$$

оскільки

$$-\ln\ |f_k|\ >\ 0 \quad (k \geq k_0)$$

і $\rho - \varepsilon_k < \rho$ для всіх $k \geq 0$. Тому, ряд

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} \left(1 - F_k\Big(\frac{\ln|f_k|}{-\rho+\varepsilon_k}\Big)\right)$$

– збіжний. Звідси за теоремою 2.6 **a**) *i*) завершуємо доведення. □

Наслідок 2.6. *Нехай $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$ зростаюча (м.н.) послідовність попарно незалежних випадкових величин і $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$. Якщо $F_0(+0) < 1$, де F_0 функція розподілу $\lambda_0(\omega)$, та $f_k \to 0$ $(k \to +\infty)$, тоді $\sigma(f,\omega) = 0$ м.н.*

Доведення наслідку 2.6. Зауважимо, що $F_{k+1}(x) \le F_k(x)$, оскільки $\lambda_k(\omega) \le \lambda_{k+1}(\omega)$ $(k \ge 0)$ м.н. Тому, $F_k(x) \le F_0(x)$ $(k \ge 0)$. Звідси, за Наслідком 2.4 з $a(\omega) = \lambda_0(\omega)$, отримуємо висновок Наслідку 2.6. $\square$

Застосування Твердження 2.16 замість Твердження 2.15 і дослівне повторення доведення теорем 2.5 і 2.6 з посиланням на Твердження 2.16 дає змогу довести такі дві теореми.

Теорема 2.7. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, її коефіцієнти мають вигляд $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ і виконуються умови*

$$\ln k = o(\ln |a_k|) \quad i \quad \ln |Z_k(\omega)| = o(\ln |a_k|) \quad (k \to +\infty) \quad \text{м.н.}$$

Припустимо, що $\big(\lambda_k(\omega)\big)$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $F_k(x) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\omega : \lambda_k(\omega) < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \ge 0$. Тоді виконуються наступні твердження:
a) *i)* $\sigma(\omega) = \sigma(F, \omega) \ge \rho \in (0, +\infty)$ *м.н.* $\Longrightarrow$ $(\forall \varepsilon \in (0, \rho))$: $\sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho+\varepsilon})\big) < \infty$;
ii) $0 \ge \sigma(\omega) = \sigma(F, \omega) \ge \rho \in (-\infty, 0]$ *м.н.* $\Longrightarrow$ $(\forall \varepsilon > 0)$: $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho+\varepsilon}) < \infty$;
b) *i) Якщо існує послідовність (δ_k) така, що $\delta_k \in (-\infty, 0)$ $(k \ge 0)$, $\varliminf\limits_{k \to +\infty} \delta_k = -\rho$, $\rho \in (0, +\infty]$, і $\sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_k(\frac{\ln |a_k|}{\delta_k})\big) = +\infty$, то $\sigma(F, \omega) \le \rho$ м.н.*
ii) Якщо існує послідовність (δ_k) така, що $\delta_k \in (0, +\infty)$ $(k \ge 0)$, $\varliminf\limits_{k \to +\infty} \delta_k = \rho$, $\rho \in [0, +\infty]$, і $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln |a_k|}{\delta_k}) = +\infty$, то $\sigma(F, \omega) \le -\rho$ м.н.

Теорема 2.8. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, її коефіцієнти мають вигляд $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ і виконуються умови*

$$\ln k = o(\ln |a_k|) \quad i \quad \ln |Z_k(\omega)| = o(\ln |a_k|) \quad (k \to +\infty) \quad \text{м.н.}$$

Тоді виконуються наступні твердження:
a) *i) Якщо існують $\rho \in (0, +\infty)$ і послідовність (ε_k) такі, що $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ і $\sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho+\varepsilon_k})\big) < +\infty$, то $\sigma(F, \omega) \ge \rho$ м.н.*

ii) Якщо існують $\rho \in (-\infty, 0]$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ *і* $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}) < +\infty$, *то* $\sigma(F,\omega) \geq \rho$ *м.н.*
b) $\sigma(F,\omega) = -\infty$ *м.н.* $\Longrightarrow (\forall E > 1)\colon\ \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{1}{E}\ln|a_k|) = +\infty$.

Пункти **b)** цих Теорем 2.7 і 2.8 є новими навіть у випадку $Z_k(\omega) = 1$, тобто, рядів Діріхле з випадковими показниками і детермінованими коефіцієнтами, як у статтях [15, 16].

Доведення Теорем 2.7 і 2.8. За умовою, з Твердження 2.15 випливає, що м.н.

$$\sigma_{\text{зб}}(f,\omega) = \sigma(f,\omega) = \alpha_0^*(\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)}.$$

Далі повторюємо дослівно міркування з доведення Теорем 2.5 і 2.6, відповідно. Переконаємося у цьому, наприклад, у випадку доведення п. **b)** *i)* з Теореми 2.7 і п.**b)** з Теореми 2.8. Розпочнемо з п.**b)** з Теореми 2.8.
b) За умовою $\sigma(F,\omega) = -\infty$ м.н. Тому, за означенням верхньої границі

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} = +\infty \text{ м.н.}$$

знову маємо, що $(\exists B \in \mathcal{A},\ \mathbf{P}(B) = 1)(\forall\omega \in B)(\forall E > 1)(\forall N \in \mathbb{Z}_+)(\exists k_N(\omega) \geq N, k_N(\omega) \in \mathbb{N})\colon$

$$\lambda_k(\omega) < \frac{1}{E}\ln|a_k| \quad (k = k_N(\omega)).$$

Звідси, $B \subset C \overset{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$, де $A_k = \{\omega : \lambda_k(\omega) < \frac{1}{E}\ln|a_k|\}$, а, тому, $\mathbf{P}(C) = 1$, звідки $\mathbf{P}(\overline{C}) = 0$. Отже, за першою частиною леми Бореля-Кантелі отримуємо, що

$$\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{1}{E}\ln|a_k|) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) = +\infty.$$

Отже, п. **b)** Теореми 2.8 доведено.

Теорема 2.7 **b)** *i*). Зберігаємо позначення з доведення п.**b)** *i*) у Теоремі 2.7. Позначаємо

$$A_k \stackrel{def}{=} \Big\{\omega\colon \lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln|a_k|}{\delta_k}\Big\}.$$

Тоді, знову

$$\sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k})\big) = +\infty$$

і за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі ([32,37–39]) $\mathbf{P}(\overline{C}) = 0$, тобто, $\mathbf{P}(C) = 1$, де

$$C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k.$$

Звідси, $(\forall\omega \in C)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists k_N(\omega) \geq N)$:

$$\lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln|a_k|}{\delta_k} \quad (k = k_N(\omega)),$$

тому,

$$\frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq -\delta_k \quad (k = k_N(\omega),\ N \geq 1),$$

звідки, знову маємо, що $\forall\omega \in C$:

$$\sigma(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq \varliminf_{\substack{N\to+\infty,\\ k=k_N(\omega)}} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq \varliminf_{\substack{N\to+\infty,\\ k=k_N(\omega)}} (-\delta_k) \leq$$

$$\leq -\varlimsup_{\substack{N\to+\infty,\\ k=k_N(\omega)}} \delta_k \leq -\varliminf_{k\to+\infty} \delta_k = \rho.$$

Решта пунктів обидвох Теорем 2.7 і 2.8 доводиться подібним повторенням доведення теорем 2.5 і 2.6. □

Маємо таке елементарне твердження, яке у статті [27] встановлене для рядів Діріхле з класу $f \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$.

Твердження 2.18. *Нехай $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$ ряд Діріхле, вигляду $f(z) = f(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Z_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)}$, де $(Z_k(\omega))$ послідовність комплексно-значних випадкових величин.*
1^0. *Якщо виконуються умови $\tau(\omega,\Lambda) = 0$ і*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = 0 \quad \text{м.н.}, \tag{2.32}$$

то м.н.

$$\sigma_{зб}(f,\omega) = \sigma(f,\omega) = \alpha_0^*(\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)}.$$

2^0. *У випадку $\alpha_0^*(\omega) = +\infty$ для рівності $\sigma(f,\omega) = +\infty$ м.н. достатньо, щоб виконувались умови $\tau(\omega,\Lambda) < +\infty$ і*

$$\varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} > -\infty \quad \text{м.н.} \tag{2.33}$$

.

Доведення. Твердження2.18 отримуємо негайно з нерівностей (2.17) з Твердження 2.9. □

У статті [13] є тільки п. 1^0 у випадку ряду Діріхле $f \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ вигляду

$$f(z) = f(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Z_k(\omega) e^{z\lambda_k}.$$

У статті [26] відзначається, що з твердження 2.18, зокрема випливають теореми 1 (при $\alpha_0 := \alpha_0^*(\omega) = +\infty$) і 3 (при $\alpha_0 = 0$) з [13], які доведені за таких умов на математичні сподівання

$$(\exists \alpha > 0, \beta > 0)\colon \ \sup\{\mathbf{E}|Z_k|^\alpha, \mathbf{E}|Z_k|^{-\beta}\colon \ k \geq 0\} < +\infty, \tag{2.34}$$

а також, що за нерівністю Б'єнейме-Чебишова (Bienayme-Chebyshev, [30, 31]) і лемою Бореля-Кантелі ([45], також за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі див. [32]) з умови (2.34) нескладно випливає, що м.н. для всіх достатньо великих k виконуються нерівності $k^{-\gamma} \leq |Z_k(\omega)| < k^\gamma$ з $\gamma = \max\{2/\alpha, 2/\beta\}$, а

якщо $\tau(\omega,\Lambda)=0$, то і умова (2.32). Подібно, якщо $\tau(\omega,\Lambda)<+\infty$, то з умови $(\exists\beta>0)\colon\ \sup\{\mathbf{E}|Z_k|^{-\beta}\colon\ k\ge 0\}<+\infty$ випливає умова (2.33).

Варто відзначити, що умова (2.32) випливає з умови на послідовність функцій розподілу випадкових величин $(|Z_k(\omega)|)$,

$$(\forall\varepsilon>0)\colon\ \sum_{k=0}^{+\infty}\big(1-F_k^*(e^{\varepsilon\lambda_k})+F_k^*(e^{-\varepsilon\lambda_k})\big)<+\infty,$$

де $F_k^*(x):=\mathbf{P}\{\omega\colon |Z_k(\omega)|<x\}$. Зокрема, із цієї умови випливає, що $\lim_{k\to+\infty}F_k^*(+0)=0$.

У статтях [28, 47, 48] у випадку незалежних випадкових величин $\mathbf{f}=(f_k)$, зокрема, узагальнювалось на клас $\mathcal{D}(\Lambda)$ твердження відомої гіпотези Блекуела для випадкових степеневих рядів, доведеної в [46] (див. також [45]). Крім цього, в [28] у випадку, коли $f_k(\omega)=a_kZ_k(\omega)$, $\tau(\Lambda_+)<+\infty$, $0<c_1\le|Z_k(\omega)|\le c_2<+\infty$ м.н. і $\mathbf{E}Z_k=0$ $(k\ge 0)$, доведено, що $\sigma_{\text{зб}}(f,\omega)\le\sigma(f,\omega)+\tau(\Lambda_+)/2$ м.н.

З огляду на Твердження 2.18, правильні такі повні аналоги теорем 2.7 і 2.8, в яких умови

$$\ln k=o(\ln|a_k|)\ \text{ і }\ \ln|Z_k(\omega)|=o(\ln|a_k|)\quad(k\to+\infty)\ \text{ м.н.}$$

заміняються на умови

$$\tau(\omega,\Lambda)=0\ \text{ і }\ \lim_{k\to+\infty}\frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}=0\quad\text{м.н.}$$

Теорема 2.9. *Нехай $F\in\mathcal{D}(\Lambda)$, її коефіцієнти мають вигляд $f_k(\omega)=a_kZ_k(\omega)$ і виконуються умови*

$$\tau(\omega,\Lambda)=0\ \ i\ \ \lim_{k\to+\infty}\frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}=0\quad\textit{м.н.}$$

Припустимо, що $\big(\lambda_k(\omega)\big)$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $F_k(x)\overset{def}{=}\mathbf{P}\{\omega:\lambda_k(\omega)<x\}$, $x\in\mathbb{R}$, $k\ge 0$. Тоді виконуються наступні твердження:

a) *i)* $\sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \geq \rho \in (0,+\infty)$ *м.н.* $\Longrightarrow (\forall \varepsilon \in (0,\rho))\colon \sum_{k=0}^{+\infty}\left(1 - F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon})\right) < \infty$;
ii) $0 \geq \sigma(\omega) = \sigma(F,\omega) \geq \rho \in (-\infty,0]$ *м.н.* $\Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\colon \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon}) < \infty$;
b) *i) Якщо існує послідовність* (δ_k) *така, що* $\delta_k \in (-\infty,0)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \delta_k = -\rho$, $\rho \in (0,+\infty]$, *і* $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(1 - F_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k})\right) = +\infty$, *то* $\sigma(F,\omega) \leq \rho$ *м.н.*
ii) Якщо існує послідовність (δ_k) *така, що* $\delta_k \in (0,+\infty)$ $(k \geq 0)$, $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \delta_k = \rho$, $\rho \in [0,+\infty]$, *і* $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{\delta_k}) = +\infty$, *то* $\sigma(F,\omega) \leq -\rho$ *м.н.*

Теорема 2.10. *Нехай* $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *її коефіцієнти мають вигляд* $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ *і виконуються умови*

$$\tau(\omega,\Lambda) = 0 \quad і \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = 0 \quad \text{м.н.}$$

Тоді виконуються наступні твердження:
a) *i) Якщо існують* $\rho \in (0,+\infty)$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ *і* $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(1 - F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k})\right) < +\infty$, *то* $\sigma(F,\omega) \geq \rho$ *м.н.*
ii) Якщо існують $\rho \in (-\infty,0]$ *і послідовність* (ε_k) *такі, що* $\varepsilon_k \to +0$ $(k \to +\infty)$ *і* $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon_k}) < +\infty$, *то* $\sigma(F,\omega) \geq \rho$ *м.н.*
b) $\sigma(F,\omega) = -\infty$ *м.н.* $\Longrightarrow (\forall E > 1)\colon \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{1}{E}\ln|a_k|) = +\infty$.

Доведення Теорем 2.9 і 2.10. За умовою, з Твердження 2.18 випливає, що м.н.

$$\sigma_{\text{зб}}(f,\omega) = \sigma(f,\omega) = \alpha_0^*(\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)}.$$

Далі повторюємо дослівно міркування з доведення Теорем 2.5 і 2.6, відповідно. Переконаємося у цьому, наприклад, у випадку доведення п. **a)** *i)* з Теореми 2.9.

a) *i)* Оскільки $\sigma(F,\omega) \geq \rho \in (0,+\infty)$ м.н., то з Твердження 2.18 маємо, що $(\exists B \in \mathcal{A}, \mathbf{P}(B) = 1)(\forall \omega \in B)\colon$

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln|a_k|}{\lambda_k(\omega)} = \sigma(f,\omega) \leq -\rho,$$

а за означенням верхньої границі $(\forall\omega \in B)(\forall\varepsilon \in (0,\rho))(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant k^*(\omega))$: виконується нерівність (2.30)

$$\lambda_k(\omega) < \frac{1}{(-\rho+\varepsilon)} \ln|a_k|,$$

Якщо позначити

$$A_k \stackrel{def}{=} \Big\{\omega\colon \lambda_k(\omega) \geq \frac{1}{(-\rho+\varepsilon)} \ln|a_k|\Big\},$$

то знову отримаємо, що

$$B \subset \overline{C} \stackrel{def}{=} \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}(\overline{C}) = 1.$$

Оскільки подія $\overline{C}$ полягає в тому, що "серед подій послідовності (A_k) відбувається скінченна їх кількість", а з попарної незалежності випадкових величин $(\lambda_k(\omega))$ випливає попарна незалежність подій (A_k), то за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі ([37–39], [32, с.84]) знову маємо, що

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\Big(\frac{\ln|a_k|}{-\rho+\varepsilon}\Big)\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) < +\infty.$$

Решта пунктів обидвох теорем доводиться подібним повторенням доведення теорем 2.5 і 2.6. $\square$

2.5 Числові характеристики зростання випадкових рядів Діріхле

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — ймовірнісний простір. Крім цього, нехай $\Lambda(\omega) = \big(\lambda_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ та $\mathbf{f}(\omega) = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ послідовності невід'ємних та комплекснозначних випадкових величин на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, відповідно, через $\Lambda = \big(\lambda_k\big)_{k=0}^{+\infty}$ позначатимемо послідовність попарно різних невід'ємних чисел, а через $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ – числову послідовність таку, що $0 \le \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow +\infty$ $(1 \le k \uparrow +\infty)$. Крім цього вважатимемо, що $\lambda_k(\omega) \ne \lambda_m(\omega)$ для всіх $n \ne k$ м.н. (майже напевно).

Надалі скрізь у цьому підрозділі через $\mathcal{D}(\Lambda)$ позначатимемо клас випадкових рядів Діріхле вигляду (2.1)

$$F(z) = F_\omega(z) = F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega),$$

таких, що $\sigma_\mu(F, \omega) := \sup\{x \in \mathbb{R}\colon f_k(\omega) e^{x\lambda_k(\omega)} \to 0\ (k \to +\infty)\} > -\infty$ м.н., що при фіксованому $\omega = \omega_0$ є звичайним (детермінованим) рядом Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{z\lambda_k}, \tag{2.35}$$

де $a_k = f_k(\omega_0),\ \lambda_k = \lambda_k(\omega_0)$. А основним об'єктом розгляду у даному підрозділі є випадкові цілі ряди Діріхле вигляду

$$F_\omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega). \tag{2.36}$$

Нехай $\mathcal{D} = \bigcup_\Lambda \mathcal{D}(\Lambda)$, а $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ – підклас рядів з класу $\mathcal{D}$ з фіксованою послідовністю показників Λ_+.

Зазначимо, що як у випадку рядів вигляду (2.35), так і випадкових рядів Діріхле вигляду (2.36) питання збіжності таких рядів досліджене у багатьох роботах з практично вичерпною повнотою

(див., наприклад, [24,25,40,42–44,56–60]). У статтях [12,13,26–28,45, 47] розглядалось питання про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з класу $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ у випадку $\tau(\Lambda_+) := \overline{\lim}_{k\to+\infty} \ln k/\lambda_k < +\infty$; з коефіцієнтами вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ в [12, 13, 28]. У випадку, коли $\tau(\Lambda_+) = 0$, а коефіцієнти ряду Діріхле $(f_k(\omega))$ є попарно незалежними в [26, 27] твердження про абсцису абсолютної збіжності отримані в термінах умов на функції розподілу $F_k(x) := \mathbf{P}\{\omega : |f_k(\omega)| < x\},\ x \in \mathbb{R},\ k \geq 0$. У зв'язку з дослідження областей збіжності випадкових кратних рядів Діріхле вкажемо також на статті [9, 24].

Дослідження зростання випадкових рядів Діріхле мають в цілому доволі фрагментарний вигляд (див., наприклад, [12, 13, 47, 65, 66]). Тут ми заповнюємо деякі прогалини для випадкових цілих рядів Діріхле, як вигляду (2.36), так і загального вигляду (2.1), які стосуються формул для обчислення R-порядків і R-типів таких рядів. Деякі з отриманих тверджень є новими навіть в інтерпретації для цілих рядів Діріхле з показниками Λ_+ і коефіцієнтами вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$.

Отже, якщо $F \in \mathcal{D}$ є цілим рядом Діріхле, то абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле (2.1) $\sigma(F, \omega) = +\infty$ м.н. Тоді, за Твердженням 2.1

$$\sigma(F, \omega) = \sigma_{\text{зб}}(F, \omega) = \sigma_\mu(F, \omega) = +\infty \quad \text{м.н.},$$

де $\sigma_{\text{зб}}(F, \omega)$ – абсциса збіжності ряду (2.1). Якщо ж додатково припустити, що

$$\varliminf_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) := \lambda(\omega) > 0 \quad \text{м.н.},$$

то за Твердженням 2.2

$$\sigma_\mu(F, \omega) = \alpha_0(F, \omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} \quad \text{м.н.}$$

З іншого боку, якщо

$$\tau(\Lambda,\omega) := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k(\omega)} = 0 \quad \text{м.н.}$$

або

$$h(\omega) := \lim_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{-\ln|f_k(\omega)|} = 0 \quad \text{м.н.},$$

і $F_\omega \in \mathcal{D}$ має вигляд (2.1), то за Твердженням 2.11

$$\sigma(F,\omega) = \sigma_{\text{зб}}(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) \quad \text{м.н.}$$

Наступне твердження є добре відомим у випадку рядів Діріхле вигляду (2.35) зі зростаючими показниками $\Lambda_+ = (\lambda_k)$.

Твердження 2.19. *нехай $F \in D$ і має вигляд (2.1). Для кожних фіксованих $\omega \in \Omega$, $x < \sigma_u(F,\omega)$ ($\sigma_u(F,\omega)$ – абсциса рівномірної збіжності ряду Діріхле) і для кожного $m \geq 0$*

$$f_m(\omega)e^{x\lambda_m(\omega)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} F_\omega(x+iy)e^{-i\lambda_m(\omega)y}dy. \tag{2.37}$$

Доведення. Для фіксованних $n \geq m \geq 0$ розглянемо експоненційний поліном $Q_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)}$. Тоді скінченну послідовність $(\lambda_k(\omega))_{k=0}^n$ при фіксованому ω можна впорядкувати за зростанням і, тому (див., наприклад, [43, с.13])

$$f_m(\omega)e^{x\lambda_m(\omega)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} Q_n(x+iy)e^{-i\lambda_m(\omega)y}dy. \tag{2.38}$$

Зауважимо спочатку, що при фіксованому $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2T}\Big|\int\limits_{-T}^{T} \big(F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big)e^{-i\lambda_m(\omega)y}dy\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\big|F_\omega(x+iy)-Q_n(x+iy)\big|dy \leq$$

$$\leq \sup\Big\{\big|F_\omega(x+iy)-Q_n(x+iy)\big|\colon y\in[-T,T]\Big\}.$$

Але, $F_\omega(x+iy) = Q_n(x+iy) + \big(F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big)$, тому, послідовно отримуємо

$$\Big|\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}F_\omega(x+iy)e^{-iy\lambda_m(\omega)}dy - f_m(\omega)e^{x\lambda_m(\omega)}\Big| \leq$$

$$\leq \Big|\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}Q_n(x+iy)e^{-i\lambda_m(\omega)y}dy - f_m(\omega)e^{x\lambda_m(\omega)}\Big| +$$

$$+\sup\Big\{\big|F_\omega(x+iy)-Q_n(x+iy)\big|\colon y\in[-T,T]\Big\},$$

звідки, за допомогою рівності (2.38), скориставшись рівномірною збіжністю

$$\sup\Big\{\big|F_\omega(x+iy)-Q_n(x+iy)\big|\colon y\in\mathbb{R}\Big\}\to 0 \quad (n\to+\infty),$$

отримуємо

$$\varlimsup_{T\to+\infty}\Big|\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}F_\omega(x+iy)e^{-iy\lambda_m(\omega)}dy - f_m(\omega)e^{x\lambda_m(\omega)}\Big| \leq$$

$$\leq \lim_{T\to+\infty}\Big|\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}Q_n(x+iy)e^{-i\lambda_m(\omega)y}dy - f_m(\omega)e^{x\lambda_m(\omega)}\Big| +$$

$$+\sup\Big\{\big|F_\omega(x+iy)-Q_n(x+iy)\big|\colon y\in\mathbb{R}\Big\} =$$

$$= \sup\Big\{\big|F_\omega(x+iy)-Q_n(x+iy)\big|\colon y\in\mathbb{R}\Big\}\to 0 \quad (n\to+\infty).$$

$\square$

Зауваження 2.10. У попередньому твердженні умову рівномірної збіжності при фіксованому $x \in \mathbb{R}$ можна замінити на істотно слабшу в загальному умову, зокрема, наприклад, можна вважати, що при фіксованому $x \in \mathbb{R}$ виконується

$$\varliminf_{n\to+\infty} \varlimsup_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \big|F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big| dy = 0.$$

Нехай L – клас неперервних функцій $\alpha\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ і таких, що $\alpha(x) \uparrow +\infty$ $(0 < x \uparrow +\infty)$. Для функції $\alpha \in L$ її R-порядком і R-типом називаємо відповідно величини

$$\rho[\alpha] := \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln \alpha(x)}{x}, \qquad T[\alpha] := \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{\exp\{\rho[\alpha]x\}}.$$

Для $x \in \mathbb{R}$ і цілого ряду Діріхле F вигляду (2.35) через

$$M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}, \quad \mu(x,F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n \geq 0\}$$

позначимо відповідно максимум модуля і максимальний член ряду.

Величинами R-порядку і R-типу цілого ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ вигляду (2.35) називають відповідно числа

$$\rho_F := \rho[\ln M(\cdot,F)], \qquad T_F := T[\ln M(\cdot,F)].$$

Нехай $\rho_\mu = \rho[\ln \mu]$, $T_\mu = T[\ln \mu]$, відповідно, R-порядок і R-тип максимального члена $\mu(x,F)$ ряду Діріхле. Для $x \in \mathbb{R}$ і цілого ряду Діріхле F_ω вигляду (2.1) при фіксованому $\omega \in \Omega$ у відповідних позначеннях пишемо

$$M(x,F_\omega) = M(x,F,\omega), \quad \mu(x,F_\omega) = \mu(x,F,\omega),$$
$$\rho_F(\omega), \quad T_F(\omega), \quad \rho_\mu(\omega), \quad T_\mu(\omega).$$

З рівності (2.37) негайно отримуємо такий стандартний аналог нерівності Коші (у випадку монотонної системи показників див.,

наприклад, теорема 1.5 [43])

$$\mu(x, F_\omega) \le M(x, F_\omega)$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тому, для R-порядків і R-типів маємо

$$\rho_\mu(\omega) \le \rho_F(\omega), \quad T_\mu(\omega) \le T_F(\omega).$$

Зауважимо, що якщо

$$\sup\{\lambda_k \colon k \ge 0\} := \gamma < +\infty,$$

то $\ln M(x, F_\omega) = O(x)$, $\ln \mu(x, F_\omega) = O(x)$ $(x \to +\infty)$. Тому скрізь надалі вважатимемо, що $\gamma = +\infty$.

Нескладно переконуємось. що правильне таке твердження. У випадку цілих рядів Діріхле $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ вигляду (2.35) це теорема 1 з [67, с.265].

Твердження 2.20. *Для кожного цілого ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}$ вигляду* (2.1) *виконується*

$$\rho_\mu(\omega) = k_F(\omega) := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)}{-\ln|f_k(\omega)|}.$$

Доведення. Для повноти картини наведемо доведення. Зауважимо-спочатку, що з того, що значення $F_\omega(0)$ м.н. скінченне, з необхідної умови збіжності відповідного ряду Діріхле вигляду (2.1) випливає, що

$$\ln|f_k(\omega)| \to -\infty \quad (k \to +\infty) \text{ м.н.}$$

Припустимо спочатку, що $k_F(\omega) < +\infty$ м.н. Тоді, $(\exists B \in \mathcal{A}, \mathbf{P}(B) = 1)$, що для кожного $\omega \in B$ за означенням верхньої границі, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $k_0 = k_0(\omega)$ таке, що для всіх $k \ge k_0$

$$\ln|f_k(\omega)| < -\frac{1}{\rho^*}\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega), \quad \rho^* = k_F(\omega) + \varepsilon.$$

Тоді, для фіксованого $x \in \mathbb{R}$

$$\ln\mu(x, F_\omega) \le \max\Big\{\max\{\ln|f_k(\omega)| + x\lambda_k(\omega) \colon 0 \le k \le k_0(\omega) - 1\},$$

$$\max\{-\frac{1}{\rho^*}\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)+x\lambda_k(\omega)\colon k\geq k_0(\omega)\}\Big\}.$$

Але,

$$\max\{-\frac{1}{\rho^*}\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)+x\lambda_k(\omega)\colon k\geq k_0(\omega)\}\leq$$
$$\leq\max\{-\frac{1}{\rho^*}t\ln t+tx\colon t\geq t_0(\omega)\},\quad t_0=t_0(\omega)=\lambda_{k_0(\omega)}.$$

Оскільки

$$\Big(-\frac{1}{\rho^*}t\ln t+tx\Big)'\Big|_{t=e^{\rho^*x-1}}=0,$$

то при для всіх x таких, що $e^{\rho^*x-1}\geq t_0$

$$\max\{-\frac{1}{\rho^*}t\ln t+tx\colon t\geq t_0(\omega)\}=$$
$$=(-\frac{1}{\rho^*}t\ln t+tx)\Big|_{t=e^{\rho^*x-1}}=\frac{1}{\rho^*}e^{\rho^*x-1}.$$

Тому, для кожного $\omega\in B$ і всіх $x\geq\frac{1+\ln t_0}{\rho^*}$

$$\ln\mu(x,F_\omega)\leq$$
$$\leq\max\Big\{\max\{\ln|f_k(\omega)|+x\lambda_k(\omega)\colon 0\leq k\leq k_0(\omega)-1\},\ \frac{1}{\rho^*}e^{\rho^*x-1}\Big\}\leq$$
$$\leq\max\Big\{\frac{1}{\rho^*}e^{\rho^*x-1},\ C_{k_0}+x\lambda_{k_0-1}\Big\},$$

де $C_{k_0}=\max\{\ln|f_k(\omega)|\colon 0\leq k\leq k_0(\omega)-1\}$. Звідки, для кожного $\omega\in B$

$$\rho_\mu(\omega)\leq\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln\Big(\max\Big\{\frac{1}{\rho^*}e^{\rho^*x-1},\ C_{k_0}+x\lambda_{k_0-1}\Big\}\Big)}{x}\leq\rho^*=k_F(\omega)+\varepsilon.$$

З довільності $\varepsilon>0$ отримуємо, що $\rho_\mu(\omega)\leq k_F(\omega)$ для кожного $\omega\in B$. У випадку $k_F(\omega)=+\infty$ нерівність очевидна.

Припустимо тепер, що $\rho_\mu(\omega)<+\infty$ м.н. Тоді, $(\exists B\in\mathcal{A},\mathbf{P}(B)=1)$, що для кожного $\omega\in B$ за означенням верхньої границі, для

довільного $\varepsilon > 0$ існує $x_0 = x_0(\omega)$ таке, що для всіх $x \geq x_0$ і для всіх $k \geq 0$

$$\ln|f_k(\omega)| \leq \ln\mu(x, F_\omega) - x\lambda_k(\omega) < e^{\rho^* x} - x\lambda_k(\omega), \quad \rho^* = \rho_\mu(\omega) + \varepsilon.$$

Звідси, для всіх $x \geq 0$ і для всіх $k \geq 0$

$$\ln|f_k(\omega)| <$$
$$< \min\Big\{\min\{\ln\mu(u, F_\omega) - u\lambda_k(\omega)\colon 0 \leq u \leq x_0\},\ e^{\rho^* x} - x\lambda_k(\omega)\Big\}.$$

Зауважимо тепер, що

$$\min\{\ln\mu(u, F_\omega) - u\lambda_k(\omega)\colon 0 \leq u \leq x_0\} \leq \ln\mu(x_0, F_\omega),$$

а при $x = \frac{1}{\rho^*}\ln\lambda_k(\omega)$

$$e^{\rho^* x} - x\lambda_k(\omega) = \lambda_k(\omega) - \frac{1}{\rho^*}\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega).$$

Тому, для всіх k таких, що $x = \frac{1}{\rho^*}\ln\lambda_k(\omega) \geq x_0$

$$\ln|f_k(\omega)| < \min\Big\{\ln\mu(x_0, F_\omega),\ \lambda_k(\omega) - \frac{1}{\rho^*}\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)\Big\}. \quad (2.39)$$

Для всіх $x \geq x_0$ і $k\colon\ \frac{1}{\rho^*}\ln\lambda_k(\omega) < x_0$

$$\ln|f_k(\omega)| < \min\Big\{\ln\mu(x_0, F_\omega),\ e^{\rho^* x} - x\lambda_k(\omega)\Big\}.$$

Отже, для всіх k таких, що $x = \frac{1}{\rho^*}\ln\lambda_k(\omega) \geq x_0$

$$-\ln|f_k(\omega)| > \max\Big\{-\ln\mu(x_0, F_\omega),\ -\lambda_k(\omega) + \frac{1}{\rho^*}\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)\Big\}$$

і для всіх $x \geq x_0$ і $k\colon\ \frac{1}{\rho^*}\ln\lambda_k(\omega) < x_0$

$$-\ln|f_k(\omega)| > \max\Big\{-\ln\mu(x_0, F_\omega),\ -e^{\rho^* x} + x\lambda_k(\omega)\Big\}$$

і після підстановки $x = x_0$

$$-\ln|f_k(\omega)| > \max\Big\{-\ln\mu(x_0, F_\omega),\ -e^{\rho^* x_0} + x_0\lambda_k(\omega)\Big\} >$$

$$> \max\Big\{ -\ln\mu(x_0, F_\omega),\ -e^{\rho^* x_0} + \frac{1}{\rho^*}\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)\Big\}$$

Позначимо

$$J_1 := \Big\{k\colon \frac{1}{\rho^*}\ln\lambda_k(\omega) \geq x_0\Big\}, \quad J_2 := \mathbb{N}\setminus J_1.$$

Множина $\{\lambda_k(\omega)\colon k \in J_2\}$ є обмеженою, тому, оскільки $-\ln|f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty)$, у випадку необмеженої множини J_2 маємо

$$\varliminf_{\substack{k\to+\infty\\ k\in J_2}} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)} = +\infty.$$

Далі, зауважимо, що з припущення $\sup\{\lambda_k\colon k \geq 0\} = +\infty$ випливає, що множина $\{\lambda_k(\omega)\colon k \in J_1\}$ є необмеженою, тому знову, оскільки $-\ln|f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty)$, маємо, що для кожної послідовності $k_j \to +\infty$, $k_j \in J_1$ такої, що $\lambda_k(\omega) \to +\infty$ $(k = k_j \to +\infty)$

$$\varliminf_{\substack{k=k_j\to+\infty\\ k_j\in J_1}} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)} \geq$$

$$\geq \varliminf_{\substack{k=k_j\to+\infty\\ k_j\in J_1}} \frac{\max\Big\{ -\ln\mu(x_0, F_\omega),\ -\lambda_k(\omega) + \frac{1}{\rho^*}\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)\Big\}}{\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)} = \frac{1}{\rho^*}.$$

Якщо ж для послідовності $k_j \to +\infty$, $k_j \in J_1$ відповідна послідовність $\Big(\lambda_{k_j}(\omega)\Big)$ э обмеженою, то знову отримаємо, що

$$\varliminf_{\substack{k=k_j\to+\infty\\ k_j\in J_1}} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)} = +\infty,$$

бо $-\ln|f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty)$.

Отже,

$$\frac{1}{k_F(\omega)} := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)} \geq$$

$$\geq \inf\left\{\varliminf_{\substack{k\to+\infty\\ k\in J_1}} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)},\ \varliminf_{\substack{k\to+\infty\\ k\in J_2}} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)}\right\} \geq \frac{1}{\rho^*}.$$

Звідси, $\rho^* = \rho_\mu(\omega) + \varepsilon \geq k_F(\omega)$, звідки, спрямовуючи $\varepsilon \to +0$, отримуємо, що $\rho_\mu(\omega) \geq k_F(\omega)$.

У випадку $\rho_\mu(\omega) = +\infty$ нерівність $\rho_\mu(\omega) \geq k_F(\omega)$ очевидна. $\square$

Твердження 2.21 ([67],Theorem 3, p.265)**.** *Якщо $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ має вигляд* (2.35) *і виконується умова*

$$\beta(\Lambda_+) := \lim_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k \ln\lambda_k} = 0,$$

то

$$\rho_F = \rho_\mu$$

і, отже, $\rho_F = k_F = \rho_\mu$.

Зауваження 2.11. Твердження 2.21 за умови $\beta(\Lambda) = 0$ є застосовним при фіксованому $\omega \in \Omega$ до кожного цілого ряду Діріхле $F_\omega \in \mathcal{D}$ вигляду (2.1), при цьому

$$\rho_F(\omega) = \rho_\mu(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)}{-\ln|f_k(\omega)|} \quad \text{м.н.}$$

Справді, якщо виконується умова $\beta(\Lambda) = 0$, то $\lambda_k(\omega) \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ і, тому допускає при такому фіксованому ω впорядкування за зростанням, а, отже, до "нового" ряду Діріхле $\widetilde{F}$ з так впорядкованими елементами вже можна застосувати Твердження 2.21. Але, з абсолютної збіжності початкового ряду Діріхле випливає, що

$$F_\omega(z) \equiv \widetilde{F}_\omega(z).$$

Крім цього, очевидно, що

$$\mu(x, F_\omega) \equiv \mu(x, \widetilde{F}_\omega).$$

Твердження 2.22. *Для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}$ вигляду* (2.1) *м.н.*

$$T_\mu(\omega) = K_F(\omega) := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k(\omega)}{e\rho} |f_k(\omega)|^{\rho/\lambda_k(\omega)}, \quad \rho = \rho_\mu(\omega).$$

Якщо ж виконується умова $\tau(\Lambda,\omega) := \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k(\omega)} = 0$, *то*

$$T_F(\omega) = T_\mu(\omega) = K_F(\omega) \quad \text{м.н.}$$

Справді, перша частина так само, як і Твердження 2.20, доводиться за допомогою стандартних міркувань. Далі, при фіксованому ω такому, що $\tau(\Lambda,\omega) = 0$, для всіх досить великих $k \geq k_0 = k_0(\omega)$ маємо $\lambda_k(\omega) > \ln k/\varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – довільне. Тому, $\sum_{k=k_0}^{+\infty} \exp\{-2\varepsilon\lambda_k(\omega)\} \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} \exp\{-2\ln k\} < +\infty$, звідки $C(\varepsilon) := \sum_{k=0}^{+\infty} \exp\{-2\varepsilon\lambda_k(\omega)\} < +\infty$ і, отже,

$$M(x,F_\omega) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)| e^{(x+2\varepsilon)\lambda_k(\omega)} e^{-2\varepsilon\lambda_k(\omega)} \leq C(\varepsilon)\mu(x+2\varepsilon,F_\omega).$$

Звідси, отримуємо, що $T_F(\omega) \leq T_\mu(\omega)\cdot e^{2\varepsilon\rho_F(\omega)}$. Спрямовуючи $\varepsilon \to +0$, остаточно маємо, що $T_F(\omega) = T_\mu(\omega)$.

Твердження 2.23. *Нехай цілий ряд Діріхле $F_\omega \in \mathcal{D}$, має вигляд* (2.1) *і* $h = h(\omega) := \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{-\ln|f_k(\omega)|} < 1$. *Тоді, для кожного $\varepsilon \in (0, 1-h)$ і всіх $x \geq 0$*

$$M(x,F_\omega) \leq C(\varepsilon)\Big(\mu\big(\frac{x}{1-h-\varepsilon}, F_\omega\big)\Big)^{1-h-\varepsilon}, \quad C(\varepsilon) = C(\varepsilon,\omega) < +\infty.$$

Зокрема, $\rho_F(\omega) \leq \rho_\mu(\omega)/(1-h(\omega))$ *м.н., а також* $\rho_F(\omega) = \rho_\mu(\omega)$ *м.н. за умови* $h(\omega) = 0$ *м.н.*

Доведення. Справді, якщо $F_\omega \in \mathcal{D}$, має вигляд (2.1), то $-\ln|f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ м.н. З умови $h = h(\omega) < 1$ випливає, що для кожного $2\varepsilon \in (0, 1-h)$ виконується нерівність

$$-\ln|f_k(\omega)| > \ln k/(h+\varepsilon)$$

для всіх досить великих $k \geq k_0 = k_0(\omega)$. Тоді

$$C(\varepsilon) = C(\varepsilon, \omega) := \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} =$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0-1} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} + \sum_{k=k_0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} + \sum_{k=k_0}^{+\infty} \exp\{-\frac{h+2\varepsilon}{h+\varepsilon} \ln k\} < +\infty.$$

Тому, для всіх $x \geq 0$

$$M(x, F_\omega) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-h-2\varepsilon} e^{x\lambda_k(\omega)} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(|f_k(\omega)| e^{x\lambda_k(\omega)/(1-h-2\varepsilon)} \Big)^{1-_h-2\varepsilon} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} \leq$$

$$\leq \Big(\mu\big(\frac{x}{1-h-2\varepsilon}, F_\omega\big) \Big)^{1-h-2\varepsilon} C(\varepsilon).$$

Звідси, $\rho_F(\omega) \leq \rho_\mu(\omega)/(1-h-2\varepsilon)$. Залишається спрямувати $\varepsilon \to +0$. □

Наслідуючи F.Tian ([13]), спершу розглянемо питання про формули для визначення величин R-порядів і R-типів випадкових рядів Діріхле $F_\omega \in \mathcal{D}$ вигляду (2.1) з коефіцієнтами $f_k(\omega) = a_k \cdot Z_k(\omega)$. Доведемо таке твердження.

Твердження 2.24. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд* (2.35), *а $F_\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}$ має вигляд* (2.1), *де $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Якщо $\rho_\mu = \rho[\ln \mu(\cdot, F)] < +\infty$,*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln \lambda_k} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{2.40}$$

і виконується одна з двох умов $\beta(\Lambda) = 0$ або $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$, то $F_\omega \in \mathcal{D}$ і $\rho_F(\omega) = \rho_\mu = k_F := \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|a_k|}$ м.н.

Доведення Твердження 2.24. Зауважимо спочатку, що за Твердженням 2.23 $\rho_\mu = k_F$, тому

$$(\forall\varepsilon)(\exists k_0)(\forall k \geq k_0)\colon \quad |\ln|a_k|| > \frac{1}{\rho+\varepsilon}\lambda_k \ln\lambda_k,$$

звідки, за умовою $\beta(\Lambda) = 0$ отримуємо, що $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$.

Вище вже відзначалося, що за Твердженням 2.11, застосованим до ряду F_ω

$$\sigma(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k Z_k(\omega)|}{\lambda_k}.$$

Але,

$$\delta := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\big|\ln|Z_k(\omega)|\big|}{\big|\ln|a_k|\big|} \leq (\rho+\varepsilon) \lim_{k\to+\infty} \frac{\big|\ln|Z_k(\omega)|\big|}{\lambda_k \ln\lambda_k} = 0,$$

Тому отримуємо, що м.н.

$$\sigma(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k} \cdot \left(1 + \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right) = \sigma_\mu(F) = +\infty,$$

тобто, $F_\omega \in \mathcal{D}$. Оскільки, як вище відзначалося

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|} = 0, \tag{2.41}$$

то $\ln k = o(\ln|a_k Z_k(\omega)|)$ $(k \to +\infty)$. Тому, для обчислення величини порядку $\rho_F(\omega)$ за Твердженням 2.23 тепер маємо

$$\rho_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln\lambda_k}{-\ln|a_k| - \ln|Z_k(\omega)|} =$$
$$= \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\lambda_k \ln\lambda_k}{-\ln|a_k|} \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right)^{-1} = k_F.$$

При цьому ми знову скористалися співвідношенням (2.41). □

Введемо такі позначення

$$B_1 = \Big\{\omega\colon \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln\lambda_k} = \delta(\omega) \geq 0\Big\},$$

$$B_2 = \Big\{\omega\colon \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln\lambda_k} = \Delta(\omega) < 0\Big\},$$

$$B_3 = \Big\{\omega\colon \lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln\lambda_k} = 0\Big\},$$

$$B_4 = \Big\{\omega\colon \theta(\omega) := \varlimsup_{k\to+\infty} \Big|\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\Big| < 1\Big\}.$$

Доведемо таку модифікацію пропереднього твердження.

Твердження 2.25. *Нехай цілий ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд* (2.35), *а $F_\omega \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд* (2.36), *де $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Якщо $\rho_\mu = \rho[\ln\mu(\cdot, F)] \in (0, +\infty)$ і виконується одна з двох умов $\beta(\Lambda) = 0$ або $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$, то $(\exists B \in \mathcal{A},\ \mathbf{P}(B) = 0)$:*
i) $\omega \in B_1 \setminus B,\ \delta(\omega) + \frac{1}{\rho_F} > 0 \implies \sigma_a(F, \omega) = +\infty$;
ii) $\omega \in B_1 \setminus B \implies \frac{1}{\rho_\mu(\omega)} \geq \delta(\omega) + \frac{1}{\rho_F}$;
iii) $\omega \in B_2 \setminus B \ \wedge\ \sigma(F, \omega) = +\infty \implies \frac{1}{\rho_F(\omega)} \leq \Delta(\omega) + \frac{1}{\rho_F}$;
iv) $\omega \in B_3 \setminus B \implies \rho_F(\omega) = \rho_\mu = k_F := \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln\lambda_k}{-\ln|a_k|}$.
v) $\omega \in B_4 \setminus B \implies \sigma(F, \omega) = +\infty \ \wedge\ \Big|\frac{\rho_F}{\rho_F(\omega)} - 1\Big| \leq \theta$.

Доведення. Оскільки $F(0) \neq \infty$, то $-\ln|f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ м.н. Відзначимо спочатку, що п. iv) доводиться цілком так само, як Твердження 2.24.

У випадку $\omega \in B_1$, оскільки $-\ln|a_k| > \lambda_k \ln\lambda_k/(\rho_F + \varepsilon)$ і $-\ln|Z_k(\omega)| > (\delta(\omega) - \varepsilon)\lambda_k \ln\lambda_k$ для всіх $k \geq k_0(\omega)$, то

$$-\ln|f_k(\omega)| \geq (\delta(\omega) - \varepsilon + \frac{1}{\rho_F + \varepsilon})\lambda_k \ln\lambda_k.$$

Звідси, вибираючи $\varepsilon > 0$ так, щоб виконувалось $\delta(\omega) - \varepsilon + \frac{1}{\rho_F+\varepsilon} > 0$, з умови $\beta(\Lambda) = 0$ нескладно отримуємо, що $\sigma_\mu(\omega) = +\infty$.

Стосовно доведення п.п. ii), iii), відзначимо, що оскільки $\varliminf(a - b) \geq \varliminf a - \varlimsup b$, то

$$\frac{1}{\rho_F} = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k \ln\lambda_k} = \varliminf_{k\to+\infty} \Big(\frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k \ln\lambda_k} - \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln\lambda_k}\Big) \geq$$

$$\geq \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k \ln \lambda_k} - \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln \lambda_k} = \frac{1}{k_F(\omega)} - \Delta(\omega).$$

Подібно, оскільки $\varliminf(a-b) \leq \varliminf a - \varliminf b$, то

$$\frac{1}{\rho_F} \leq \frac{1}{k_F(\omega)} - \delta(\omega).$$

Але, $k_F(\omega) = \rho_\mu(\omega) \leq \rho_F(\omega)$.

Якщо $\omega \in B_4$, то

$$\varliminf_{k\to+\infty} \frac{\big|\ln|a_k||Z_k(\omega)|\big|}{\ln k} \geq \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\ln k} \cdot \Big(1 - \varlimsup_{k\to+\infty} \Big|\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\Big|\Big) =$$

$$= (1-\theta(\omega)) \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\ln k} = +\infty.$$

Тому, за Твердженням 2.11, застосованим до ряду F_ω

$$\sigma(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{\big|\ln|a_k||Z_k(\omega)|\big|}{\lambda_k} \geq$$

$$\geq \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k} \cdot \Big(1 - \varlimsup_{k\to+\infty} \Big|\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\Big|\Big) =$$

$$= \sigma_\mu(F)(1-\theta(\omega)) = +\infty.$$

Далі, за Твердженням 2.23

$$\frac{1}{\rho_F(\omega)} = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k| - \ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln \lambda_k} \geq$$

$$\geq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k \ln \lambda_k} \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1 - \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right) = k_F(1-\theta(\omega)).$$

Подібно,

$$\frac{1}{\rho_F(\omega)} \leq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k \ln \lambda_k} \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1 - \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right) = k_F(1+\theta(\omega)).$$

Але, $k_F = \rho_F$. □

Отримаємо тепер у вигляді простого наслідку такий аналог теореми 2 з [12].

Твердження 2.26. *Нехай* $(Z_k(\omega))$ *— послідовність випадкових величин така, що*

$$(\exists\alpha > 0)\colon \ \sup\{\mathbf{M}|Z_k|^{\alpha}, \mathbf{M}|Z_k|^{-\alpha}\colon k \geq 0\} < +\infty, \tag{2.42}$$

цілий Діріхле $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ *і має вигляд* (2.35), *а ряд Діріхле* $F_\omega \in \mathcal{D}(\Lambda)$ *має вигляд* (2.36), *де* $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. *Якщо виконується одна з умов* $\beta(\Lambda) = 0$ *або* $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$, *то ряд Діріхле* F_ω *є цілим і*

$$\rho_F(\omega) = \rho_\mu(\omega) = \rho_F = k_F \quad \text{м.н.}$$

Доведення Твердження 2.26. З умови (2.42) випливає, що

$$\ln|Z_k(\omega)| = O(\ln k) \quad (r \to +\infty) \quad \text{м.н.}$$

Справді, за нерівністю Маркова $\mathbf{P}\{\omega\colon |\xi(\omega)| \geq a\} \leq \frac{\mathbf{M}\xi}{a}$, $a > 0$, тому для $\eta > 0$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\{\omega\colon |Z_k(\omega)|^{\alpha} \geq k^{1+\eta}\} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{M}(|Z_k(\omega)|^{\alpha})/k^{1+\eta} < +\infty.$$

Звідси, за першою частиною леми Бореля-Кантелі серед подій $\big(\{\omega\colon |Z_k(\omega)|^{\alpha} \geq k^{1+\eta}\}\big)$ з ймовірністю, що дорівнює одиниці, виконується скінченна їх кількість, отже, м.н. для всіх достатньо великих k виконується нерівність $|Z_k(\omega)| < k^{(1+\eta)/\alpha}$. Подібно з оцінкою знизу. Отже, за умовою $\beta(\Lambda) = 0$ отримуємо, що $\ln|Z_k(\omega)| = o(\lambda_k \ln\lambda_k)$ $(k \to +\infty)$ м.н., тобто, виконуються умови Твердження 2.24.

У доведенні Твердження 2.24 відзначалося, що з умови $\rho_F < +\infty$ випливає, що

$$\lambda_k \ln\lambda_k = O(\ln|a_k|) \quad (k \to +\infty).$$

Так само, за умовою $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$ маємо

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|\ln|Z_k(\omega)||}{|\ln|a_k||} = \lim_{k\to+\infty} \frac{O(\ln k)}{|\ln|a_k||} = 0$$

тобто, виконуються умови Твердження 2.16, за яким для функції F_ω маємо

$$\sigma(F,\omega) = \alpha_0^*(\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k} = \alpha_0(F) = +\infty,$$

тобто, ряд Діріхле F_ω є цілим. Як і у доведенні Твердження 2.24 маємо, що $\ln k = o(\ln|a_k Z_k(\omega)|)$ $(k\to+\infty)$ м.н. Тому, для обчислення величини порядку $\rho_F(\omega)$ за Твердженням 2.23 знову маємо

$$\rho_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln\lambda_k}{-\ln|a_k| - \ln|Z_k(\omega)|} =$$
$$= \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\lambda_k \ln\lambda_k}{-\ln|a_k|} \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right)^{-1} = k_F.$$

□

Зауваження 2.12. У статті [13] замість умови $\beta(\Lambda) = 0$ вимагається виконання умови $\tau(\Lambda_+) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} < +\infty$. Зрозуміло, що умова $\beta(\Lambda) = 0$ випливає з останньої умови і в загальному, умова $\beta(\Lambda) = 0$ є слабшою за умову $\tau(\Lambda_+) < +\infty$.

Відзначимо також такий наслідок з тверджень 2.20 і 2.21.

Твердження 2.27. *Нехай $F_\omega \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд* (2.36). *Якщо $\beta(\Lambda_+) = 0$, а $(f_k(\omega))$ – послідовність незалежних випадкових величин, то $\rho_F(\omega) \equiv \rho \in [0,+\infty]$ м.н., при цьому*

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\lambda_k \ln\lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = \rho.$$

Справді, за законом нуля і одиниці Колмогорова, випадкова величина $k_F(\omega)$ є майже напевне сталою тобто, існує $\rho \in [0,+\infty]$ таке, що $k_F(\omega) \equiv \rho$ м.н. Залишається застосувати Твердження 2.20 і 2.21.

Наступна теорема містить умови, які повинні задовольняти випадкові величини $f_k(\omega)$ для того, щоб для довільного наперед заданого $\rho \in [0,+\infty]$ виконувалась рівність $\rho_F(\omega) = \rho$ м.н. Власне, доведемо таку теорему.

Теорема 2.11. *Нехай* $F_\omega \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *має вигляд* $F_\omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k}$, *а* $\big(|f_k(\omega)|\big)$ *– послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $F_k(x) := \mathbf{P}\{\omega\colon |f_k(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. *Якщо* $\beta(\Lambda) = 0$, *то:*

a) *Для того, щоб* $\rho_F(\omega) = \rho \in (0, +\infty)$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon \in (0,\rho)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\big(e^{-\frac{1}{\rho+\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) < +\infty \wedge$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\big(e^{-\frac{1}{\rho-\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) = +\infty.$$

b) *Для того, щоб* $\rho_F(\omega) = 0$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\big(e^{-\varepsilon\lambda_k \ln \lambda_k} + 0\big)\Big) < +\infty.$$

c) *Для того, щоб* $\rho_F(\omega) = +\infty$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\big(e^{-\varepsilon\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) = +\infty.$$

Доведення теореми 2.11. За Зауваженням 2.11, застосованим до F_ω, маємо, що з умови $\beta(\Lambda) = 0$ випливає, що

$$\rho_F(\omega) = \rho_\mu(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} \quad \text{м.н.}$$

a) *Необхідність.* За умовою, $(\exists B \in \mathcal{A}, \mathbf{P}(B) = 1)(\forall \omega \in B)\colon$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = \rho.$$

Оскільки ряд Діріхле при $\omega \in B$ в точці $z = 0$ збіжний, то $-\ln|f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ і за означенням $\varlimsup$ маємо

$$(\forall \omega \in B)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*(\omega))\colon$$
$$|f_k(\omega)| < \exp\Big\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho+\varepsilon}\Big\}.$$

Розглянемо подію

$$A_k(\varepsilon) := \Big\{\omega\colon |f_k(\omega)| \geq \exp\big\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho+\varepsilon}\big\}\Big\}.$$

Зауважимо, що,

$$B \subset C(\varepsilon) := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k(\varepsilon),$$

і, тому, $\mathbf{P}(C(\varepsilon)) = 1$. Оскільки $C(\varepsilon)$ – подія “ серед елементів послідовності $(A_k(\varepsilon))$ відбувається лише скінченна кількість подій”, а попарна незалежність подій $A_k(\varepsilon)$ випливає з попарної незалежності випадкових величин $|f_k(\omega)|$, то за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі (див. [37], [32, p. 84]) отримуємо, що

$$\sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k(\varepsilon)) < +\infty. \tag{2.43}$$

Залишається скористатись рівністю

$$\mathbf{P}(A_k(\varepsilon)) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}_k(\varepsilon)) = 1 - F_k\big(\exp\big\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho+\varepsilon}\big\}\big).$$

Далі, за означенням $\overline{\lim}$ маємо, що для кожного $\omega \in B$ існує послідовність $m_j \to +\infty$ така, що при $k = m_j$, $j \geq 1$

$$|f_k(\omega)| > \exp\big\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho-\varepsilon}\big\}.$$

Звідси,

$$B \subset \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N} A_k^1(\varepsilon) := C^1(\varepsilon),$$

де

$$A_k^1(\varepsilon) = \Big\{\omega\colon |f_k(\omega)| > \exp\big\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho-\varepsilon}\big\}\Big\}.$$

Тоді,

$$\mathbf{P}(C^1(\varepsilon)) = 1.$$

Зауважимо, що $C^1(\varepsilon)$ – подія "серед елементів послідовності $\big(A_k^1(\varepsilon)\big)$ відбувається нескінченна кількість подій". Оскільки $\mathbf{P}(A_k^1(\varepsilon)) = 1 - F_k\Big(\exp\big\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho-\varepsilon}\big\}\Big)$, то залишається довести, що

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k^1(\varepsilon)) = +\infty. \tag{2.44}$$

Міркуючи від супротивного, припустимо, що $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k^1(\varepsilon)) < +\infty$. Але тоді, за першою частиною леми Бореля-Кантелі $\mathbf{P}(\overline{C^1}(\varepsilon)) = 1$, звідки $\mathbf{P}(C^1(\varepsilon)) = 0$. Суперечність. Тому, $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k^1(\varepsilon)) = +\infty$, тобто, виконується (2.44).

Достатність. Зберігаємо позначення з доведення необхідності. З умови випливає, що виконується умова (2.43). Тому за першою частиною леми Бореля-Кантелі маємо, що ймовірність події $C(\varepsilon)$ – подія " серед елементів послідовності $(A_k(\varepsilon))$ відбувається лише скінченна кількість подій", дорівнює одиниці, $\mathbf{P}(C(\varepsilon)) = 1$. Зауважимо, що для кожного $\omega \in C(\varepsilon)$ і для всіх $k \geq k_0(\omega)$ виконується нерівність

$$|f_k(\omega)| < \exp\big\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho+\varepsilon}\big\}.$$

Звідси, для кожного $\omega \in C(\varepsilon)$ і для всіх $k \geq k_1(\omega)$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} \leq \rho + \varepsilon.$$

Далі, подібно маємо, що оскільки

$$\mathbf{P}(A_k^1(\varepsilon)) = 1 - F_k\Big(\exp\big\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho-\varepsilon}\big\}\Big),$$

то виконується (2.44). Звідси за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі отримуємо, що ймовірність події $C^1(\varepsilon)$ – "серед елементів послідовності $(A_k^1)(\varepsilon)$ відбувається нескінченна кількість подій", дорівнює одиниці, $\mathbf{P}(C^1(\varepsilon)) = 1$. Отже, для кожного $\omega \in C^{(1)}(\varepsilon)$ існує послідовність $m_k \to +\infty$ така, що $\omega \in A_{m_k}^1$, звідки

$$|f_{m_k}(\omega)| > \exp\big\{-\frac{\lambda_{m_k} \ln \lambda_{m_k}}{\rho-\varepsilon}\big\}.$$

Тому, для кожного $\omega \in C^{(1)}(\varepsilon)$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} \geq \rho - \varepsilon.$$

Позначимо тепер

$$C^2(\varepsilon) = C(\varepsilon) \bigcap C^{(1)}(\varepsilon).$$

Тоді,

$$\mathbf{P}\big(\bigcap_{m=1}^{+\infty} C^{(2)}(1/m)\big) = 1$$

і, отже, остаточно отримуємо

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = \rho$$

для кожного $\omega \in \bigcap_{m=1}^{+\infty} C^{(2)}(1/m)$, тобто, м.н.

b) *Необхідність.* За умовою, $(\exists B \in \mathcal{A}, \mathbf{P}(B) = 1)(\forall \omega \in B)$:

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = 0.$$

Оскільки, за означенням верхньої границі для кожного $\omega \in B$ існує $k_0(\omega)$ таке, що для всіх $k \geq k_0(\omega)$

$$|f_k(\omega)| < \exp\Big\{-\frac{1}{\varepsilon_1}\lambda_k \ln \lambda_k\Big\} \quad \text{для всіх} \;\; k \geq k_0(\omega),$$

то, міркуючи подібно, як в доведенні необхідності в п.**a)**, введемо спочатку в розгляд події

$$A_k(\varepsilon_1) := \Big\{\omega\colon |f_k(\omega)| \geq \exp\big\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\varepsilon_1}\big\}\Big\},$$

$$C(\varepsilon_1) := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k(\varepsilon_1),$$

а потім знову зауважимо, що, $B \subset C(\varepsilon_1)$, і тому $\mathbf{P}C(\varepsilon_1)) = 1$. Оскільки $C(\varepsilon_1)$ – подія “ серед елементів послідовності $(A_k(\varepsilon_1))$

відбувається лише скінченна кількість подій", а попарна незалежність подій $A_k(\varepsilon_1)$ випливає з попарної незалежності випадкових величин $|f_k(\omega)|$, то за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі знову

$$\sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k(\varepsilon_1)) < +\infty.$$

Залишається знову скористатись рівністю

$$\mathbf{P}(A_k(\varepsilon_1)) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}_k(\varepsilon_1)) = 1 - F_k\big(\exp\big\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\varepsilon_1}\big\}\big)$$

і вибрати $\varepsilon_1 = 1/\varepsilon$.

Достатність. Оскільки за умовою $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k(\varepsilon_1)) < +\infty$, то для $\varepsilon_1 = 1/\varepsilon$ за першою частиною леми Бореля-Кантелі маємо, що ймовірність події $C(\varepsilon_1)$ – " серед елементів послідовності $(A_k(\varepsilon_1))$ відбувається лише скінченна кількість подій" дорівнює одиниці, $\mathbf{P}(C(\varepsilon_1)) = 1$. Звідси, для кожного $\omega \in C(\varepsilon_1)$ і для всіх $k \geq k_0(\omega)$ виконується нерівність $|f_k(\omega)| < \exp\big\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\varepsilon}\big\}$. Тому, для кожного $\omega \in C(\varepsilon_1)$ і для всіх $k \geq k_1(\omega)$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} \leq \varepsilon.$$

Для завершення доведення розглянемо

$$C^{(2)} := \bigcap_{m=1}^{+\infty} C(m).$$

Маємо $\mathbf{P}(C^{(2)}) = 1$, тому, для всіх $\omega \in C^{(2)}$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} \leq 1/m,$$

звідки, $\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = 0$ м.н.

c) *Необхідність.* За умовою, $(\exists B \in \mathcal{A}, \mathbf{P}(B) = 1)(\forall \omega \in B)$:

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = +\infty.$$

Звідси за означенням верхньої границі $(\forall\varepsilon > 0)(\forall\omega \in B)(\exists(m_k), m_k \to +\infty)$:

$$\frac{\lambda_{m_k}\ln\lambda_{m_k}}{-\ln|f_{m_k}(\omega)|} > 1/\varepsilon \implies |f_{m_k}(\omega)| > -\varepsilon\lambda_{m_k}\ln\lambda_{m_k},$$

звідки,

$$B \subset \bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{k=N} A_k^1(\varepsilon) := C^1(\varepsilon),$$

де

$$A_k^1(\varepsilon) = \{\omega\colon |f_k(\omega)| > \exp\big\{-\varepsilon\lambda_k\ln\lambda_k\big\}\}.$$

Тоді, $\mathbf{P}(C^1(\varepsilon)) = 1$. Оскільки знову $C^1(\varepsilon)$ – подія "серед елементів послідовності $(A_k^1)(\varepsilon)$ відбувається нескінченна кількість подій", а

$$\mathbf{P}(A_k^1(\varepsilon)) = 1 - F_k\Big(\exp\big\{-\varepsilon\lambda_k\ln\lambda_k\big\} + 0\Big),$$

то подібно до того, як це робилося вище, міркуючи від супротивного, за першою частиною леми Бореля-Кантелі доводимо, що

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(A_k^1(\varepsilon)) = +\infty.$$

Достатність. За умовою, для кожного $\varepsilon > 0$ маємо

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(A_k^1(\varepsilon)) = +\infty.$$

За уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі звідси отримуємо, що ймовірність події $C^1(\varepsilon)$ – "серед елементів послідовності $(A_k^1)(\varepsilon)$ відбувається нескінченна кількість подій" дорівнює одиниці, $\mathbf{P}(C^1(\varepsilon)) = 1$. Отже, знову для кожного $\omega \in C^{(1)}(\varepsilon)$ існує послідовність $m_k \to +\infty$ така, що $\omega \in A_{m_k}^1$, звідки

$$|f_{m_k}(\omega)| > \exp\big\{-\varepsilon\lambda_{m_k}\ln\lambda_{m_k}\big\}.$$

Тому, для кожного $\omega \in C^{(1)}(\varepsilon)$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\lambda_k\ln\lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} \geq \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\lambda_{m_k}\ln\lambda_{m_k}}{-\ln|f_{m_k}(\omega)|} \geq 1/\varepsilon.$$

Зауважимо, що

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{m=1}^{+\infty} C^1(1/m)\Big) = 1$$

і, отже, остаточно отримуємо

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = +\infty$$

для кожного $\omega \in \bigcap\limits_{m=1}^{+\infty} C^1(1/m)$, тобто, м.н. $\square$

Сформулюємо тепер таку теорему. Схема її доведення цілком подібна на схему доведення попередньої теореми з тією відмінністю, що при цьому потрібно використати Твердження 2.22. Зогляду на цю подібність наводимо теорему без доведення.

Теорема 2.12. *Нехай* $F_\omega \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *має вигляд* $F_\omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k}$, *а* $\big(|f_k(\omega)|\big)$ *– послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $F_k(x) := \mathbf{P}\{\omega\colon |f_k(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. *Якщо* $\tau(\Lambda_+) = 0$, *то:*

a) *Для того, щоб* $T_F(\omega) = T \in (0, +\infty)$ *м.н., необхідно і досить, щоб* $(\forall \varepsilon \in (0, T)$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\Big(\Big(\frac{(T+\varepsilon)e\rho}{\lambda_k}\Big)^{\lambda_k/\rho}\Big)\Big) < +\infty \wedge$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\Big(\Big(\frac{(T-\varepsilon)e\rho}{\lambda_k}\Big)^{\lambda_k/\rho}\Big)\Big) = +\infty.$$

b) *Для того, щоб* $T_F(\omega) = 0$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\Big(\Big(\frac{\varepsilon e\rho}{\lambda_k}\Big)^{\lambda_k/\rho}\Big)\Big) < +\infty.$$

c) *Для того, щоб* $T_F(\omega) = +\infty$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\Big(\Big(\frac{e\rho}{\varepsilon\lambda_k}\Big)^{\lambda_k/\rho}\Big)\Big) = +\infty.$$

Висновки до розділу 2

У розділі 2 досліджуються абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з довільними дійсними невід'ємними та з випадковими попарно незалежними показниками. Всі основні твердження цього розділу є новими і не мають попередників.

Проведені дослідження абсцис збіжності рядів Діріхле з довільною послідовністю попарно різних невід'ємних показників без будь-яких, наскільки це взагалі є можливим, яких би то не було апріорних умов, крім умови, що множина існування максимального члена ряду є непорожньою. Всі доведені тут твердження для зручності формулюються і доводяться для випадкових рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами і показниками, хоча частина з них є фактично новими твердженнями для детермінованих рядів Діріхле з довільною послідовністю попарно різних невід'ємних показників. У підрозділі 2.2 для абсцис збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками, що є сумою елементів числової послідовності і послідовності випадкових величин, і випадковими коефіцієнтами, утвореними у вигляді добутків елементів числової послідовності і послідовності випадкових величин доведено теорему 2.1, що пов'язує випадкову абсцису збіжності випадкового ряду з абсцисою абсолютної збіжності детермінованого ряду Діріхле, утвореного з квадратів детермінованих елементів початкового випадкового ряду, та теорему 2.2, що пов'язує абсцису абсолютної збіжності випадкового ряду з абсцисою абсолютної збіжності детермінованого ряду Діріхле, утвореного з тих самих, що і у випадку теореми 2.1. детермінованих елементів початкового випадкового ряду. Твердження такого вигляду в літературі не мають попередників. У підрозділ 2.3 дається опис абсцис збіжності випадкових рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами спеціального, описаного вище вигляду, і

випадковими показниками, в термінах обмежень, які накладаються на функції розподілу попарно незалежних випадкових показників. Всі з доведених тут теорем 2.5 – 2.10 є новими і не мають попередників та є аналогами тверджень, встановлених у 2015 р. (О.Б. Скасків і Л.О.Шаповаловська) в термінах обмежень на функції розподілу попарно незалежних випадкових коефіцієнтів у випадку випадкових рядів з монотонно зростаючою послідовністю показників. У підрозділі 2.4 в термінах обмежень, що накладаються на функції розподілу випадкових коефіцієнтів (теорема 2.11) встановлено критерій того, що випадковий R-порядок зростання $\rho_F(\omega)$ дорівнює довільному наперед заданому значенню $\rho \in [0, +\infty]$.

Результати другого розділу опубліковано в статтях [16–19].

РОЗДІЛ 3. ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ КРАТНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

3.1 Області збіжності кратних випадкових рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами

Нехай $\Lambda^p = (\lambda_{(n)})_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$, де $\lambda_{(n)} = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \ldots, \lambda_{n_p}^{(p)}) \in \mathbb{R}_+^p = [0, +\infty)^p$, $(n) = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \in \mathbb{N}$. У випадку, коли $(\lambda_k^{(j)})_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $1 \le j \le p$, зростаючі до $+\infty$ послідовності невід'ємних чисел, тобто, $0 = \lambda_0^{(j)} < \lambda_k^{(j)} < \lambda_{k+1}^{(j)} \uparrow +\infty$ $(1 \le k \uparrow +\infty,\ 1 \le j \le p)$, використовуємо позначення Λ_+^p. Через $\mathcal{D}^p(\Lambda^p)$ позначимо клас формальних кратних рядів Діріхле вигляду

$$F(s) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_{(n)} \exp\{(\lambda_{(n)}, s)\}, \tag{3.1}$$

$$s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{C}^p,\ s_j = \sigma_j + it_j\ (j \in \{1, \ldots, p\}),$$

таких, що існує $\sigma \in \mathbb{R}^p$ таке, що

$$a_{(n)} \exp(\lambda_{(n)}, \sigma) \to 0 \quad (\|n\| := n_1 + \ldots + n_p \to +\infty), \tag{3.2}$$

де $(a_{(n)})$ – послідовність комплексних чисел, $(\lambda_{(n)}, s) = \lambda_{n_1}^{(1)} s_1 + \ldots + \lambda_{n_p}^{(p)} s_p$, $(n) = (n_1, n_2, ..., n_p)$.

Для $\sigma \in \overline{\mathbb{R}}^p := [-\infty, +\infty]^p$ позначимо

$$\mathbf{\Pi}_\sigma := \{s \in \mathbb{C}^p :\ \mathrm{Re}\ s < \sigma\},$$
$$\Pi_\sigma = \Pi_\sigma^p := \{x \in \mathbb{R}^p :\ x < \sigma\}, \quad \Pi_\sigma^0 = \{x \in \mathbb{R}^p \colon x \ge \sigma\},$$

де $\mathrm{Re}\ s = (\mathrm{Re}\ s_1, \ldots, \mathrm{Re}\ s_p)$, $x = (x_1, \ldots, x_p) < b = (b_1, \ldots, b_p) \Longleftrightarrow x_j < b_j$ $(\forall j \in \{1, \ldots, p\})$, а $x \ge b \Longleftrightarrow x_j \ge b_j$ $(\forall j \in \{1, \ldots, p\})$.

Нехай

$$G_{\text{зб}} = \{x \in \mathbb{R}^p :\ \text{ряд (3.1) збіжний в } \mathbf{\Pi}_x\},$$
$$\mathbf{G}_{\text{зб}} = \{z \in \mathbb{C}^p \colon \mathrm{Re}\ z \in G_c\},$$

$$G_a = \{x \in \mathbb{R}^p : \text{ ряд (3.1) абсолютно збіжний в } \mathbf{\Pi}_x\},$$
$$\mathbf{G}_a = \{z \in \mathbb{C}^p \colon \mathrm{Re}\ z \in G_a\}.$$

$\mathbf{G}_{зб}$, $\mathbf{G}_a$ відповідно, області збіжності та абсолютної збіжності ряду (3.1), а $G_{зб}$, G_a їхні сліди в $\{x \in \mathbb{R}^p : \ x = Re\ z,\ z \in \mathbb{C}^p\}$. У випадку послідовності Λ_+^p область існування максимального члена визначається ([8]) як множина тих $\sigma \in \mathbb{R}^p$, що

$$\mu(\sigma, F) = \mu(\sigma_1, \ldots, \sigma_p, F) =$$
$$= \max\{|a_{(n)}| \exp(\lambda_{(n)}, \sigma) \colon (n) \in \mathbb{Z}_+^p\} < +\infty. \tag{3.3}$$

В загальному, область існування максимального члена G_μ визначимо як внутрішність множини тих $\sigma \in \mathbb{R}^p$, для яких виконується умова (3.2).

Зауваження 3.1. *У випадку послідовності Λ_+^p обидва означення визначають дві множини з однією і тією ж внутрішністю, яку ми надалі позначатимемо через G_μ. В загальному, очевидно, що умова* (3.3) *випливає з умови* (3.2). *Навпаки з умови* (3.3) *умова* (3.2), *взагалі кажучи, не випливає. Справді, припустимо що $p = 2$, $\lambda_k^{(1)} = \lambda_k^{(2)}$ $(k \geq 1)$, $a_{(n_1,n_2)} = 0$ $(n_1 \neq n_2)$, $a_{(k,k)} = 1$ $(k \geq 1)$. Тоді $\mu(\sigma, F) = \mu(\sigma_1, -\sigma_1, F) = 1$, але $a_{(n)} e^{(\sigma, \lambda_n)} \not\to 0$ $(n_1 + n_2) \to +\infty$ при $\sigma = (\sigma_1, -\sigma_1)$.*

Множини $\partial G_{зб}$, ∂G_a, ∂G_μ – відповідно, гіперповерхні спряжених абсцис збіжності, абсолютної збіжності і існування максимального члена ряду (3.1).

Зауваження 3.2. 1. *Якщо $\sigma \notin \overline{G}_{зб}$ (відповідно, $\sigma \notin \overline{G}_a$), то ряд* (3.1) *не може бути скрізь збіжним (відповідно, абсолютно збіжним) в Π_σ; подібно, якщо $\sigma \notin \overline{G}_\mu$, то $|a_{(n)}| \exp(\lambda_{(n)}, \sigma) \not\to 0$.*
2. *Якщо $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$, то $\partial G_\mu \neq \emptyset$ і*

$$G_a \subset G_{зб} \subset G_\mu, \quad \partial G_a \subset \partial G_{зб} \subset \partial G_\mu.$$

3. $\sigma \in \partial G_\mu \Longrightarrow \Pi_\sigma \subset G_\mu$; $\sigma \in \partial G_a \Longrightarrow \Pi_\sigma \subset G_a$;
$\sigma \in \partial G_{зб} \Longrightarrow \Pi_\sigma \subset G_{зб}$.

В [3] фактично доведено таке твердження.

Твердження 3.1 ([3]). *Якщо* $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda_+^p)$ *і* $\tau(\Lambda_+^p) := \overline{\lim\limits_{\|n\|\to\infty}} \dfrac{\ln\|n\|}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0$, *то*

$$\partial G_a = G_1^* := \Big\{\alpha \in \mathbb{R}^p\colon \overline{\lim_{\|n\|\to+\infty}} \frac{\ln|a_{(n)}| + (\alpha, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0\Big\},$$

де $\|\lambda_{(n)}\| = \lambda_{n_1}^{(1)} + ... + \lambda_{n_p}^{(p)}$.

Зауваження 3.3. *У статті [8, Твердження 1.2] у випадку послідовності* Λ_+^p *фактично доведено, що* $\partial G_\mu = G_1^*$, *звідки, негайно маємо, що*

$$G_\mu = G_1 := \bigcup_{x\in G_1^*} \Pi_x.$$

Зауваження 3.4. *В рамках кожного з двох щойно цитованих тверджень* $G_a = G_1 := \bigcup\limits_{x\in G_1^*} \Pi_x$ *і* $G_\mu = G_1$, *відповідно. Тому, з умови* $\tau(\Lambda_+^p) = 0$ *випливає, що* $G_a = G_{зб} = G_\mu = G_1$.

З огляду на зауваження 3.3 і 3.4 маємо таке твердження.

Твердження 3.2. *Якщо* $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda_+^p)$ *і* $\tau(\Lambda_+^p) = 0$, *то* $G_a = G_{зб} = G_\mu = G_1$ *і* $\partial G_a = \partial G_{зб} = \partial G_\mu = G_1^*$.

Наступне твердження доведене в [8, Твердження 1.3].

Твердження 3.3 ([8]). *Нехай* $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda_+^p)$. *Для того, щоб* $G_\mu = \mathbb{R}^p$ *необхідно і досить, щоб*

$$\lim_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}\|} = +\infty.$$

Тепер розглянемо ряди Діріхле $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$ з послідовністю показників Λ^p загального вигляду. Спочатку доведемо наступне твердження. У випадку послідовності Λ_+^p, доведено у [8, Твердження 1.3].

Твердження 3.4. *Нехай* $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$ *і* $\lambda := \varliminf\limits_{\|n\|\to+\infty} \|\lambda_{(n)}\| > 0$. *Для того, щоб* $G_\mu = \mathbb{R}^p$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}\|} = +\infty.$$

Доведення Твердження 3.4. Необхідність. Нехай $G_\mu = \mathbb{R}^p$. Тоді, $|a_{(n)}|\exp(\|\lambda_{(n)}\|\sigma) \to 0 \quad (\|n\| \to +\infty)$ для всіх $\sigma > 0$, таких що $-\ln|a_{(n)}| - \|\lambda_{(n)}\|\sigma \to +\infty \quad (\|n\| \to +\infty)$. Hence, $-\ln|a_{(n)}| \geq \|\lambda_{(n)}\|\sigma$ для всіх досить великих $\|n\|$. Тому,

$$\varliminf_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}\|} \geq \sigma.$$

Залишається скористатись довільністю $\sigma > 0$.

Достатність. З умови випливає, що $\ln|a_{(n)}| + \sigma\|\lambda_{(n)}\| \to -\infty$ $(\|n\| \to +\infty)$ для всіх $\sigma > 0$. Дійсно, для $\sigma_1 > 0$, для кожного $\sigma > 0$ і для всіх досить великих $\|n\|$ виконується нерівність $-\ln|a_{(n)}| > (\sigma_1 + \sigma)\|\lambda_{(n)}\|$, така що

$$-\ln|a_{(n)}| - \sigma\|\lambda_{(n)}\| > \sigma_1\|\lambda_{(n)}\| > \sigma_1\lambda/2$$

для всіх досить великих $\|n\|$. Використовуючи довільність вибору $\sigma_1 > 0$, отримуємо необхідне відношення.

Виберемо $\sigma = \max\left\{1,\ \max\{\sigma_j^0 \colon j \in \{1,\ldots,p\}\}\right\}$ для будь-якого $\sigma^0 = (\sigma_1^0,\ldots,\sigma_p^0) \in \mathbb{R}^p$, маємо

$$|a_{(n)}|\exp\{(\sigma^0, \lambda_{(n)})\} \leq \exp\{\ln|a_{(n)}| + \sigma\|\lambda_{(n)}\|\} \to 0 \quad (\|n\| \to \infty),$$

i.e. $G_\mu = \mathbb{R}^p$. Доведення твердження 3.4 завершено. □

Наступне твердження узагальнює Твердження 3.4 у випадку $\mathbb{R}^l \times \Pi_{\sigma_0}^{p-l} \subset G_\mu$, де $\Pi_{\sigma_0}^{p-l} := \Pi_{\sigma_{l+1}^0} \times \ldots \times \Pi_{\sigma_p^0}$, $\sigma^0 = (\sigma_1^0,\ldots,\sigma_p^0) \in \mathbb{R}^p$.

Твердження 3.5. *Нехай $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$ і для деякого l, $1 \leq l \leq p$, $\lambda^l := \varliminf_{\|n\|\to+\infty} \|\lambda_{(n)}\|_l > 0$, де*

$$\|\lambda_{(n)}\|_l := \sum_{k=1}^{l} \lambda_{n_k}^{(k)}.$$

Для того, щоб $\mathbb{R}^l \times \Pi_{\sigma_0}^{p-l} \subset G_\mu$, необхідно і досить, щоб для кожного $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_p) \in \mathbb{R}^l \times \Pi_{\sigma_0}^{p-l}$

$$\lim_{\|n\|\to+\infty} \frac{\ln(1/|a_{(n)}|) - \sum\limits_{j=l+1}^{p} \sigma_j \lambda_{n_j}^{(j)}}{\|\lambda_{(n)}\|_l} = +\infty. \tag{3.4}$$

Доведення Твердження 3.5. Необхідність. Нехай $\beta > 0$ - довільне, $\beta_l = (\beta, \ldots, \beta) \in \mathbb{R}^l$. З умови $\sigma = (\beta, \ldots, \beta, \sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_p) \in G_\mu$ випливає, що $a_{(n)} e^{(\sigma, \lambda_{(n)})} \to 0$ ($\|n\| \to +\infty$). Тоді, для всіх $\|n\| \geq k_0$ маємо $|a_{(n)}| e^{(\sigma, \lambda_{(n)})} \leq 1$, отже,

$$\frac{-\ln |a_{(n)}| - \sum\limits_{j=l+1}^{p} \sigma_j \lambda_{n_j}^{(j)}}{\sum\limits_{k=1}^{l} \lambda_{n_k}^{(k)}} \geq \beta. \tag{3.5}$$

Залишається спочатку знайти нижню границю при $\|n\| \to +\infty$, а потім при $\beta \to +\infty$.

Достатність. Нехай $\widetilde{\sigma} = (\widetilde{\sigma}_{l+1}, \ldots, \widetilde{\sigma}_p) < \sigma^* = (\sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_p) \in \Pi_{\sigma_0}^{p-l}$. Умова (3.4) означає, що для будь-якого $\beta > 0$ і для $\|n\| \geq k_0$ нерівність (3.5) виконується. Тоді, для довільного фіксованого $(\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_l) \in \mathbb{R}^l$ і $\widehat{\sigma} = (\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_l, \widetilde{\sigma}_{l+1}, \ldots, \widetilde{\sigma}_p) \in \mathbb{R}^p$ ми отримуємо

$$-\ln |a_{(n)}| - (\widehat{\sigma}, \lambda_{(n)}) \geq \sum_{k=1}^{l} (\beta - \widetilde{\sigma}_k) \lambda_{n_k}^{(k)} + \sum_{k=1}^{l} (\sigma_j - \widetilde{\sigma}_j) \lambda_{n_j}^{(j)} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{l} (\beta - \widetilde{\sigma}_k) \lambda_{n_k}^{(k)}.$$

Припустимо, що $\beta > 2 \max\{\widetilde{\sigma}_k \colon 1 \leq k \leq l\}$. Тоді,

$$-\ln |a_{(n)}| - (\widehat{\sigma}, \lambda_{(n)}) \geq \frac{\beta}{2} \|\lambda_{(n)}\|_l.$$

Залишається скористатись умовою

$$\lambda^l := \varliminf_{\|n\| \to +\infty} \|\lambda_{(n)}\|_l > 0$$

і використати довільність $\beta > 0$.

Тоді, $|a_{(n)}| e^{(\widehat{\sigma}, \lambda_{(n)})} \to 0$ ($\|n\| \to +\infty$), звідси, $\widehat{\sigma} \in G_\mu$ для всіх $\widehat{\sigma} \in \mathbb{R}^l \times \Pi_{\sigma_0}^{p-l}$. Таким чином, $\mathbb{R}^l \times \Pi_{\sigma_0}^{p-l} \subset G_\mu$. $\square$

Введемо такі позначення

$$G_0^* := \Big\{\alpha \in \mathbb{R}^p\colon \varliminf_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{(\alpha,\lambda_{(n)})} = 1\Big\}, \quad G_0 := \bigcup_{x\in G_0^*} \Pi_x,$$

$$\widehat{G}_0^* := \Big\{\alpha \in \mathbb{R}^p\colon \varlimsup_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{(\alpha,\lambda_{(n)})} = 1\Big\}, \quad \widehat{G}_0 := \bigcup_{x\in \widehat{G}_0^*} \Pi_x.$$

Доведемо такі твердження

Твердження 3.6. *Якщо* $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$ *і* $\varliminf\limits_{\|n\|\to+\infty} \|\lambda_{(n)}\| = \lambda > 0$, *тоді*

$$G_0^* \cap \big(\mathbb{R}_+^{p-1} \times (0,+\infty)\big) \subset G_1^* \cap \big(\mathbb{R}_+^{p-1} \times (0,+\infty)\big), \tag{3.6}$$

$$G_1^* \cap \big(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\big)^p \subset G_0^* \cap \big(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\big)^p. \tag{3.7}$$

Твердження 3.7. *Якщо* $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$ *і* $\varliminf\limits_{\|n\|\to+\infty} \|\lambda_{(n)}\| = \lambda > 0$, *тоді*

$$G_1^* \cap \big(-\infty,0)^p \subset \widehat{G}_0^* \cap (-\infty,0)^p, \tag{3.8}$$

$$\widehat{G}_0^* \cap \big((-\infty,0]^{p-1} \times (-\infty,0)\big) \subset G_1^* \cap$$
$$\cap \big((-\infty,0]^{p-1} \times (-\infty,0)\big). \tag{3.9}$$

Доведення Твердження 3.6. Доведемо спочатку, що (3.6). Нехай $\sigma \in G_0^* \cap \big(\mathbb{R}_+^{p-1} \times (0,+\infty)\big)$. Тоді, виконується рівність $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty} \ln(1/|a_{(n)}|)/(\sigma,\lambda_{(n)}) = 1$. Тому,

$$\frac{\ln|a_{(n)}| + (\sigma,\lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = -\varepsilon_{(n)} \cdot \frac{(\sigma,\lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|}, \tag{3.10}$$

де $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty} \varepsilon_{(n)} = 0$. З умови $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty} \|\lambda_{(n)}\| > 0$ випливає, що $\|\lambda_{(n)}\| > 0$ і $(\sigma,\lambda_{(n)}) \geq 0$ для досить великих $\|n\|$, то $0 \leq \dfrac{(\sigma,\lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} \leq \max\{|\sigma_j|\colon 1 \leq j \leq p\} < +\infty$для досить велики $\|n\|$. Звідси отримуємо

$$\varliminf_{\|n\|\to\infty} \varepsilon_{(n)} \cdot \frac{(\sigma,\lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0.$$

Отже,

$$\varlimsup_{\|n\|\to\infty} \frac{\ln\,|a_{(n)}| + (\sigma, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0, \tag{3.11}$$

тобто $\sigma \in G_1^*$ і $G_0^* \cap \big(\mathbb{R}_+^{p-1} \times (0, +\infty)\big) \subset G_1^* \cap \big(\mathbb{R}_+^{p-1} \times (0, +\infty)\big)$.

Припустимо, що $\sigma \in G_1^* \cap \big(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\big)^p$, тобто $\min\{\sigma_j \colon 1 \le j \le p\} > 0$. Тоді, з (3.11) для всіх $\varepsilon > 0$ і досить великих $\|n\|$ маємо $\ln(1/|a_{(n)}|) > (\sigma, \lambda_{(n)}) - \varepsilon\|\lambda_{(n)}\|$, тоді

$$\frac{\ln(1/|a_{(n)}|)}{(\sigma, \lambda_{(n)})} > 1 - \frac{\varepsilon\|\lambda_{(n)}\|}{(\sigma, \lambda_{(n)})} \ge 1 - \frac{\varepsilon}{\min\{\sigma_j \colon j \in \{1, \dots, p\}\}}.$$

Аналогічно, для деякої послідовності $(\widehat{n})$ такої, що $\|\widehat{n}\| \to +\infty$, отримуємо

$$\frac{\ln(1/|a_{\widehat{n}}|)}{(\sigma, \lambda_{(\widehat{n})})} < 1 + \frac{\varepsilon\|\lambda_{(\widehat{n})}\|}{(\sigma, \lambda_{(\widehat{n})})} \le 1 + \frac{\varepsilon}{\min\{\sigma_j \colon j \in \{1, \dots, p\}\}}.$$

З огляду на довільність $\varepsilon > 0$ отримуємо, що $\sigma \in G_0^* \cap \big(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\big)^p$, тобто $G_1^* \cap \big(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\big)^p \subset G_0^* \cap \big(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\big)^p$. □

Доведення Твердження 3.7. Доведемо спочатку, що (3.8). Припустимо, що $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_p) \in G_1^* \cap (-\infty, 0)^p$, звідси, $\max\{\sigma_j \colon 1 \le j \le p\} < 0$, тобто $\min\{-\sigma_j \colon 1 \le j \le p\} > 0$. Аналогічно як вище, з рівності (3.11), з огляду на $(\sigma, \lambda_{(n)}) < 0$, отримуємо

$$\begin{aligned}
(\exists k_0)(\forall \|n\| \ge k_0)\colon\ & \frac{\ln(1/|a_{(n)}|)}{(\sigma, \lambda_{(n)})} < 1 - \frac{\varepsilon\|\lambda_{(n)}\|}{(\sigma, \lambda_{(n)})} \le \\
& \le 1 + \frac{\varepsilon}{\min\{-\sigma_j \colon j \in \{1, \dots, p\}\}}, \\
(\exists(\widehat{n}))\colon\ & \|\widehat{n}\| \to \infty \ \wedge\ \frac{\ln(1/|a_{\widehat{n}}|)}{(\sigma, \lambda_{(\widehat{n})})} > 1 + \frac{\varepsilon\|\lambda_{(\widehat{n})}\|}{(\sigma, \lambda_{(\widehat{n})})} \ge \\
& \ge 1 - \frac{\varepsilon}{\min\{-\sigma_j \colon j \in \{1, \dots, p\}\}}.
\end{aligned}$$

Звідси ми отримуємо, що (3.8).

Припустимо тепер, що $\sigma \in \widehat{G}_0^* \cap \big((-\infty,0]^{p-1} \times (-\infty,0)\big)$, i.e. $(\sigma,\lambda_{(n)}) \le 0$ і виконується рівність

$$\varlimsup_{\|n\|\to\infty} \ln(1/|a_{(n)}|)/(\sigma,\lambda_{(n)}) = 1.$$

Тоді

$$\frac{\ln(1/|a_{(n)}|) - (\sigma,\lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = \varepsilon_{(n)} \cdot \frac{(\sigma,\lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|}, \tag{3.12}$$

де $\varlimsup\limits_{\|n\|\to\infty} \varepsilon_{(n)} = 0$. Але, $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty} \|\lambda_{(n)}\| > 0$, тому

$$\frac{\big|(\sigma,\lambda_{(n)})\big|}{\|\lambda_{(n)}\|} \le \max\{|\sigma_j|\colon 1 \le j \le p\} < +\infty$$

і $(\sigma,\lambda_{(n)}) \le 0$ для досить великих $\|n\|$.
Звідси,

$$\varliminf_{\|n\|\to\infty} \varepsilon_{(n)} \cdot \frac{(\sigma,\lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0.$$

Тоді, з (3.12) рівність (3.11) виконується. Тому $\sigma \in G_1^*$, ми отримали $\widehat{G}_0^* \cap \big((-\infty,0]^{p-1} \times (-\infty,0)\big) \subset G_1^* \cap \big((-\infty,0]^{p-1} \times (-\infty,0)\big)$.

Припустимо тепер, що $\sigma \in \widehat{G}_0^* \cap \big((-\infty,0]^{p-1} \times (-\infty,0)\big)$, тобто $(\sigma,\lambda_{(n)}) \le 0$ і виконується рівність $\varlimsup\limits_{\|n\|\to\infty} \ln(1/|a_{(n)}|)/(\sigma,\lambda_{(n)}) = 1$. Тоді, для всіх $\varepsilon > 0$ і для всіх досить великих $\|n\|$ we have $\frac{\ln(1/|a_{(n)}|)}{(\sigma,\lambda_{(n)})} < 1+\varepsilon$. Тому,

$$\frac{\ln(1/|a_{(n)}|) - (\sigma,\lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} > \frac{\varepsilon(\sigma,\lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} \ge$$

$$\ge \varepsilon \cdot \min\{\sigma_j\colon j \in \{1,\dots,p\}\},$$

далі подібно, для деякої підпослідовності $(\widehat{n})$ такої, що $\|\widehat{n}\| \to +\infty$, отримуємо

$$\frac{\ln(1/|a_{\widehat{n}}|) - (\sigma,\lambda_{(\widehat{n})})}{\|\lambda_{(\widehat{n})}\|} < -\varepsilon \cdot \frac{(\sigma,\lambda_{(\widehat{n})})}{\|\lambda_{(\widehat{n})}\|} \le$$

$$\le -\varepsilon \cdot \min\{\sigma_j\colon j \in \{1,\dots,p\}\}.$$

Отже, ми знову отримали, що рівність (3.11) виконується. Тому, $\sigma \in G_1^*$. $\square$

Твердження 3.8. *Якщо* $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$ *і* $\varliminf\limits_{\|n\|\to+\infty} \|\lambda_{(n)}\| = \lambda > 0$, *тоді* $\mathbb{R}^p \cap \partial G_\mu = \mathbb{R}^p \cap G_1^*$.

Зауваження 3.5. *Якщо* $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$, *множина* $J \subset \mathbb{Z}_+^p$ *необмежена і* $|a_{(n)}| \to +\infty$ $(\|n\| \to +\infty,\ (n) \in J)$, *то* $\|\lambda_{(n)}\| \to +\infty$ $(\|n\| \to +\infty,\ (n) \in J)$, *бо інакше, всупереч зауваженню 2.3.2,* $\partial G_\mu = \emptyset$.

Доведення Твердження 3.8. Нехай $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \partial G_\mu \cap \mathbb{R}^p$. Припустимо спочатку, що $\min\{\alpha_j \colon 1 \le j \le p\} > 0$. Тоді, $\pi_\alpha := \{t\alpha \colon t \le 1\} \subset \Pi_\alpha$. Розглянемо ряд Діріхле

$$g(t) = \sum a_{(n)} e^{t\lambda^*_{(n)}}, \quad \lambda^*_{(n)} = (\alpha, \lambda_{(n)}).$$

Абсциса існування максимального члена цього ряду $\sigma_\mu(g) = 1$. Дійсно, бо $\pi_\alpha \subset \Pi_\alpha$, тоді $\sigma_\mu(g) \ge 1$. Якщо нерівність $\sigma_\mu(g) > 1$ виконується, тоді існує $t_0 > 1$ таке, що

$$a_{(n)} e^{t_0(\alpha, \lambda_{(n)})} = a_{(n)} e^{t_0 \lambda^*_{(n)}} \to 0 \quad (\|n\| \to +\infty).$$

Але тоді $t_0\alpha \in G_\mu$. За Зауваженням 3.5, $t\alpha \notin G_\mu$ для всіх $t > 1$ отримуємо суперечність.

За твердженням 2 з [18] отримуємо

$$\alpha_0(g) := \varliminf_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{\lambda^*_{(n)}} = \sigma_\mu(g)$$

. Тоді з

$$\alpha_0(g) = 1, \tag{3.13}$$

випливає, що

$$\varliminf_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{(\alpha, \lambda_{(n)})} = 1. \tag{3.14}$$

За Твердженням 3.6 можна зробити висновок, що $\alpha \in G_1^*$. Тому, ми довели за допомогою деяких додаткових припущень, описаних раніше у доведенні що $\partial G_\mu \subset G_1^*$.

Навпаки, якщо $\alpha \in G_1^*$, тоді за Твердженням 3.6 отримуємо (3.14). Але тоді виконується умова (3.13) і за Твердженням 2 з [18] отримуємо $\sigma_\mu(g) = \alpha_0 = 1$. Тому, для всіх $t < 1$ виконується

$$a_{(n)} e^{t(\alpha, \lambda_{(n)})} = a_{(n)} e^{t\lambda^*_{(n)}} \to 0 \quad (\|n\| \to +\infty).$$

Отже, $t\alpha \in G_\mu$. Нарешті отримуємо, що $\alpha \in \overline{G}_\mu$ з цього випливає, що $G_1^* \subset \partial G_\mu,\ G_1 \subset G_\mu$.

Виберемо $\alpha^* := \min\{\alpha_j \colon 1 \le j \le p\} \le 0$. Тоді, $\alpha^0 := \min\{\alpha_j + 1 + |\alpha^*| \colon 1 \le j \le p\} > 0$. Розглянемо ряд Діріхле

$$F_1(z) = \sum a^0_{(n)} e^{(z, \lambda_{(n)})},$$

де $\quad a^0_{(n)} := a_{(n)} e^{-(1+|\alpha^*|)(e_1, \lambda_{(n)})}$.

Зауважимо, що $\alpha \in \partial G_\mu(F) \iff \big(\alpha + (1 + |\alpha^*|)e_1\big) \in \partial G_\mu(F_1)$, оскільки

$$a^0_{(n)} \exp\big(z + (1 + |\alpha^*|)e_1, \lambda_{(n)}\big) = a_{(n)} e^{(z, \lambda_{(n)})}.$$

Також, $\alpha \in G_1^*(F) \iff \big(\alpha + (1 + |\alpha^*|)e_1\big) \in G_1^*(F_1)$ since

$$\varlimsup_{\|n\| \to +\infty} \frac{\ln |a^{(0)}_{(n)}| + (\alpha + (1 + |\alpha^*|)e_1, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} =$$

$$= \varlimsup_{\|n\| \to +\infty} \frac{\ln |a_{(n)}| + (\alpha, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|}.$$

Залишається тільки застосувати доведене вище до ряду Діріхле F_1. Отже, ми отримали, що

$$\alpha \in \partial G_\mu(F) \iff \big(\alpha + (1 + |\alpha^*|)e_1\big) \in \partial G_\mu(F_1) \iff$$
$$\iff \big(\alpha + (1 + |\alpha^*|)e_1\big) \in G_1^*(F_1) \iff \alpha \in G_1^*(F).$$

Нарешті ми маємо $\partial G_\mu(F) = G_1^*(F)$. $\square$

Нехай $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ - ймовірнісний простір. Для дійсних або комплексних випадкових величин ξ позначимо через $\mathbf{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega)$ і $\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}|\xi - \mathbf{E}\xi|^2$ математичне сподівання і дисперсію, відповідно.

Розглянемо ряди Діріхле вигляду

$$F(s) = F_\omega(s) = F(s,\omega) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} f_{(n)}(\omega)\exp\{(\lambda_{(n)}, s)\}, \qquad (3.15)$$

де $\big(f_{(n)}(\omega)\big)$ послідовність випадкових величин $f_{(n)}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ на ймовірнісному просторі $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, і $\Lambda^p = (\lambda_{(n)})_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$ є, як і вище, вектор-послідовністю з невід'ємними компонентами. Через $\mathcal{D}^p(\Lambda^p)$ позначимо клас рядів Діріхле вигляду (3.15) таких, що $F_\omega \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$ м.н. (майже напевно), тобто для кожного фіксованого $\omega \in \Omega \setminus B$, $\mathbf{P}(B) = 0$.

Скрізь у цьому підрозділі, ми припускаємо, що наступна умова виконується:

$$\tau(\Lambda^p) := \varlimsup_{\|n\|\to\infty} \frac{\ln\|n\|}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0.$$

З цієї умови випливає, що $\varliminf\limits_{\|n\|\to+\infty} \|\lambda_{(n)}\| > 0$. Тоді з твердження 3.2,

$$\partial G_a = \partial G_{\text{зб}} = \partial G_\mu = G_1^*,$$

і за Твердженням 3.6,

$$G_1^* \cap \big(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\big)^p = G_0^* \cap \big(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\big)^p.$$

Справді, зокрема, $\sigma \in \partial G_a \cap \big(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\big)^p$ тоді і тільки тоді ,коли

$$\varliminf_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|f_{(n)}(\omega)|}{(\sigma, \lambda_{(n)})} = 1,$$

крім того, за Твердженням 3.7,

$$G_1^* \cap \big(-\infty, 0)^p = \widehat{G}_0^* \cap (-\infty, 0)^p,$$

зокрема, $\sigma \in \partial G_a \cap \big(-\infty, 0)^p$ тоді і тільки тоді ,коли

$$\varlimsup_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|f_{(n)}(\omega)|}{(\sigma, \lambda_{(n)})} = 1.$$

Теорема 3.1. *Нехай* $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$. *Припустимо, що* $\big(|f_{(n)}(\omega)|\big)$ *послідовність попарно незалежних випадкових величин з функцією розподілу* $\Phi_{(n)}(x) := \mathbf{P}\{\omega : |f_{(n)}(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $(n) \in \mathbb{Z}_+^p$. *Виконуються наступні твердження:*

a) *Для того, щоб* $\sigma \in \partial G_a \cap \big(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\big)^p$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}\big)\Big) < +\infty \wedge$$

$$\wedge \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1-\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})} + 0\big)\Big) = +\infty.$$

b) *Для того, щоб* $\sigma \in \partial G_a \cap \big(-\infty, 0)^p$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1-\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}\big)\Big) < +\infty \wedge$$

$$\wedge \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}\big)\Big) = +\infty.$$

c) *Для того, щоб* $G_a = \mathbb{R}^p$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \Delta > 0)\colon \quad \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \big(1 - \Phi_{(n)}\big(\exp(-\Delta\|\lambda_{(n)}\|)\big)\big) < +\infty.$$

Доведення Теореми 3.1. **a)** *Необхідність.* За умовою, $(\exists B \in \mathcal{A}, \mathbf{P}(B) = 1)(\forall \omega \in B)\colon$

$$\varlimsup_{\|n\|\to+\infty} \frac{\ln|f_{(n)}(\omega)|}{(\sigma, \lambda_{(n)})} = -1.$$

За означенням верхньої границі, оскільки $(\sigma, \lambda_{(n)}) \geq 0$ для досить великих $\|n\|$, маємо

$$(\forall \omega \in B)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall \|n\| \geq k^*(\omega))\colon$$
$$|f_{(n)}(\omega)| < e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})},$$

Позначимо

$$A_{(n)} := \big\{\omega\colon |f_{(n)}(\omega)| \geq e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}\big\}.$$

Тоді,

$$B \subset C := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{\|n\|=N}^{\infty} \overline{A}_{(n)}$$

і $\mathbf{P}(C) = 1$; C - подія, яка полягає в тому, що "серед подій послідовності $(A_{(n)})$ відбувається скінченна їх кількість". Попарна незалежність подій $(A_{(n)})$ випливає з попарної незалежності випадкових величин $(|f_{(n)}(\omega)|)$, тому, за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі ми отримуємо (див. [38, 39], [32, p.84])

$$\sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_{(n)}) < +\infty. \tag{3.16}$$

Але,

$$\mathbf{P}(A_{(n)}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}_{(n)}) = 1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}\big).$$

Далі, для кожного $\omega \in B$ існує послідовність $m_k \to +\infty$ така, що при $\|n\| = m_k$

$$\ln|f_{(n)}(\omega)| > (-1-\varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)}),$$

то,

$$\omega \in \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{\|n\|=N} A^1_{(n)} := C^1,$$

де $A^1_{(n)} = \big\{\omega\colon |f_{(n)}(\omega)| > e^{(-1-\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}\big\}$. Тоді, $B \subset C^1$ і, отже, $\mathbf{P}C^1) = 1$. C^1 – подія, яка полягає в тому, що "серед подій послідовності $(A^1_{(n)})$ відбувається нескінченна їх кількість". Доведемо, що наступна умова виконується

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(e^{(-1-\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})} + 0\big)\Big) =$$

$$= \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A^1_{(n)}) = +\infty. \tag{3.17}$$

Припустимо протилежне

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A^1_{(n)}) < +\infty.$$

Тоді за першою частиною леми Бореля-Кантелі $\mathbf{P}(\overline{C}^1) = 1$. Отже, $\mathbf{P}(C^1) = 0$ і ми отримуємо суперечність. Тому, виконується умова (3.17).

Достатність. Зберігаємо позначення з доведення необхідності. Із збіжності ряду (3.16) за першою частиною леми Бореля-Кантелі, отримуємо, що ймовірність події C - подія "серед елементів послідовності$(A_{(n)})$ виконується лише скінченна кількість подій" дорівнює 1, $\mathbf{P}(C) = 1$. Крім того, для кожного $\omega \in C$ існує $k_0(\omega)$ таке, що $\omega \in \overline{A}_{(n)}$ для всіх (n) таких, що $\|n\| \geq k_0(\omega)$. Це означає, що для всіх $\omega \in C$ і (n) таких, що $\|n\| \geq k_0(\omega)$ виконується нерівність $|f_{(n)}(\omega)| < e^{(-1+\varepsilon)(\sigma,\lambda_{(n)})}$. Але, $(\sigma, \lambda_{(n)}) \geq 0$ для досить великих $\|n\|$, тому, для всіх $\omega \in C$ і (n) таких, що $\|n\| \geq k_1(\omega)$

$$\varliminf_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|f_{(n)}(\omega)|}{(\sigma, \lambda_{(n)})} \geq 1 - \varepsilon.$$

Подібно, з умови маємо, що (3.17). Звідси за другою частиною леми Бореля-Кантелі отримуємо, щоймовірність події – "серед елементів послідовності $(A^1_{(n)})$ відбувається нескінченна кількість подій" дорівнює 1. Отже, для кожного $\omega \in C^1$, $\mathbf{P}C^1) = 1$, існує послідовність $m_k \to +\infty$ така, що $\omega \in A^1_{(n)}$ при $\|n\| = m_k$, тобто $\ln|f_{(n)}(\omega)| > (-1-\varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)})$, Звідки

$$\varliminf_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|f_{(n)}(\omega)|}{(\sigma, \lambda_{(n)})} \leq 1 + \varepsilon.$$

Позначимо тепер $C(\varepsilon) = C \bigcap C^1$, $\varepsilon \in \{\frac{1}{k} \colon k \in \mathbb{N}\}$. Тоді, $P\big(\bigcap\limits_{k\geq 1} C(1/k)\big) = 1$ і, отже,

$$\varliminf_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|f_{(n)}(\omega)|}{(\sigma, \lambda_{(n)})} = 1 \text{ для всіх } \omega \in \bigcap_{k\geq 1} C(1/k).$$

b) За умовою $(\exists B \in \mathcal{A}, \mathbf{P}(B) = 1)(\forall \omega \in B)$:

$$\varlimsup_{\|n\| \to +\infty} \frac{-\ln |f_{(n)}(\omega)|}{(\sigma, \lambda_{(n)})} = 1.$$

Враховуючи, що $(\sigma, \lambda_{(n)}) \leq 0$ для всіх досить великих $\|n\|$, з означення верхньої границі маємо

$$(\forall \omega \in B)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall \|n\| \geq k^*(\omega)):$$
$$|f_{(n)}(\omega)| < e^{(-1-\varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)})}.$$

Позначимо

$$A_{(n)} := \left\{\omega \colon |f_{(n)}(\omega)| \geq e^{(-1-\varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)})}\right\}.$$

Тоді,

$$B \subset C := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{\|n\|=N}^{\infty} \overline{A}_{(n)}$$

і, таким чином, $\mathbf{P}(C) = 1$.

Подібно, як в доведенні **a)**, для всіх $\omega \in B$ існує послідовність $m_k \to +\infty$ така, що для $\|n\| = m_k$

$$\ln |f_{(n)}(\omega)| > (-1 + \varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)}).$$

Звідси,

$$B \subset \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{\|n\|=N} A^1_{(n)} := C^1$$

, де $A^1_{(n)} = \left\{\omega \colon |f_{(n)}(\omega)| > e^{(-1+\varepsilon)(\sigma, \lambda_{(n)})}\right\}$. Тоді знову $\mathbf{P}C^1) = 1$.

Дослівне повторення міркувань з доведення попереднього п.**a)** дає

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_{(n)}) < +\infty \ \wedge \ \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A^1_{(n)}) = +\infty,$$

звідки торимуємо необхідний висновок. Доведення достатності також також практично дослідвне повторення міркувань з доведення п. **a)**.

c) За твердженнями 3.3 і 3.2,

$$G_a = \mathbb{R}^p \text{ м.н.} \Longleftrightarrow \alpha_0^*(\omega) := \lim_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|f_{(n)}(\omega)|}{\|\lambda_{(n)}\|} = +\infty \text{ м.н.}$$

Позначимо

$$A_{(n)} = \{\omega : |f_{(n)}(\omega)| \geq \exp(-\Delta\|\lambda_{(n)}\|)\}.$$

Оскільки,

$$\alpha_0^*(\omega) = +\infty \Longleftrightarrow \ (\forall\Delta > 0)(\exists k_0(\omega))(\forall n, \|n\| \geq k_0(\omega)):$$

$$-\ln|f_{(n)}(\omega)| > \Delta\|\lambda_{(n)}\|,$$

тоді, як і вище $\mathbf{P}(C) = 1$ для

$$C = \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{\|n\|=N}^{\infty} \overline{A}_{(n)}.$$

Використовуючи уточнену другу частину леми Бореля-Кантелі отримаємо $\sum \mathbf{P}(A_{(n)}) < +\infty$, тобто,

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \big(1 - F\big(\exp(-\Delta\|\lambda_{(n)}\|)\big)\big) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_{(n)}) < +\infty.$$

Тепер навпаки. З умови $\sum \mathbf{P}(A_{(n)}) < +\infty$ за першою частиною леми Бореля-Кантелі, ймовірність події – "серед елементів послідовності $(A_{(n)})$ відбувається лише скінченна кількість подій" дорівнює 1. Отже, для кожного $\Delta > 0$ існує $B = B(\Delta)$, $\mathbf{P}(B) = 1$ таке, що для всіх $\omega \in B$ існує $k_0(\omega)$ таке, що $n, \|n\| \geq k_0(\omega)$ виконується нерівність $-\ln|f_{(n)}(\omega)| > \Delta\|\lambda_{(n)}\|$, тоді

$$(\forall\omega \in B(\Delta)): \quad \varliminf_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|f_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}\|} \geq \Delta. \tag{3.18}$$

Розглянемо тепер послідовність $\Delta_k = k$ $k \geq 1$. З доведеного, для кожного $k \geq 1$ існує $B(\Delta_k)$, $\mathbf{P}(B(\Delta_k)) = 1$, така, що виконується

нерівність (3.18) з $\Delta = k$. Тому, для всіх $\omega \in B_0 = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B(\Delta_k)$ маємо

$$(\forall k \geq 1)\colon \quad \varliminf_{\|n\| \to +\infty} \frac{-\ln |f_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}\|} \geq k.$$

Звідси випливає, що $\alpha_0^*(\omega) = +\infty$ для всіх $\omega \in B_0$. Залишається зауважити, що умова $(\forall k \geq 1)\colon\ \mathbf{P}(B(\Delta_k)) = 1$ означає, що $\mathbf{P}(B_0) = 1$. $\square$

3.2 Області збіжності кратних випадкових рядів Діріхле з випадковими показниками

Для $\gamma > 0$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta = (\delta_1, ..., \delta_p) \in \mathbb{R}^p$ позначимо

$$h_1(\gamma; \delta_0) := \varliminf_{\|n\| \to \infty} \frac{(\gamma - 1) \ln |a_{(n)}| + \delta_0 \|\lambda_{(n)}\|}{\ln \|n\|},$$

$$h_2(\gamma; \delta) := \varliminf_{\|n\| \to \infty} \frac{(\gamma - 1) \ln |a_{(n)}| + (\delta, \lambda_{(n)})}{\ln n_1 + ... + \ln n_p}.$$

У статті [8, Theorem 1] доведено наступне твердження.

Твердження 3.9 ([8]). *Нехай $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda_+^p)$.*
i) Якщо існує $\gamma > 0$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$ така, що $h_1(\gamma; \delta_0) > p$, then $\gamma G_{зб} \subset G_a + \delta_0 e_1$ і $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta_0 e_1$, де $e_1 = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^p$.
ii) Якщо існує $\gamma > 0$, $\delta \in \mathbb{R}^p$ така, що $h_2(\gamma; \delta) > 1$, тоді $\gamma G_{зб} \subset G_a + \delta$, $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta$.

Доведемо таке твердження.

Твердження 3.10. *Нехай $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$. Тоді $\Pi^0_{\alpha_0 e_1} \subset \left(\mathbb{R}^p \setminus G_\mu\right) \subset \left(\mathbb{R}^p \setminus G_{зб}\right)$, де*

$$\alpha_0 := \varliminf_{\|n\| \to +\infty} \frac{-\ln |a_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}\|}.$$

Якщо існує $\gamma > 0, \delta \in \mathbb{R}^p$ такі, що

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_{(n)}|^{1-\gamma} e^{-(\delta, \lambda_{(n)})} < +\infty, \tag{3.19}$$

то $\gamma \Pi_{\alpha_0 e_1} \subset G_a + \delta$ і $\gamma G_{зб} \subset \gamma G_1 = \gamma G_\mu \subset G_a + \delta$.

Зауваження 3.6. 1. У випадку ряду Діріхле з послідовністю показників Λ_+^1 Твердження 3.10 див. у [24, 25].
2. Умова (3.19) випливає як з умови $h_1(\gamma; \delta_0) > p$ так і з умови $h_2(\gamma; \delta_0) > 1$. Легко бачити, що умова (3.19) слабша за ці дві умови.

Доведення твердження 3.10. Очевидно, що $\mathbb{R}^p \setminus G_\mu \subset \mathbb{R}^p \setminus G_{\text{зб}}$. Спочатку доведемо, що $\Pi^0_{\alpha_0 e_1} \subset \mathbb{R}^p \setminus G_\mu$. Випадок $\alpha_0(\omega) = +\infty$ тривіальний, бо $\Pi_{\alpha_0 e_1} = \mathbb{R}^p$ і $\Pi^0_{\alpha_0 e_1} = \emptyset$.

Припустимо, що $\alpha_0(\omega) = -\infty$. Тоді за умовою $\alpha_0(\omega)$, для всіх $E > 0$ і деякої послідовності $k_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$

$$\ln |a_{(n)}|/\|\lambda_{(n)}\| > E \quad (\|n\| = k_j,\ j \geq 1).$$

Тоді

$$|a_{(n)}| \exp\{-(Ee_1, \lambda_{(n)}\} > 1 \ (\|n\| = k_j,\ j \geq 1),$$

тобто, $|a_{(n)}| \exp\{(\sigma, \lambda_{(n)}\} \not\to 0$ в точці $\sigma = -Ee_1$. Використовуючи довільність $E > 0$ отримуємо $G_\mu = G_{\text{зб}} = \Pi_{\alpha_0 e_1} = \emptyset$.

Тепер припустимо, що $\alpha_0 \neq \infty$ і виберемо $\alpha_0^* = \alpha_0 + \varepsilon, x_0 = \alpha_0^* e_1$, де $\varepsilon > 0$ - довільне. Тому,

$$|a_{(n)}| e^{(x_0, \lambda_{(n)})} = \exp\{\|\lambda_{(n)}\|(\ln |a_{(n)}|/\|\lambda_{(n)}\| + \alpha_0^*)\}.$$

За означенням α_0 існує послідовність $k_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$ така, що $\ln |a_{(n)}|/\|\lambda_{(n)}\| > -(\alpha_0 + \varepsilon/2)$ $(\|n\| = k_j,\ j \geq 1)$. Тоді, $\ln |a_{(n)}|/\|\lambda_{(n)}\| + \alpha_0 + \varepsilon > \varepsilon/2 \quad (\|n\| = k_j,\ j \geq 1)$. Отже,

$$|a_{(n)}| e^{(x_0, \lambda_{(n)})} \geq e^{\varepsilon \|\lambda_{(n)}\|/2} \geq 1 \quad (\|n\| = k_j.\ j \geq 1),$$

Нарешті, $\Pi^0_{(\alpha_0(\omega)+\varepsilon)e_1} \subset \mathbb{R}^p \setminus G_\mu$. Залишається скористатись довільністю $\varepsilon > 0$.

За означенням α_0

$$\alpha_0 < \frac{-\ln |a_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}\|} + \varepsilon/2 \quad (\|n\| \geq k_0),$$

звідси $|a_{(n)}| e^{\left(\alpha_0^* e_1, \lambda_{(n)}\right)} < \exp\{-\|\lambda_{(n)}\|\varepsilon/2\} \leq 1$ $(\|n\| \geq k_0)$, де $\alpha_0^* := \alpha_0 - \varepsilon$ і $\varepsilon > 0$ - довільне. Виберемо $x_0 = \gamma \alpha_0^* e_1 - \delta$. За $\|n\| \geq k_0$ торимуємо, що

$$|a_{(n)}| e^{(x_0, \lambda_{(n)})} = |a_{(n)}|^{1-\gamma} e^{-(\delta, \lambda_{(n)})} \left(|a_{(n)}| e^{\left(\alpha_0^* e_1, \lambda_{(n)}\right)} \right)^\gamma \leq$$
$$\leq |a_{(n)}|^{1-\gamma} e^{-\left(\delta, \lambda_{(n)}\right)}.$$

За умовою отримуємо, що послідовності (3.1) є абсолютно збіжні в точці $x_0 = \gamma\alpha_0^* e_1 - \delta$. Тому, $\Pi_{\gamma\alpha_0^* e_1} \subset G_a + \delta$. Залишається використати $\Pi_{\gamma\alpha_0^* e_1} = \gamma\Pi_{\alpha_0^* e_1}$ і довільністю $\varepsilon > 0$.

Припустимо, що виконується умова (3.19). Нехай $\alpha^* = \alpha - e_1\varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ -довільне і $\alpha \in G_1^*$ теж довільне. Подібно як вище, за означенням верхньої границі в G_1^* маємо

$$\ln|a_{(n)}| + (\alpha, \lambda_{(n)}) < \|\lambda_{(n)}\|\varepsilon/2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |a_{(n)}|\exp(\alpha^*, \lambda_{(n)}) < \exp(-\|\lambda_{(n)}\|\varepsilon/2) \le 1 \quad (\|n\| \ge k_0).$$

Виберемо $x_0 = \gamma\alpha^* - \delta$. Тоді

$$|a_{(n)}|e^{(x_0,\lambda_{(n)})} = |a_{(n)}|^{1-\gamma}e^{-(\delta,\lambda_{(n)})}\Big(|a_{(n)}|e^{\left(\alpha^*,\lambda_{(n)}\right)}\Big)^{\gamma} \le$$

$$\le |a_{(n)}|^{1-\gamma}e^{-\left(\delta,\lambda_{(n)}\right)} \quad (\|n\| \ge k_0).$$

Отже, ми отримали, що ряд (3.1) є абсолютно збіжний в точці $x_0 = \gamma\alpha^* - \delta = \gamma(\alpha - e_1\varepsilon) - \delta$. Тоді, $\Pi_{x_0} = \big(\gamma\Pi_\alpha - \gamma e_1\varepsilon - \delta\big) \subset G_a$ і $\gamma\Pi_\alpha \subset G_a + \gamma e_1\varepsilon + \delta$. Залишається зауважити довільність $\varepsilon > 0$ і $\alpha \in G_1^*$. Тому,

$$\gamma G_1 = \bigcup_{\alpha\in G_1^*} \gamma\Pi_\alpha \subset G_a + \delta.$$

Використовуючи твердження 3.8 ми отримуємо $G_\mu = G_1$. □

Подібно як і вище у випадку рядів Діріхле з показниками Λ^1, з твердження 3.10 отримуємо такий результат.

Твердження 3.11. *Нехай* $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$. *Якщо* $\ln\|n\| = o\big(\ln|a_{(n)}|\big)$ $(\|n\| \to +\infty)$, *тоді* $\Pi_{\alpha_0 e_1} \subset G_a$ *і* $G_{зб} = G_1 = G_\mu = G_a$.

Вибираючи в твердженні 3.10 $\delta(\omega) = 0$, $\gamma(\omega) = 1 - \gamma_1(\omega)$, отримуємо такий наслідок.

Твердження 3.12. *Нехай* $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$ *вигляду* (3.1), $\varliminf\limits_{\|n\|\to+\infty} \|\lambda_{(n)}\| := \lambda > 0$. *Для деякого* $\gamma_1 \le 1$

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_{(n)}|^{\gamma_1} < +\infty. \tag{3.20}$$

Тоді,

$$G_a \supset (1-\gamma_1)G_1 = (1-\gamma_1)G_\mu \supset (1-\gamma_1)G_{зб}. \tag{3.21}$$

Позначимо $\|\ln n\| = \ln n_1 + \ldots \ln n_p$,

$$h_1 = \varlimsup_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{\|\ln n\|}, \quad h_2 = \varliminf_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{\|\ln n\|},$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} \frac{1}{h_1}, \text{ якщо } & h_1 \in [-\infty, 0), \\ \frac{1}{h_2}, \text{ якщо } & h_2 \in (1, +\infty]. \end{cases}$$

Твердження 3.13. *Нехай $F \in \mathcal{D}^p(\Lambda^p)$ вигляду* (3.1). *Якщо $h_1 \in [-\infty, 0)$ or $h_2 \in (1, +\infty]$, відношення $\gamma G_c \subset \gamma G_1 = \gamma G_\mu \subset G_a + \delta$ виконується при $\gamma = 1 - \gamma_1$. Врахуємо, що $1/\infty = 0$.*

Доведення Твердження 3.13. Спочатку припустимо, що $h_1 < 0$. Переконаємся, що Твердження 3.10 можна застосувати для

$$\gamma_1 = h_0 = 1/(h_1(1-\varepsilon/2)), \tag{3.22}$$

де $0 < \varepsilon < 1$ - довільне. Зауважимо, що у випадку $h_1 = -\infty$, в рівності (3.22) $h_1 < 0$ - довільне. За умовою для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ існує k_0 таке, що для всіх $\|n\| \geq k_0(\omega)$

$$\frac{\ln|a_{(n)}|}{\|\ln n\|} > -h_1(1-\varepsilon).$$

Тоді з $h_0 = 1/(h_1(1-\varepsilon/2))$, $0 < \varepsilon < 1$, оскільки $h_0(\omega) < 0$ маємо

$$|a_{(n)}|^{h_0} \leq \exp\Big\{-h_0 h_1(1-\varepsilon)\|\ln n\|\Big\} =$$
$$= \exp\Big\{-\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/2}\|\ln n\|\Big\},$$

але $\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/2} > 1$. Отже, за Твердженням 3.10 отримуємо (3.21), де $\gamma_1 = 1/(h_1(1-\varepsilon/2))$. Залишається використати довільність $\varepsilon \in (0,1)$.

У випадку $h_2 > 1$ вибираємо $\gamma_1 = h_0 + 2\varepsilon$, $h_0 = 1/h_2$ ($h_0 = 0$ при $h_2 = +\infty$). За означенням нижньої границі при $h_0 + \varepsilon$. Дісно,

за умовою, для будь-якого $\varepsilon > 0$: $h_0 + \varepsilon < 1$ існує k_0 таке, що для всіх $\|n\| \geq k_0(\omega)$

$$\frac{\ln |a_{(n)}|}{\| \ln n\|} < \frac{-1}{h_0 + \varepsilon}.$$

Тоді

$$|a_{(n)}|^{h_0+2\varepsilon} = \exp\Big\{(h_0 + 2\varepsilon) \ln |a_{(n)}|\Big\} \leq$$
$$\leq \exp\Big\{ - \frac{h_0 + 2\varepsilon}{h_0 + \varepsilon} \| \ln n\|\Big\}.$$

Оскільки, за твердженням 3.10 ми отримуємо (3.21), де $\gamma_1 = h_0+2\varepsilon$. Залишається скористатись довільністю $\varepsilon \in (0, 1)$. $\square$

Розглянемо ряди Діріхле вигляду

$$F(s) = F_\omega(s) = F(s, \omega) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_{(n)} \exp\{(\lambda_{(n)}(\omega), s)\}, \qquad (3.23)$$

де $\big(a_{(n)}\big)$ – послідовність комплексних чисел, і $\Lambda^p = (\lambda_{(n)}(\omega))_{n\in\mathbb{Z}^p_+}$, $\lambda_{(n)}(\omega)\colon \Omega \to \mathbb{R}^p_+$ послідовність випадкових векторів з невід'ємними випадковими компонентами на ймовірнісному просторі $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$. Через $\mathcal{D}^p_{ex}$ позначимо клас рядів Діріхле вигляду (3.23) таких, що $F_\omega \in D^p(\Lambda^p)$ м.н.

Скрізь ми припускаємо, що виконується наступна умова:

$$\ln \|n\| = o\big(\ln |a_{(n)}|\big) \quad (\|n\| \to +\infty).$$

Доведемо аналогічну теорему до твердження **c)** з Теореми 3.1 для рядів Діріхле з випадковими показниками

$$\Lambda^p = (\lambda_{(n)}(\omega))_{n\in\mathbb{Z}^p_+}$$

і детермінованими коефіцієнтами $\mathbf{f} = (f_k)$, $f_k \in \mathbb{C}$, $k \geq 0$.

З тверджень 3.3, 3.8 та 3.11 ми отримуємо таке твердження.

Твердження 3.14. 1. *Нехай* $\lambda(\omega) := \varliminf\limits_{\|n\|\to+\infty} \|\lambda_{(n)}(\omega)\| > 0$ *м.н. і* $F \in \mathcal{D}^p_{ex}$. *Для того, щоб* $G_\mu = \mathbb{R}^p$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$\lim_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}(\omega)\|} = +\infty \quad \text{м.н.}$$

2. *Якщо* $F \in \mathcal{D}^p_{ex}$ *і* $\lambda(\omega) > 0$ *м.н., то* $\mathbb{R}^p \cap \partial G_\mu = \mathbb{R}^p \cap G_1^*$ *м.н.*
3. *Нехай* $F \in \mathcal{D}^p_{ex}$. *Якщо* $\ln\|n\| = o\big(\ln|a_{(n)}|\big)$ $(\|n\| \to +\infty)$, *то* $\Pi_{\alpha_0 e_1} \subset G_a$ *і* $G_c = G_1 = G_\mu = G_a$.
Теорема 3.2. *Нехай* $f \in \mathcal{D}_{ex}$ *і* $\Lambda = \big(\lambda_{(n)}(\omega)\big)_{(n)\in\mathbb{Z}^p_+}$ *- послідовність, така, що послідовність* $\big(\|\lambda_{(n)}(\omega)\|\big)_{(n)\in\mathbb{Z}^p_+}$ *- послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $\Phi_{(n)}(x) := \mathbf{P}\{\omega : \|\lambda_{(n)}(\omega)\| < x\}$, $x \in \mathbb{R}^p$, $(n) \in \mathbb{Z}^p_+$. *Для того, щоб* $G_a = \mathbb{R}^p$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall\varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \Big(1 - \Phi_{(n)}\big(\exp(-\varepsilon\ln|a_{(n)}|)\big)\Big) < +\infty. \tag{3.24}$$

Доведення Теореми 3.2. За Твердженням 3.14, $G_\mu = \mathbb{R}^p$ м.н. тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{\|n\|\to+\infty} \frac{-\ln|a_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}(\omega)\|} = +\infty \quad \text{м.н.}$$

Це рівносильне до такого твердження:
існує $B \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(B) = 1$, що для кожного $\omega \in B$, для кожного $\Delta > 0$ існує $k_0(\omega)$ таке, що для всіх (n), $\|n\| \geq k_0$, маємо

$$-\ln|a_{(n)}| > \Delta\|\lambda_{(n)}(\omega)\|.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ візьмемо $\Delta = 1/\varepsilon$. Позначимо

$$A_{(n)} := \Big\{\omega\colon \|\lambda_{(n)}(\omega)\| \geq -\varepsilon\ln|a_{(n)}|\Big\}.$$

Очевидно, що

$$B \subset \overline{C} := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{\|n\|=N}^{\infty} \overline{A}_{(n)},$$

тоді $\mathbf{P}(\overline{C}) = 1$, і $C = \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{\|n\|=N}^{\infty} A_{(n)}$ - подія "серед елементів послідовності $(A_{(n)})$ відбувається нескінченна кількість подій", тобто $\overline{C}$ – подія "серед елементів послідовності $(A_{(n)})$ відбувається лише скінченна кількість подій". З попарної незалежності випадкових величин $(\|\lambda_{(n)}(\omega))\|$ випливає попарна незалежність подій $(A_{(n)})$. Тоді, за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі ([32, p.84])

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \left(1 - \Phi_{(n)}\left(|a_{(n)}|^{-\varepsilon}\right)\right) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_{(n)}) < +\infty.$$

Якщо виконується умова (3.24) , то

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_{(n)}) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \left(1 - \Phi_{(n)}\left(|a_{(n)}|^{-\varepsilon}\right)\right) < +\infty,$$

і за першою частиною леми Бореля-Кантелі , $\mathbf{P}(\overline{C}) = 1$ для всіх $\varepsilon > 0$. Візьмемо $\varepsilon = \varepsilon_k = 1/k$. Тоді $\mathbf{P}(\overline{C}_k) = 1$ для всіх $k \geq 1$, де

$$\overline{C}_k := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{\|n\|=N}^{\infty} \overline{A}_{(n)}^k,$$

$$A_{(n)}^k = \left\{\omega \colon \|\lambda_{(n)}(\omega)\| \geq -\varepsilon_k \ln |a_{(n)}|\right\}.$$

Позначимо $B = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{C}_k$. Тоді $\mathbf{P}(B) = 1$ і для всіх $\omega \in B$ існує $k_0(\omega)$ таке, що для всіх (n), $\|n\| \geq k_0(\omega)$ і $k \geq 1$ маємо

$$\|\lambda_{(n)}(\omega)\| < -\varepsilon_k \ln |a_{(n)}|.$$

отже,

$$\varliminf_{\|n\| \to +\infty} \frac{-\ln |a_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}(\omega)\|} \geq k.$$

Тому,

$$\lim_{\|n\| \to +\infty} \frac{-\ln |a_{(n)}|}{\|\lambda_{(n)}(\omega)\|} = +\infty$$

і $G_\mu = \mathbb{R}^p$ м.н. Теорему 3.2 доведено. $\square$

Висновки до розділу 3

Розділ 3 присвячено дослідженню областей збіжності випадкових кратних рядів Діріхле як з випадковими коефіцієнтами (підрозділ 3.1), так і з випадковими показниками (підрозділ 3.2). Отримані тут теореми 3.1 і 3.2 мають характер критеріїв, а за формою, є подібними на відповідні теореми для рядів Діріхле від однієї змінної, як встановлені у попередньому розділі, так і, згадані вище результати Скасківа-Шаповаловської для рядів Діріхле від однієї змінної з випадковими коефіцієнтами і монотонно зростаючою послідовністю показників.

Теореми 3.1 і 3.2 формулюються в термінах обмежень, що накладаються на функції розподілу, відповідно, коефіцієнтів і показників. Отримані тут результати є новими і не мають своїх попередників

Результати третього розділу опубліковано в статтях [20, 21],

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена дослідженню абсцис і областей збіжності випадкових рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами і випадковими показниками, як від однієї змінної, так і від багатьох комплексних змінних, а також випадкових R-порядків зростання випадкових рядів Діріхле.

У дослідженні як областей збіжності випадкових рядів Діріхле основною лінією дослідження є відмова від апріорних умов на послідовність показників. У тому числі ряд результатів стосуються випадку рядів Діріхле з довільною, взагалі кажучи немонотонною, послідовністю невід'ємних показників. У дисертаційній роботі на основі нових тверджень про співвідношення між абсцисами для таких загальних рядів Діріхле з вперше в термінах умов, що накладаються на функції розподілу випадкових попарно незалежних показників ряду, отримано оцінки абсцис його збіжності, а також вперше досліджено абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з випадковими показниками та випадковими коефіцієнтами. Раніше подібні результати про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами і монотонною послідовністю показників в термінах обмежень, що накладаються на функції розподілу випадкових попарно незалежних коефіцієнтів ряду, роглянули О.Б.Скасків і Л.О.Шаповаловська (2015 р.). У дисертації також вперше в термінах функцій розподілу випадкових компонент рядів Діріхле описані випадкові R-порядки їхнього зростання. На основі нових тверджень про співвідношення між областями збіжності кратних рядів Діріхле вперше в термінах функцій розподілу випадкових коефіцієнтів описано області збіжності випадкових кратних рядів Діріхле. Ряд тверджень, доведених у дисертації для рядів Діріхле з довільною послідовністю показників, і які віді-

грають у дисертаційному дослідженні допоміжну роль, узагальнюють відповідні як одновимірні твердження, так і твердження для кратних рядів Діріхле, доведені раніше у випадку рядів з монотонно зростаючою послідовністю показників О.М.Мулявою (1998), Х.Хеденмальмом (2000), П.Філевичем (2003), Т.Фанжі (1998–2003), О.Ю.Задорожною і О.Б.Скасківим (2009, 2013) та іншими.

Основні результати дисертації є новими і мають завершений характер. Отримані результати про випадкові ряди Діріхле з випадковими показниками є принципово новими і можуть стати основою для подальших результативних досліджень, як самих рядів, так і появи нових їхніх застосувань в інших розділах математики.

Достовірність результатів дисертації підтверджується чіткими і детальними доведеннями, а також тим, що вони опубліковані у фахових журналах і апробовані на багатьох міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях і спеціалізованих наукових семінарах.

БІБЛІОҐРАФІЯ

1. Евграфов М.А. Ряды и интегральные представления. – Итоги науки и техники, сер.: Соврем. пробл. мат. Фундамент. направл., т.13. – М., 1986. – С.5–92.
2. Громов В.П. *Кратные ряды Дирихле* // Сиб. Мат. журн. – 1969. – Т. 10, №3. – С. 522-536.
3. Громов В.П. *К теории кратных рядов Дирихле* // Изв. АН АрмССР. Мат. – 1970. – Т. 5, №5. – С. 449-457.
4. Громов В.П. *К теории кратных рядов Дирихле* // Изв. АН АрмССР. Мат. – 1972. – Т. 7, №2. – С. 90-103.
5. Янушаускас А.И. *Двойные ряды Дирихле* // Лит. мат. сб. – 1978. – Т. 13, №3. – С. 201-211.
6. Янушаускас А.И. *Свойства сопряженных абсцисс сходимости двойных рядов Дирихле* // Лит. мат. сб. – 1979. – Т. 14, №1. – С. 213-228.
7. Задорожна О. Ю., Мулява О.М. *Про спряжені абсциси подвійного ряду Діріхле* // Мат. студії.– 2007. – Т. 28, №1. – С. 29–35.
8. Задорожна О.Ю., Скасків О.Б. *Про спряжені абсциси збіжності кратного ряду Діріхле* // Карпатські мат. публ. – 2009. – Т.1, №2. – С.152–160.
9. Задорожна О.Ю., Скасків О.Б. *Про області збіжності випадкових подвійних рядів Діріхле* // Мат.Студії. – 2009. – Т.32, №1. – С.81–86.
10. Skaskiv O.B., Zadorozhna O.Yu. *On domains of convergence of multiple random Dirichlet series* // Mat. Stud. – 2011. – V.36, №1. – P.51—-57.
11. J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, 2nd. ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1985).

12. Fanji Tian, Dao-chun Sun, Jia-rong Yu, Sur les séries aléatoires de Dirichlet, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **326** (1998), 427–431.
13. Fanji Tian, Growth of random Dirichlet series, *Acta Math. Sci*, **20**, No 3 (2000), 390–396.
14. H. Hedenmalm, Topics in the theory of Dirichlet series, *Visn. Kharkiv. un-tu. Ser. mat., prykl. mat., mekh.*, No 475 (2000), 195–203.
15. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv O.Yu. *On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random pairwise independent exponents* // ArXiv:1703.03280v1[math.CV] 12 Mar 2017. – 12 p.
16. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv O.Yu. *On the convergence of Dirichlet series with random exponents* // Int. Journal of Appl. Math. – 2017. – V.30, №3. – P.229–238.
17. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками і коефіцієнтами* // Буковинський мат. журн. – 2017. – Т.5, №3—4. – С.90–97.
18. Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2017. – Вип.84. – С.96–112.
19. Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Про зростання випадкових цілих рядів Діріхле* // Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 2018. – Вип.85. – С.66—82.
20. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Абсциси збіжності випадкових кратних рядів Діріхле* // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2018. – № 1(42). – С.1—11.
21. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. *On the convergence of random multiple Dirichlet series* // Mat. Stud. – 2018. – V.49, №2. – P.122–137
22. S. Mandelbrojt, *Séries de Dirichlet: Principes et Méthodes*, Gauthier-Villars, Paris (1969).

23. Мулява О.М. *Про абсцису збіжності ряду Діріхле* // Мат. студії. – 1998. – Т.9, №2. – С.171–176.

24. Задорожна О.Ю., Скасків О.Б. *Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілт'єса* // Буковинський мат. журн.– 2013. – Т.1, №3—4. – С.45—-50.

25. Скасків О.Б., Бандура А.І. Асимптотичні оцінки додатних інтегралів та цілі функції. – Львів–Івано-Франківськ: пп. Голіней, 2015. – 108 с.
https://www.researchgate.net/publication/303922060

26. Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. *On the radius of convergence of random gap power series* // Int. Journal of Math. Analysis. – 2015. – V.9, №38. – P. 1889–1893. http://dx.doi.org/10.12988/ijma.2015.53115

27. Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. *Про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле* // Буковинський мат. журн. – 2015. – Т.3, №1. – С.110–114.

28. P.V. Filevych, *On the relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series*, Mat. Stud., **20**, No 1 (2003), 33–39.

29. X. Ding, Y. Xiao, *Natural boundary of random Dirichlet series*, Ukr. mat. zh., **58**, No 7 (2006), 997–1005.

30. H.J. Godwin, *On generalizations of Tchebycheff's inequality*, J.Amer Stat. Assoc., **50** (1955), 923–945.

31. I.R. Savage, Probability inequalities of the Tchebycheff type, *Journal of Research National Bureau of Standarts*, **65B**, No 3 (1961), 211–222.

32. P. Billingsley,*Probability and measure*, Wiley, New York (1986).

33. C. D. Ryll-Nardzewski, *Blackwell's conjecture on power series with random coefficients*, Studia Math., **13** (1953), 30–36.

34. L. Arnold, Über die Konverge einer zufälligen Potenzreihe, *J. Reine Angew. Math.*, **222** (1966), 79–112.
35. L. Arnold, Konvergenzprobleme bei zufälligen Potenzreihen mit Lücken, *Math. Zeitschr.*, **92** (1966), 356–365.
36. K. Roters, Convergence of random power series with pairwise independent Banach-space-valued coefficients, *Statistics and Probability Letters*, **18** (1993), 121–123.
37. Erdős P., Rényi A. *On Cantor's series with convergent* $\sum 1/q_n$ // Ann. Univ. Sci. Budapest Eőtvős. Sect. Math. – 1959. – V.2. – P.93–109.
38. Petrov V.V. Sums of idependent random variables. – New York: Springer, 1975.
39. Мартикайнен А.И., Петров В.В. *О лемме Бореля-Кантелли* // Записки научн. сем. Ленинград. отдел. мат. инст. Стеклова. – 1990. – Т.184. – С.200–207 (English transl. in: J. Math. Sci., 1994, **63**, 540–544).
40. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536с.
41. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. –М.: Мир, 1984. – 528 с.
42. Мандельбройт С. Ряды Дирихле, принципы и методы. – М.: Мир, 1973.
43. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. – К.: ІСДО, 1993.
44. Мулява О. М. *Про абсцису збіжності ряду Діріхле* // Мат. Студ. – 1998. – **9**, №2. – С. 171-176.
45. Kahane J.–P. Some random series of functions. – 2nd. ed. – Cambridge stud. in adv. math. 5. – Cambridge Univ. Press, 1985. – 308 p.
46. Ryll-Nardzewski C. *D.Blackwell's conjecture on power series with random coefficients* // Studia Math. – 1953. – V.13. – P.30–36.

47. Ding X., Xiao Y. *Natural boundary of random Dirichlet series* // Укр. мат. журн. – 2006. – Т.58, №7. – С.997–1005.

48. Hedenmalm H. *Topics in the theory of Dirichlet series* // Вісн. Харків. ун-ту. Сер. мат., прикл. мат. і мех. – 2000. – №475. – P.195–203.

49. Ph. Holgate, Some power series with random gaps, *Adv. Appl. Prob.*, **21** (1989), 708–710.

50. Гихман И.И., Скороход Я.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1988. – 439 с.

51. Скасків О.Б. Теорія ймовірностей. – Львів: Число, 2012. – 143 с.

52. Arnold L. *Über die Konverge einer zufälligen Potenzreihe* // J. Reine Angew. Math. – 1966. – V.222. – P.79–112.

53. Arnold L. *Konvergenzprobleme bei zufälligen Potenzreihen mit Lücken* // Math. Zeitschr. – 1966. – Bd.92. – S.356–365.

54. Roters K. *Convergence of random power series with pairwise independent Banach-space-valued coefficients* // Statistics and Probability Letters. – 1993. – V.18. – P.121–123.

55. Никишин Е.М. *Ряды Дирихле с независимыми показателями и их некоторые применения* // Мат. сб. – 1975. – V.96(138), №1. – С. 3–40.

56. Bohr H. *Über die gleichmässige Konvergenz Dirichletscher Reihen* // J. Reine Angew. Math. – 1913. – V.143. – P.203-211.

57. Bohr H. *Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletchen Reihen* // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. KL. – 1913. – P.441-448.

58. Bohnenblust H., Hille E. *On the absolute convergence of Dirichlet Series* // Annals of Mathematics. – 1931. – V.32. – P.600-622.

59. Hardy G.H., Riesz M. The general theory of Dirichlet's series. – Cambridge: University Press, 1915. – 78 p.
60. Valiron G. *Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet* // S. M. F. Bull. – 1924. – V.52. – P.166–174.
61. Левитан Б. М. Теория операторов обобщённого сдвига. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
62. Besicovitch A.S. Almost periodic functions. – New York:: Dover Publications, 1955.
63. Гиря Н.П. *Розподіл значень голоморфних майже періодичних функцій багатьох змінних.* – Автореф. дис. канд. фіз.-мат. н.– Харків, 2007.
64. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980 – 576 с.
65. Huo Y.Y., Sun Dao-chun. *The Growth of Random Dirichlet Series* // J. of Math. Res. Expos. – 2008. – V.28, №.4. – 1027–1030.
66. Yu Jia-rong. *Julia lines of random Dirichlet series* // Bull. Sci. Math. – 2004. – V.128. – P.341–353. doi:10.1016/j.bulsci.2004.02.005
67. Sugimura K. Übertragung einiger Satze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletsche Reihen // Math.Zeitschrift. – 1929. –Bd.29. –S.264–277.
68. Kojima T. *On the double Dirichlet's series*, Sc. Reports Tôhoku Imperial Univ. (1), math., phys., chem., **9** (1920), 351–340.
69. Гайсин А. М. *Оценка роста функции, представлен- ной рядом Дирихле, в полуполосе* // Мат. сб. – 1982. – Т.117 (159), №3. – С.412–424.
70. Скаскив О.Б. *О теореме типа Бореля для ряда Дирихле, имеющего нулевую абсциссу абсолютной сходимости* // Укр. мат. журн. – 1989. – Т.41, №11. – С.1532–1541.
71. Valiron G. Fonctions analytiques / G. Valiron. – Presses univ. France, 1954. – 236 p.

72. Valiron G. Sur un théorème de M. Hadamard / G. Valiron // Bull. Sci. Math. – 1923. – V.47, №1. – P. 177–192.

73. Wiman A. Über dem Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe / A. Wiman // Acta Math. – 1914. – Bd.37. – S. 305–326.

74. Wittich H. Neuere Untersuchungen über eindeutige analitische Functionen / H. Wittich. – Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1955.

переклад рос. мовою:

Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям / Г. Виттих. – М.: Физматгиз, 1960. – 320 с.

75. Ибрагимов Г.И. *О росте функций, поределенных кратными рядами Дирихле* // Изв. ВУЗов, Математика. – 1973, №7(134). – С.32–39

76. Stasiv N., Skaskiv O. On the growth of the entire Dirichlet series of several variables // Міжнародна математична конф.ім. В.Я. Скоробогатька: Тези. – Міжнародна конф. (Дрогобич, 25.08—29.08.2015). — Інститут ППММ ім. Я.С.Підстригача: Львів, 2015. — С.157.

77. Stasiv N.Yu. On the growth of the Dirichlet series of several variables // Complex Analysis and Related Topics: Abstracts. – International conf. (Lviv, 30.05–4.06, 2016). – Lviv, 2016. – P. 88.

78. Kuryliak A., Skaskiv O., Stasiv N. On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random exponents // Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 р.): Тези доповідей.—Івано-Франківськ, 2017. — С.12–13.

79. Kuryliak A., Skaskiv O., Stasiv N. The abscissa of absolute convergence of Dirichlet series with random exponents // International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach(Lviv, 18.09–23.09,2017): Abstracts.- Lviv, Ukraine.- 2017.- P. 136-137.
80. Skaskiv O., Stasiv N. The abscissas of convergence of random Dirichlet series // Міжн. наук. конф. «Сучасн проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях» (Чернівці, 17.09-19.09, 2018). - Чернівці, 2018. – С.161.